معهد الإنماء العربي

مبادئ النظرية الكهرمغنطيسية

بقلم
ماري انطوانيت تونلا

سلسلة الكتب العلمية 11
بإشراف د. محمد دبس

محتويات الكتاب

الجزء الأول:

النظرية الكهرمغنطيسية

الجزء الثاني:

مبادىء ونتائج النسبية الخاصة

الجزء الثالث:

النسبية العامة

الجزء الرابع:

ملحق في الرياضيات

مقدمـــة

يَهدف هذا الكتاب الى دراسة المبـادىء التي هي أساس النظـريّات الكـلاسيكية (التقليدية) classical والنسبية relativistic للمجال الكهرمغنطيسي electromagnetic field ومجال الجاذبيـة gravitation . فموضـوعنا الأسـاسي في هذا الكتـاب هو إذاً عَـرْض مبسّط لنظريـة ماكسـويـل Maxwell ولنظـريـة النسبيـة العـامـة general relativity وللرابط بينهما الذي هو نظرية النسبية الخاصة special relativity.

لقد حلَّ تدريجياً خلال القرن الماضي مفهوم المجـال المتواصـل continuous محل فكـرة التفاعـل عن بعـد action at a distance. ووُضعت في ذلـك الـوقت النظـريـة الكهـرمغنطيسية لتشمـل جزءًا كبيـراً من الفيزيـاء إذ إنها تفسر الظـواهر الـدائمة permanent مثل الكهرباء السكونية (الكهرسكـونيات) Electrostatics والمغنطيسيـة السكونية Magnetostatics وكذلك الظواهر المتغيرة مع الـزمن. وتتنبأ هـذه النظريـة بوجود الموجات الكهرمغنطيسية ومنها الموجات الضوئية.

ولقد بدا أن معادلات ماكسـويل لا تحـافظ على صيغتهـا إذا ما كتبت في هيكـلْ إسناد frame مرتبطَيْن بمشاهِـدَيْن observers يتحرك أحـدهما بـالنسبة الى الآخـر بحركة مستقيمة rectilinear motion وبسرعة ثابتة constant، وإذا استُعمـل مفهوم الـزمن المطلق absolute time السائـد في الميكانيـك الكلاسيكي. ولقـد كان هـذا ذا أهمية بالغة إذ ظهرت سلسلة من التناقضات بين نتائج التجارب التي تناولت انتشار propagation الضوء ومبادىء الحركيّات Kinematics الكلاسيكية (التقليدية).

ولقد حُسم هذا التناقض بين نظرية نيوتُن Newton القديمة في الميكانيك والنظرية

الكهرمغنطيسية الجديدة لصالح هذه الأخيرة. ولا عجب في ذلـك لأن الميكانيـك جزء من الفيزياء يخضع دائماً لإمكانية إعادة النظر فيه على ضوء المستجدّات التجريبية، ولا يُبنى على مبادىء معصومة. لذلك أُعيدت صياغة الميكانيك على مفاهيم أكثر دقـة وواقعية لقضايا التطابق الزمني simultaneity والمكان space والزمان time استناداً الى نظرية النسبية الخاصة التي وضعها ألبـرت أينشتاين A. Einstein عـام 1905، بعد أن مهّدت لها أعمال لورنتز Lorentz وبوانكاريـه Poincaré. وتستطيع الحـركيّة المبنيـة على نظـرية أينشتـاين أن تُفسر بطريقـة بسيطة نتـائج بعض التجـارب مثل تجربة فيزو Fizeau المشهورة. ومن جهة ثانية يقبل علم التحريك Dynamics الجديد بمبدأ تعادل الطاقة energy والكتلة mass، متنبئاً بوجود طاقة هائلة مخـزونة داخـل النواة الذَرية.

إن النسبية الخاصة ليست نظرية للمجالات بالمعنى الكامل ولكنها الأساس الذي تُبنى عليه أية نظرية للمجالات سواء أكـانت كلاسيكيـة أم كموميـة quantum. أما نظرية ماكسويل الكهرمغنطيسية التي صيغت قبل 1905، فهي نظرية نسبية أي أنها ذات صيغة متفقة تماماً مـع مبادىء النسبيـة الخاصـة. فقد عُـرفت فعلاً في أوائـل القرن العشرين النظرية الكلاسيكية النسبية الكهـرمغنطيسية. ولم تُعـرف النظريـة الكلاسيكية النسبية لحقل الجـاذبية إلا عـام 1916 عندمـا وضـع أينشتـاين نظريـة النسبية العامة. حتى ذلك التاريخ كانت ظواهر الجاذبية تُفسَّر بقانون نيوتُن للتفـاعل عن بعد، مما أتاح صياغة ميكانيك الفلك بنجاح كبير رغم بعض الاختلافات النـادرة والطفيفة مع التجربة. وأبرز هذه الاختـلافات تقـدّم نقطة الـرأس perihelion لمسار trajectory كوكب عُطارد Mercury.

ولكن نظرية نيوتُن هذه للجاذبية الكونية لا تستند من الناحية المبدئية على نظريةٍ للمجال مبنية على مبدأ وجود فعل action متواصل ينتشر من نقطة الى أخرى. ورغم كل المحاولات فقد بدا أن قانون نيـوتُن لا يُمكن استخلاصـه من أية نظـرية نسبيـة لمجال الجاذبية، خلافاً لقانون كولـون Coulomb لتفاعـل الشِحن الكهربـائية الـذي صيغ على نمط قانون نيوتن للجاذبية والذي يُمكن دمجه في نظرية ماكسويل للمجـال الكهرمغنطيسي.

ولقد استطاع أينشتاين أن يحقق هدفين معاً عنـدما طـرح فرضيـة hypothesis التعادُل المحلّي local لقوة العَطَالـة inertia force وقوة الجـاذبية. فقـد استطاع أولاً تعميم مبدأ النسبية ليشمل هياكل الاسناد المتسارعة accelerating بـدلاً من حصره في هياكل الإسناد العطالية inertial frames (أي مراجـع غاليليـو galileo) كما هـو

الحال في نظرية النسبية الخاصة. واستطاع ثانياً أن يفسر تطابق الكتلة الجاذبية gravitational mass والكتلة العَطَالية inertial mass الذي كان معروفاً تجريبياً دون إيجاد تفسير له.

إن أول نظرية للجاذبية صاغها أينشتاين عام 1911 كانت نظريةً إقليدية Euclidian، ولكنه استطاع أن يُثبت عام 1915 ان استعمال فضاء غير إقليدي يُتيح صياغة بسيطة لمجال الجاذبية متفقةً مع نظرية النسبية، كما أنه يعطي تفسيراً محليًّا لتطابق الكتلة الجاذبية والكتلة العَطَالية. وتصبح بذلك نظرية نيوتن في الجاذبية صيغة تقريبية approximate لنظرية أينشتاين النسبية. أما في الحالة الخاصة لمجال جاذبية جسم كروي فإن نظرية أينشتاين تتيح إزالة التناقضات التي تظهر بين التجربة ونظرية نيوتن في الجاذبية.

حسب نظرية النسبية العامة تشكِّل القوانين النسبية لمجال الجاذبية الشروط التي تخضع لها بُنية structure الفضاء غير الإقليدي، مما يعطي ظواهر الجاذبية التفسير الأبسط والأكثر منهجيّة الذي يمكن تصوره. ولكن هذه الصياغة الهندسية geometrical تعزل الجاذبية بصورة مميَّزة عن بقية الفيزياء وبشكل خاص عن الكهرمغنطيسيَّات Electromagnetics وقد جرت محاولات لصياغة «نظريات موحَّدة Unified» بإيجاد تأويل هندسي مشابه لنظريتَيِ الجاذبية والكهرمغنطيسية. ويكون ذلك بدمج مجال الجاذبية والمجال الكهرمغنطيسي بمجال واحد خاضع لمعادلات تشكِّل الشروط التي تخضع لها بنية فلك غير إقليدي أكثر تعقيداً.

أما إذا أردنا نقل نظرية النسبية الى إطار النظريات الكمومية فإننا سوف نُجابَه بصعوبات كبيرة. فليس هناك حالياً نظرية كمومية مُرضية تماماً لمجال الجاذبية. وقد يكون تكميم quantization حقل الجاذبية غير ممكن. وقد تكون الصياغة الهندسية من الخصائص الحصرية للنسبية العامة. فتكون الجاذبية المستفيدة الوحيدة من هذه الصياغة المميَّزة. أما الظواهر الكهرمغنطيسية أو النَوَوية فتبقى خارج هذا الإطار حتى وإن كانت تحدُث في فضاء غير إقليدي. فهذه الظواهر تخضع لمعادلات خطية linear يمكن بالتالي أن تُطبّق عليها قواعد التكميم العادية.

في الواقع، إن الفصل بين الجاذبية والظواهر الفيزيائية الأخرى ليس أمراً مُرْضياً. فإذا ما تحقَّق هذا الفصل فلا يمكن أن نتنبأ بما ستكون عليه النظرية الشاملة للمجالات، ولكنها ستكون على الأرجح في أحد الاتجاهين التاليين:

ـ تطوير الرياضيات بشكل مناسب مما يتيح تكميم معادلات الجاذبية سواء أكانت

أو لم تكن إقليدية أو خطية. وهذا ما لم يتحقق حتى الآن بصورة مُرضية، ولكن أهمية هذا الاتجاه ستبرز إذا أمكن التنبؤ بنتائج تجريبية يمكن مقارنتها بالواقع. ولكن يظهر أن النتائج لتكميم موجات مجال الجاذبية لا تزال تنظيراً بحتاً. فالفائدة المحتمَلة لهذه الصياغة تبقى منهجية بشكل أساسي. وينطبق هذا على الوسائل التي يمكن أن تعتمدها نظرية كمومية وغير خطية يمكن أن تُصاغ لمجال الجاذبية.

ـ يمكن أن نتفق مع أينشتاين بأن التوصُّل الى نظريةٍ للمجال البحت قد يُعطي تفسيراً لبعض المسائل يكون أكثر عقلانية من بعض المفاهيم الشكلية في غالبيتها التي تتوصل اليها امتدادات النظرية الكمومية. وقد تكون الجُسَيْمات التي هي نقط شاذة (فريدة) singular points في المجال ليست في الواقع منفصلة عن هذا المجال، بل يمكن استنتاج خصائصها وحركتها من معادلات المجال ذاتها. في هذه الحالة تكون الصيغة الدقيقة لهذه المعادلات غير خطية. وحتى إذا ما استطعنا بلوغ هذا الهدف، وهو لا يزال بعيداً حالياً، يبقى علينا أن نجد طريقة لتكميم الحقل المعمَّم أو على الأقل أن نجد تطويراً بديلاً مع بعض إمكانيات النجاح.

لقد أردت أن أُشير هنا الى الآفاق التي تظهر أمام نظرية مجال الجاذبية والصعوبات التي تعترضها. في الواقع إن هدف هذا الكتاب هو أكثر تواضعاً. إذ يكتفي بعرض المبادىء التي ساهمت بتطوير نظريتَيْن مهمّتين للمجالات الكلاسيكية: المجال الكهرمغنطيسي ومجال الجاذبية. وبما أن نظرية ماكسويل للمجال الكهرمغنطيسي هي جذور نظرية النسبية الخاصة، وبما أن النسبية العامة هي المدى الأبعد لنظرية النسبية الخاصة، فإن الكهرمغنطيسية والنسبية تشكِّلان المجموعة الأكثر تناسُقاً وأهمية بين كل النظريات الفيزيائية.

يحتوي هذا الكتاب على ثلاثة أجزاء:

ـ الجزء الأول (الفصول I حتى IV) هو عرض لمبادىء النظرية الكهرمغنطيسية، ويشتمل على عرض مختصر للمعادلات الأساسية وتأويلها حسب نظرية ماكسويل ولورنتز للإلكترونات. وتخلُص نظرية الكهرباء التحريكيّة Electrodynamics للأجسام المتحركة الى الضرورة الملحّة لنظرية النسبية الخاصة.

ـ الجزء الثاني (الفصول V حتى X) يبحث في مبادىء ونتائج النسبية الخاصة. لقد أردنا أن نبين كيف أن صياغة هذه النظرية جاءت تلبيةً لحاجة ماسة في الفيزياء بعد انعدام السبل الأخرى.

ـ الجزء الثالث (الفصول XI حتى XIII) يبحث في مبادىء النسبية العامة

ويتوسّع في بعض النواحي، خصوصاً تلك التي لهـا إثبات تجـريبي والتي تجعل من هذه النظرية نظرية مجالات مميَّزة.

ـ الجزء الأخير (الفصلان XIV و XV) يعرض ملحقاً رياضياً ضرورياً لاستيعاب الجزء الثالث من هذا الكتاب. فهو ليس إذاً تكملة للجزء الثالث بل مساعـدة محتملة لفهمه.

هناك مؤلَّفات عديدة نُشرت في السنوات الأخيرة حول النسبية الخاصة. نحاول في هذا الكتاب وضع تلك النظـرية في إطـارها الصحيـح بين مـا سبقها ومـا تبعها، أي النظرية الكهـرمغنطيسية ونظـرية النسبيـة العامـة. ونهدف أيضـاً الى استخلاص الأفكـار الأساسيـة والأبسط وراء هذه النظـريات والى ربطهـا بالتجـربة. إن أُسس النظريات الكلاسيكية للمجالات تظهر تسلسلاً بديعاً للأفكار يفرضها الواقع وتُوجهِّها صياغة دقيقة وتؤيدها التجارب.

لقد بدا لنـا أنه من الضروري أن نتفحص أصـول وقيمة المبـادىء التي تقود الى الكهـرباء التحـريكيـة الكـلاسيكيـة الحـاليـة من جهـة والى صيـاغـة النظـريـات الموحَّدة للكهرمغنطيسية والجاذبية من جهة أخرى. إن هذه الامتدادات النظـرية لن نتطرق إليها إلا بإيجاز في هذا الكتاب وستكون موضوع أبحاث أخرى.

الجزء الأول

النظرية الكهرمغنطيسية

لقد توالت دراسة الظواهر الكهربائية والمغنطيسية خلال القرن التاسع عشر. قبل ذلك لم تُعرف في الفيزياء إلا قوى الجاذبية الكونيّة التي كان لها تطبيقات واسعة في علم الفلك. ولم تُصَغ بدقة قوانين القوى الكهربائية والمغنطيسية إلا على يد كولون Coulomb وفاراداي Faraday. ثم تبيّن أن هذه القوى تَظهر في مجالات أكثر مما يعتقد. فمن جهة توسّعت الكهرمغنطيسيات لتلتقي مع البصريات. ومن جهة أخرى ظهر أن قوى التفاعل بين الذرات داخل الجُزَيْء molecule أي قوى الارتباط الكيميائي لها أصل كهربائي. ولقد سادت لمدة الفكرة القائلة أن جميع القوى لها جذور كهربائية. ولكن لدلت الظواهر النوويّة على وجود قوى أشد من القوى الكهربائية مع أنها تخضع لبعض القوانين المشابهة للقوانين الكهربائية. رغم ذلك فإن النظرية الكهرمغنطيسية تشمل عدداً كبيراً من الظواهر في الطبيعة.

لقد تطورت المبادىء التي تتحكم بالنظرية الكهرمغنطيسية باستمرار انطلاقاً من مفهوم التفاعل عن بعد الذي أدخله نيوتن في الفيزياء إلى مفهوم المجال الكهرمغنطيسي. ففي نظرية التفاعل عن بعد تتحدّد قوة التفاعل بين الجُسَيمات particles المشحونة كهربائيّاً بمواقع هذه الجُسَيمات فقط. هكذا صيغ قانون كولون. أما بمفهوم المجال الكهرمغنطيسي، فإن القوة المؤثِّرة على جسم اختبار تُحدَّد بالمجال الكهرمغنطيسي بالقرب من هذا الجسم. وهذا المجال لا يمكن تحديده فقط بمواقع وسرع الجُسَيمات المختلفة في الوقت الذي تُقاس فيه القوة المؤثِّرة على جسم الاختبار.

لقد بدأت النظريات التي تستند إلى مبدأ التفاعل عن بعد بالتطوّر بعد تجارب

أورستد Oersted. وصاغ أمبير Ampere قوانين التأثيرات المغنطيسية الناتجة عن تيار current كهربائي، فافترض أن كل جزء من السلك الذي يمر به تيار كهربائي يولِّد قوة مغنطيسية متناسبة مع $1/r^2$ تماماً مثل قوة كولون (قانون بيو Biot وسافار Savart).

وكان دور فاراداي حاسماً بدفع التأثيرات الكهرمغنطيسية نهائيًا لتستند إلى مفهوم المجال الكهرمغنطيسي وذلك عندما أبرز الخصائص المهمة للأجسام الكهربائيّة والمغنطيسيّة والعازلة. فإذا وُضعت هذه الأجسام قرب شِحن كهربائية تجري بداخلها تحولات، حدث فيها استقطاب polarization وساهمت بدورها في تكوين القوى الكهربائيَّة المؤثِّرة على جسم الاختبار. لذلك يجب أن نفترض أن هناك خطوطاً للقوى force lines موجودة داخل الجسم، وأن عدد هذه الخطوط متناسب مع شدة القوة الكهرمغنطيسية. فكل جسم (والفراغ نفسه) عندما تخترقه خطوط القوى هذه يصبح ساحة لمجال كهرمغنطيسي. وقد اقتنع فاراداي عندما اكتشف ظواهر التحريض induction الكهرمغنطيسي عند تغيُّر تدفق المجال المغنطيسي داخل دارة circuit كهربائية أنه يجب أن نعطي خطوط القوى الكهرمغنطيسية معنىً حقيقيًا وملموساً. ثم صاغ غاوس Gauss مبادىء فاراداي بقالَب رياضي، ووضع ماكسويل هذه القوانين بصيغتها النهائية بعد ذلك بثلاثين سنة.

وقد استند ماكسويل إلى أعمال غاوس والصياغة التي أعطاها لابلاس Laplace وبواسون Poisson لقانون كولون للتفاعل عن بعد كي يوضِّح قوانين المجال الكهرمغنطيسي الذي كان يولِيه أهمية كبيرة في الفيزياء. ولكن نظرية ماكسويل تثبت أن التفاعلات الكهرمغنطيسية لا تنتشر بسرعة لا متناهية infinite وقد أكدت التجارب أن هذه السرعة تساوي سرعة الضوء. بذلك تصل نظرية المجالات الكهرمغنطيسية إلى نتيجة مختلفة تماماً عما نتوقع استناداً إلى نظرية التفاعل عن بعد، وهي أن التأثيرات الكهرمغنطيسية على جسم اختبار تُحدَّد بمواقع وسُرع الأجسام الكهربائية الأخرى في وقت سابق لوقت قياس تلك التأثيرات.

وتأخذ نظرية المجالات الكهرمغنطيسية أهمية خاصة لكونها تشمل البصريات بكاملها. فمن المعروف أنه في عصر نيوتن كانت الظواهر الضوئية تُفسَّر استناداً إلى نظرية الجُسَيْمات الضوئية التي اقترحها نيوتن أو في إطار نظرية الموجات الضوئيّة التي اقترحها هيغنز Huygens. في الحقيقة لم تكن تلك التفسيرات منفصلة تماماً. فقد كان نيوتن يعرف ظواهر التدخل interference والانعراج diffraction ويفسرها

بإدخال عنصر يتكرر زمنيًّا في سلوك الجُسيمات الضوئية ذاتها فتمر بحالات مختلفة: حالة انعكاس reflection سهل ثم حالة نفاذ سهل[1] transmission. وقد كان نيوتن يعتقد أنه يجب أن نحافظ على نظرية الجُسَيمات الضوئيّة بغية تفسير الإنتشار المستقيم للضوء وتكوين الظلال.

وتعطي نظرية هيغنز تفسيراً صحيحاً لظواهر انعكاس وإنكسار الضوء وذلك بافتراض تكوين مُوَيْجات wavelets كُرويّة ثانوية تنبثق عن الموجة الكرويّة الأساسية. ولم تُفسَّر ظاهرة الانتشار المستقيم للضوء بطريقة واضحة إلاّ بعد اكتشاف يونغ Young وفرينل Fresnel.

وقد كان فرينل يعتقد أن الضوء لا ينتُج عن اهتزازات vibrations طولية longitudinal كما كان سائداً بل عن اهتزازات عمودية transverse على اتجاه الانتشار. بذلك كان بالإمكان تفسير ظاهرة الإنكسار المزدوج double refraction. لكن وجود هذه الموجات بحد ذاتها يفترض وجود جسم يهتز يسمى الاثير ether. ولكن خصائص هذا الجسم كانت تبدو متناقضة فهو ذو جُسوءٍ rigidity لا متناهٍ، ولكن يسمح للأجسام أن تخترقه بسهولة كبيرة. وعندما بدأ ماكسويل بصياغة نظرية الكهرمغنطيسية كانت البصريات قد وصلت إلى هذا الحد. فجاءت نظريته الاندماجية لتحوِّل البصريات عن إطارها الميكانيكي باهتزاز الأثير إلى اهتزاز المجال الكهرمغنطيسي ذاته. أما الإنتشار المستقيم للضوء فهو نتيجة لكون طول الموجات البصرية قصيرة إلى درجة كبيرة.

وقد كان من المفترض أن يؤدي التوسع في نظرية الكهرباء التحريكية إلى إعادة النظر بمبادىء الحَرَكيّات الكلاسيكية. ويعود الفضل إلى النسبية الخاصة لتوضيح نظرية ماكسويل الكهرمغنطيسية وإعطائها صفتها الحقيقية. أما انتشار الضوء فيأتي كحدود قصوى للحركة في الحَرَكيّات النسبية الجديدة.

كذلك عندما أَوْحت ازدواجيّة طبيعة الضوء وكجُسيمات وموجات إلى لوي دو بروي Louis de Broglie بصياغة ميكانيك الموجات wave mechanics للجُسَيمات الثقيلة، لم يستطع الضوء أن يدخل في هذا الإطار الجديد إلاّ بصعوبة رغم أن

(1) في نظرية ميكانيكية للضوء مثل نظرية نيوتن يمكن أن تكون هذه الحالات المختلفة نتيجة لدوران هذه الجُسَيمات الضوئيّة ذات الشكل البيضوي على نفسها. فتتكرر هذه الحالات بشكل دوري Periodic مع هذه الحركة.

الضوء كان نموذجاً لميكانيك الموجات. فلم تُصَغ النظرية الكمومية والنسبية للفوتونات photons إلا متأخرة، ولم تتمكن الكهرباء التحريكية الكموميّة أن تخضع للقواعد النسبية إلاّ بصعوبة رغم أنها كانت أساس النسبية الخاصة.

تبدو إذن النظريّة الكهرمغنطيسية بالوقت ذاته نقطة ارتكاز ونظريّة فريدة في النظريّات الحديثة للمجالات. سنحصر بحثنا في ما يلي فقط بالتوسُّعات الكلاسيكية (التقليدية) لهذه المبادىء ونتائجها.

الفصل الأول

الكهرباء السكونية
Electrostatics

1 ـ القوانين التجريبية ـ قانون كولون

لقد صاغ كولون Coulomb عام 1780 قانون تفاعل الشحن الكهربائية electric charges عن بعد استناداً إلى التجربة. فأتت قوة التفاعل interaction بين الشحنتين q و q′ بصيغة رياضيّة مشابهة لصيغة قوة الجاذبية بين جسمين كتلتهما m و m′ كما صاغها نيوتن أي متناسبة عكسيًّا مع مربع المسافة الفاصلة بينهما. فتكون شدّة هذه القوة في الفراغ:

$$F = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{qq'}{r^2} \qquad \text{(I-1)}$$

حيث ϵ_0 هي ثابت constant تُحدَّد قيمته تجريبيًّا وتتغير تبعاً للوحدة unit المستعمَلة لقياس الشِحنة الكهربائية.

إن القوى التي هي بهذه الصيغة يمكن دائماً ربطها بدالّة عددية scalar function.

$$V' = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{q'}{r} \qquad \text{(I-2)}$$

نسميها دالة الكمون الكهربائي electric potential الذي تكوّنه الشِحنة q′. فتكون القوة المؤثرة على الشحنة q.

$$F = -\, q \,\text{grad}\, V' \qquad \text{(I-3)}$$

ويكون تأثير شِحن كهربائية عديدة $q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}$ على شِحنة الاختبار q بقوة

$$F = -q \text{ grad } V' \qquad \text{(I-4)}$$

حيث دالة الكمون لهذه الشِحن هي

$$V' = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{q_i}{r_i} \qquad \text{(I-5)}$$

و $\sqrt{\sum_p (x_p - x_p^{(i)})(x_p - x_p^{(i)})}$ وهي المسافة الفاصلة بين كلٍّ من الشِحن q_i الموجودة في النقطة ذات الإحداثيات $(x_p^{(i)})$ وشِحنة الاختبار q الموجودة في النُقطة ذات الإحداثيّات x_p (حيث $p = 1, 2, 3, \ldots$).

إن دالّة الكمون V' والمتجه grad V' Vector ـ تتعلق بموقع شِحنة الاختبار q ولكن V' لا تشمل الكمون الكهربائي الذي تكوِّنه الشحنة q ذاتها. وهو لا متناهٍ في موقع هذه الشِحنة x_p.

بشكل عام إذا كان هناك عدد من الشِحن الكهربائيّة q_i تكون دالّة الكمون الكهربائي

$$\boxed{V = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{1}^{n} \frac{q_i}{r_i}} \qquad \text{(I-6)}$$

ويكون المجال الكهربائي

$$\boxed{E = -\text{ grad } V} \qquad \text{(I-7)}$$

بحيث تكون القوة المؤثرة على شِحنة اختبار q موضوعة في هذا الموقع(1)

$$\boxed{F = q E} \qquad \text{(I-8)}$$

---

(1) في الحقيقة أن دالّة الكُمون V في المعادلة (I-6) والدالة V' في المعادلة (I-5) ليستا متساويتين. وكذلك المجالان E و E' المحسوبان من هاتين الدالّتين. وذلك لأن الدالّة V تعني الكُمون الذي تولّده جميع الشِحن الكهربائية. بينما V' تعني كُمون جميع الشِحن ما عدا الشِحنة المتواجدة في النقطة حيث يُحسب الكُمون. إن كُمون هذه الشحنة لا متناهي فيكون الكُمون V لا متناهيًا ايضا. بينما V' هو =

أما إذا كانت الشِحن الكهربائيّة موزَّعة توزيعاً متواصلاً داخل $\mathcal{V}$ فنأخذ حجماً صغيراً $d\mathcal{V} = d\xi\, d\eta\, d\zeta$، حول النقطة M ذات الاحداثيات (ζ, η, ξ) ونستبدل عند حساب دالّة الكمون الكهربائي الشِحنة q_i بالشِحنة $\rho d\mathcal{V}$ الذي يحتويها الحجم $d\mathcal{V}$. وترمز $\rho\,(\xi, \eta, \zeta)$ إلى الكثافة الحجميّة volumic density للشِحن الكهربائية في النقطة $M\,(\xi, \eta, \zeta)$. فإذا كانت r هي المسافة الفاصلة بين النقطة M والنقطة $\rho\,(x, y, z)$ حيث يُحسب الكمون، يجب أن نستبدل القوة (I-8) بكثافة القوة الكهربائية

$$F = \rho\, E = -\, \rho\, \text{grad}\, V \qquad \text{(I-9)}$$

حيث تُحدَّد دالّة الكمون بالصيغة

$$V = \frac{1}{\epsilon_0} \int \frac{\rho}{r} d\mathcal{V} \qquad \text{(I-10)}$$

2 ـ القوانين العامة للكهرباء السكونيّة

من الممكن أن نستبدل قانون كولون للتفاعل عن بعد بالمعادلات (I-9) و(I-10) التي تدخل مفاهيم المجال والكمون الكهربائيين. ومن هاتين الصيغتين يمكن أن نستنتج القوانين الأساسيّة للكهرباء السكونيّة. ولكن هذه الطريقة تخالف الفكرة العامة التي هي وراء نظرية ماكسويل التي تستبعد التفاعل عن بعد ولا تقبل إلّا بالتفاعل المحلي. إن نظرية ماكسويل تستند إلى خصائص الوسط التي تجري فيه

= دائما متناه. لذلك لا يُمكن أن نقول إنّ V و ′V تختلفان بكميات ضئيلة ولا يمكن إستبدال الواحدة بالأخرى. لكن عمليًا لا يمكننا أن نعرف موقع الشِحن الكهربائية إلا بصورة تقريبيّة. ولا يمكن أن نُحدِّد إلّا القيمة الوسطيّة mean value لدالّة الكُمون. فإذا أخذنا حجماً صغيراً $d\mathcal{V}$ حول الشِحنة الكهربائية النقطية تكون القيمة الوسطيّة للكُمون الذي تخلفه هذه الشِحنة:

$$\frac{1}{\epsilon_0 \mathcal{V}} \int_0^R \frac{q}{r}\, d\mathcal{V} = \frac{3}{4\epsilon_0 \pi R^3} \int_0^R \frac{q}{r}\, 4\pi r^2\, dr = \frac{3}{2\epsilon_0} \frac{e}{R}.$$

وتكون مساهمة هذه الشِحنة الكهربائية في الكُمون الكهربائي العام صغيرة جداً إذا اتفقنا على تحديد الكُمون والمجال الكهربائيين فقط خارج كُرة شعاعها R حول الشِحنة الكهربائيّة النُقطيّة.

الظواهر الكهربائية أي الأثير والأجسام الكهرنافذة dielectrics ولكن التفاعل المحلي لا يُصاغ إلاّ بعلاقات رياضيّة محليّة بشكل معادلاتٍ تفاضليّة جُـزْئية partial differential equations . لذلك يجب استبدال الصيغة (I-10) لدالّة الكمون بتحديد تَدْخل فيه المعطيات المحلية فقط. فنحصل هكذا على معادلات تفاضلية جُزْئية صالحة في كل الحالات، وتدخل فيها كميات لها معنى فيزيائي.

كما يمكن أن نستخرج من هذه المعادلات التفاضلية الجزئية معادلات تكاملية integral equations تتفق مع نتائج نظرية التفاعل عن بعد في بعض الحالات الخاصة مثل حالة السكون الكهربائي. هكذا يمكن أن نستنتج قانون كولون مثلاً من المعادلات التفاضلية الجزئية للمجال الكهربائي. ولكن نظرية التفاعل عن بعد لا تعتبر صحيحة إلا إذا كانت متفقة مع نظرية ماكسويل، أي إذا كانت صيغ التفاعل عن بعد تتفق مع الصيغ التكاملية التي يمكن استخلاصها من المعادلات المحلية لنظرية المجالات. لذلك يجب الإنطلاق دائماً من المعادلات المحلية للمجال الكهرمغنطيسي.

وفقاً للمبدأ الأساسي لنظرية ماكسويل، يُحدث توزيع الشحن الكهربائية تغييراً في الفضاء المحيط بها، ويكون ذلك بتكوين المجال الكهربائي المحدد بالمتّجه E المماس لخط القوى في كل نقطة من الفضاء. أما القوة التي تؤثر على شحنة الاختبار q فهي:

$$F = qE \tag{I-8}$$

نشير الى أن q هي من مميزات شحنة الاختبار أما E فهو من خصائص الأجسام الأخرى. إستناداً الى هذه المعادلة يمكن أن نحدد المجال الكهربائي لمجموعة من الأجسام في نقطة معينة من الفضاء بأنه القوة التي تؤثر على وحدة الشحن الكهربائية الموضوعة ساكنة في هذه النقطة.

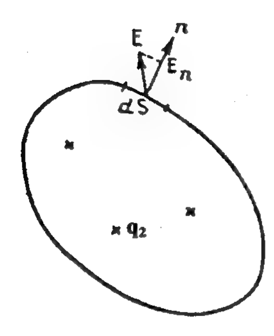
3 ـ قانون غاوس

لنفترض أن S هو سطح surface مغلق وأن dS هو جزء تفاضلي من هذا السطح. ليكن n متّجه الوحدة unit vector العمودي على dS باتجاه خارج السطح. نحدد التدفق $d\Phi$ للمجال الكهربائي E على dS بأنه $E_n\, dS$ أي حاصل ضرب مساحة السطح التفاضلي dS بإسقاط المجال الكهربائي E_n على متجه الوحدة n في النقطة الوسطية من dS.

مبرهَنة غاوس: إن تدفق المجال الكهربائي على السطح المغلق S المحيط بالحجم

$\mathcal{V}$ متناسب مع مجموع الشحن الكهربائية q_i بداخله.

$$\int E_n\, dS = \frac{4\pi}{\epsilon_0} \sum_1 qi \qquad \text{(I-11)}$$



الشكل 1 ـ تدفق المجال الكهربائي على سطح مغلق

يحدِّد الثابت ϵ_0 دون التباس وحدة قياس الشحنة الكهربائية q. فإذا اخترنا $\epsilon_0 = 1$ نحصل على ما يسمى نظام الوحدات الكهربائية السكونية electrostatic system of units الذي يسهِّل كتابة كثير من الصيغ(2).

أما إذا كانت الشحن الكهربائية موزعة توزيعاً متواصلاً بكثافة حجمية ρ فيصبح قانون غاوس

$$\int_s E_n\, dS = \frac{4\pi}{\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \rho d\mathcal{V} \qquad \text{(I-12)}$$

ولكن قاعدة غرين Green الرياضية تتيح لنا أن نكتب

$$\int_s E_n dS = \int_{\mathcal{V}} \text{div}\, E\, d\mathcal{V} \qquad \text{(I-13)}$$

فيَتخذ قانون غاوس الصيغة المحلية:

$$\text{div.}\, E = \frac{4\pi}{\epsilon_0}\, \rho \qquad \text{(I-14)}$$

---

(2) يُسَهِّل هذا النظام للوَحدات بشكل خاص كتابة المعادلات في حالة التناظر الكُروي spherical symmetry.

نشير هنا الى أن قانون غاوس هو قانون تجريبي يمكن التأكد من صحته مباشرة بقياس الشحن الكهربائية بواسطة اسطوانة فاراداي، والمجال الكهربائي بواسطة شحنة اختبار. والأهم من ذلك أن صحة هذا القانون مثبتة بإتفاق جميع نتائجه مع التجربة ومنها طبعاً قانون كولون.

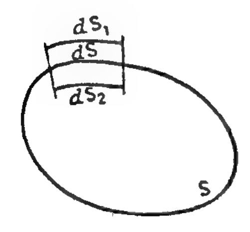
4 ـ تطبيقات: المجال الكهربائي على سطوح المعادن والضغط الكهربائي.

لنفترض أن الشحن الكهربائية موزعة على سطح بكثافة سطحية σ (أي الشحنة الكهربائية في وحدة المساحة). لنكتب قانون غاوس على أسطوانة Σ قاعدتاها سطحان تفاضليان dS_1 و dS_2 يقعان على جهتي الجزء التفاضلي dS من السطح المكهرب، وسطحها الجانبي عمودي على السطح المكهرب (أنظر الرسم 2) فنجد

$$\int_{\Sigma} E_n \, d\Sigma = \int_S (E_{n1} + E_{n2}) \, dS = \frac{4\pi}{\epsilon_0} \int_S \sigma dS \tag{I-15}$$

مما يعطي القاعدة

$$E_{n1} + E_{n2} = \frac{4\pi}{\epsilon_0} \sigma. \tag{I-16}$$



الشكل 2 ـ المجال الكهربائي على سطح معدن

يمكن أن نميز في تطبيق هذه القاعدة بين الحالات التالية:

أ ـ إذا كان السطح المكهرب سطح معدن في حالة التوازن الكهربائي يكون المجال الكهربائي منعدماً داخل المعدن أي $E_{n1} = 0$. فيكون المجال الكهربائي خارج المعدن وبالقرب منه عمودياً على السطح وبشدة.

$$E = \frac{4\pi\sigma}{\epsilon_0} \, . \tag{I-17}$$

ب ـ إذا كان الجزء dS من السطح نافذة صغيرة في سطح معدن أجوف يكون

المجـال متواصـلاً أي $E_{n1} = E_{n2}$ لأن الكثافـة σ منعـدمـة. ممـا يعني أن المجـال الكهربائي داخل النافذة وخارجها هو بشدة

$$E' = \frac{2\pi\sigma}{\epsilon_0} \qquad \text{(I-18)}$$

ج ـ لنتصور أن الجزء dS من سطح معدني مكهرب S قد فصل عن بقية السطح المغلق ولكنه أُبقي في مكانـه. المجال الكهـربائي الإجمـالي (I-17) بالقـرب من dS هو مجموع المجال E'' للسطح التفاضلي dS والمجال E' لبقية السطح والمحدد بالصيغـة (I-18) ممـا يعني أن المجالـين E' و E'' هما بشـدة واحدة وبـاتجاه واحـد خـارج السطح ولكنهما متعاكسان بداخله.

$$E' = E'' = \frac{2\pi\sigma}{\epsilon_0} \qquad \text{(I-19)}$$

وتكون القوة الكهربائيّة dF التي تؤثر على الجزء dS الذي يحمل شحنـة الإختبار σdS ناتجة عن المجال E' فقط أي أنها

$$dF = \frac{2\pi\sigma}{\epsilon_0} \,.\, \sigma dS. \qquad \text{(I-20)}$$

مما يعني أن هناك ضغطاً كهربائياً[3]:

$$p = \frac{dF}{dS} = \frac{2\pi\sigma^2}{\epsilon_0} \qquad \text{(I-21)}$$

فإذا قيس هذا الضغط بطريقة ميكانيكية يمكن أن نحدد قيمة المجال الكهربـائي E بالوحدات الكهربائية السكونية ($\epsilon_0 = 1$). هـذا هو مبـدأ جهاز مقيـاس الكهربـاء المطلق absolute electrometer الذي ابتدعه لورد كلفن Lord Kelvin.

5 ـ القانون الثاني ـ تحديد الكمون الكهربائي

إذا تحرك جسم اختبار مشحون على مسار مغلق في مجال كهـربائي يحصـل على شغل work:

$$W = q \int E_1 \, dl \qquad \text{(I-22)}$$

(3) نُشير إلى ان هذا الضغط هو نحو خارج الجِسم المُكهرب.

حيث E_1 هو إسقاط المجال الكهربائي باتجاه الحركة.

ولكن بما أن المسار مغلق يكون هذا الشغل منعدماً أي:

$$W = 0 \qquad \text{(I-23)}$$

لأيِّ مسار مغلق. وهذا يعني أن الشغل الذي تحصل عليه الشحنة الكهربائية بين نقطتين ثابتتين لا تتغير قيمته بتغيير المسار الذي يسلكه الجسم بين هاتين النقطتين. وهذا يعني أيضاً أن الشغل dW بين نقطتين قريبتين هو تفاضلية كاملة total differential. والشرط الضروري والكافي لذلك هو:

$$\boxed{\text{curl } E = 0} \qquad \text{(I-24)}$$

ومن المعروف في الرياضيات أن المجال E الذي يخضع لهذه المعادلة هو تدرج gradient دالّة عددية تسمى الكمون الكهربائي V (x y z).

$$\boxed{E = -\text{ grad } V} \qquad \text{(I-25)}$$

فإذا قابلنا المعادلتين (I-14) و (I-25) نحصل على معادلة بواسون Poisson.

$$\boxed{\Delta V = -\frac{4\pi}{\epsilon_0}\rho} \qquad \text{(I-26)}$$

حيث Δ هي مؤثر operator لابلاس وصيغته في الإحداثيات الديكارتية Cartesian هي:

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad \text{(I-27)}$$

أما في حال عدم وجود شحن كهربائية، فتنعدم الكثافة ρ وتصبح معادلة بواسون معادلة لابلاس.

$$\boxed{\Delta V = 0} \qquad \text{(I-28)}$$

6 ـ حلول معادلة لابلاس ومعادلة بواسون

هناك عدد غير محدود من الحلول الممكنة للمعادلات التفاضلية الجزئية مثل معادلات لابلاس وبواسون. فالحل العام لمعادلة بواسون هو مجموع حل خاص للمعادلة الكاملة والحل العام لهذه المعادلة دون جانب ثان أيْ معادلة لابلاس. فإذا كان هذا الحل العام يحتوي على عدد كاف من الثوابت الإختيارية يمكن أن نختار هذه الثوابت لإخضاع الحل لبعض الشروط الحدِّية boundary conditions.

أ ـ الحل الخاص لمعادلة بواسون

لنفترض أن S هو سطح يحدّ حجماً $\mathcal{V}$ ولنطبق قاعدة غرين الرياضية لمتجه اختياري F فنجد

$$\int_S F_n \, dS = \int_{\mathcal{V}} \text{div. } F \, d\mathcal{V}. \qquad \text{(I-29)}$$

فإذا إخترنا متجِها F بالصيغة

$$F = \varphi \text{ grad } \psi - \psi \text{ grad } \varphi.$$

حيث ψ و φ دالتان عدديتان إختياريتان نجد:

$$\int_S (\varphi \text{ grad}_n \psi - \psi \text{ grad}_n \varphi) \, dS = \int_{\mathcal{V}} (\varphi \, \Delta \psi - \psi \, \Delta \varphi) \, d\mathcal{V} \qquad \text{(I-30)}$$

وبشكل خاص إذا وضعنا $\psi = \frac{1}{r}$ نجد

$$\int \left(\varphi \text{ grad}_n \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \text{ grad}_n \varphi\right) dS = -\int_{\mathcal{V}} \frac{\Delta\varphi}{r} \, d\mathcal{V} \qquad \text{(I-31)}$$

حيث أخذنا بعين الاعتبار أن:

$$\Delta \psi = \Delta\left(\frac{1}{r}\right) = 0.$$

لنفترض الآن أن السطح S المحيط بالحجم $\mathcal{V}$ هو كرة صغيرة مركزها في النقطة P وشعاعها R ولنحسب التكامل (I-31) على الحجم الذي هو خارج الكرة فنجد:

$$\int_R^{\infty} -\left(\frac{\varphi}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial r}\right) dS = -\int_{\mathcal{V}} \frac{\Delta\varphi}{r} \, d\mathcal{V}. \qquad \text{(I-32)}$$

وإذا كانت $\bar{\varphi}$ و $\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial r}$ هي القيم الوسطية للدوالّ φ و $\frac{\partial\varphi}{\partial r}$ على سطح الكرةيمكن أن نكتب

$$\left[\frac{\bar{\varphi}}{R^2} + \frac{1}{R}\left(\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial r}\right)\right]\int_S dS = -\int_{\mathcal{V}} \frac{\Delta\varphi}{r}\, d\mathcal{V} \qquad \text{(I-33)}$$

أي:

$$4\pi\bar{\varphi} + 4\pi R\left(\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial r}\right) = -\int_{\mathcal{V}} \frac{\Delta\varphi}{r}\, d\mathcal{V} \qquad \text{(I-34)}$$

واذا كانت φ هي دالّة الكمون V وفي حدود إنعدام شُعاع الكرة R تصبح $\bar{\varphi}$ مساوية تقريباً لقيمة الكمون V في النقطة P مما يعني أن:

$$4\pi V = -\int \frac{\Delta V}{r}\, d\mathcal{V} \qquad \text{(I-35)}$$

فإذا إفترضنا الآن أن دالّة الكمون تخضع لمعادلة بواسون (I-26) خارج الكرة نجد الصيغة (I-10) أي:

$$V = \frac{1}{\epsilon_0}\int \frac{\rho}{r}\, d\mathcal{V} \qquad \text{(I-36)}$$

ب ـ لكتابة الحل العام لمعادلة لابلاس من المناسب أن نكتب هذه المعادلة في الإحداثيات الكروية فنجد:

$$\Delta\psi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} = 0 \qquad \text{(I-37)}$$

حيث تحدّد الإحداثيات الكروية بما يلي:

$$x = r\sin\theta\sin\varphi \quad y = r\sin\theta\cos\varphi \quad x = r\cos\theta \qquad \text{(I-38)}$$

يمكن كتابة الحل العام للمعادلة (I-37) كحاصل ضرب (جداء) ثلاثة دوالّ بالمتغيرات r و θ و φ فنجد

$$\psi = \left(ar^{\ell} + \frac{b}{r^{\ell+1}}\right)P_{\ell}^{m}(\cos\theta)\,(C\sin m\varphi + D\cos m\varphi) \qquad \text{(I-39)}$$

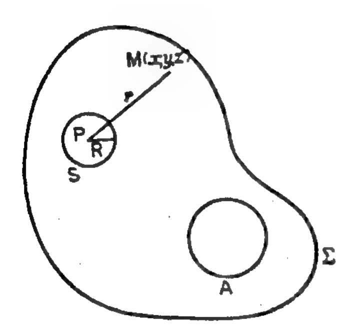
حيث a و b و C و D ثوابت تكامل والدّوال $P_{\ell}^{m}(\cos\theta)$ هي دوال لوجندر Legendre المتعددة الحدود. والحلول الأبسط هي:

$$\text{(I-40)} \qquad \text{pour } \iota = 0 \quad m = 0, \quad \psi = a + \frac{b}{r}$$

$$\text{(I-41)} \qquad \text{pour } \iota = 1 \quad m = 0, \quad \psi = \left(ar + \frac{b}{r_2}\right) \cos\theta.$$

7 ـ معادلات بواسون والشروط الحدّية

تحدد الصيغة (I-36) دالة الكمون الكهربائي في أية نقطة $P(\xi, \eta, \zeta)$ تبعاً للشحن الكهربائية الموزعة بكثافة ρ في منطقة غير محددة. ويمكن بطريقة مماثلة أن نحسب دالة الكمون في نقطة ثابتة $P(\xi, \eta, \zeta)$ إذا كانت الشحن الكهربائية موزعة في منطقة يحدها سطح Σ مرسوم داخل معدن. لنفترض أن هناك عدداً من الأجسام المعدنية مثل A (انظر الرسم 3) ولتكن r المسافة بين النقطة P حيث نحسب الكمون الى النقطة المتجولة $M(x, y, z)$.



الشكل 3 ـ الجهد الكهربائي في نقطة P داخل منطقة يحدها السطح Σ.

لنحيط النقطة P بكرة صغيرة S شعاعها R. تبقى قاعدة غرين (I-29) مع الدالة $\psi = \frac{1}{r}$ صالحة في هذه الحالة وكذلك الصيغة (I-31) التي تكتب كما يلي:

$$\text{(I-42)} \qquad \int_S \left(\varphi \operatorname{grad}_n \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \operatorname{grad}_n \varphi\right) dS = -\int_{\mathcal{V}} \frac{\Delta\varphi}{r} \, d\mathcal{V}$$

ولكن في هذه الحالة يجب أن نحصر حساب التكامل في الحجم الذي هو داخل السطح Σ ما عد الكرة S المحيطة بالنقطة P حيث نحسب دالة الكمون. فإذا كانت الدالة φ تخضع لمعادلة بواسون داخل المعدن نجد للجنب الأيمن من المعادلة (I-42):

$$\text{(I-43)} \qquad -\int_{\mathcal{V}} \frac{\Delta\varphi}{r} \, d\mathcal{V} = \frac{4\pi}{\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho}{r} \, d\mathcal{V}$$

أما التكامل في الجنب الأيسر فيجب حسابه على السطوح التالية:

1 ـ السطح S المحيط بالنقطة P: نجد في الحدود $R \to 0$ كما في المقطع السابق:

$$\int_S \left(\varphi \operatorname{grad}_n \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \operatorname{grad}_n \varphi\right) dS \to 4\pi V. \quad \text{(I-44)}$$

2 ـ على سطح المعدن A: لنفترض أن على هذا السطح:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{4\pi\sigma}{\epsilon_0} \quad \text{(I-45)}$$

حيث n هو متّجِه الوحدة العمودي على سطح المعدن باتجاه الخارج. نشير هنا الى أن الكمون متساوٍ على سطح المعدن حسب قواعد التوازن الكهربائي في المعادن. لتكن V_A قيمةً الكمون φ على السطح A فنجد:

$$\int_S \left(\varphi \operatorname{grad}_n \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \operatorname{grad}_n \varphi\right) dS = - V_A \int_\Omega d\Omega - \frac{4\pi}{\epsilon_0} \int \frac{\sigma}{r} dS \quad \text{(I-46)}$$

حيث:

$$\int_\Omega d\Omega = - \int_S \operatorname{grad}_n \frac{1}{r} \cdot dS = \int_S \frac{dS}{r^2} \cos\theta \; (\theta = \widehat{r, n}) \quad \text{(I-47)}$$

Ω هي الزاوية المجسمة التي يرى بها الجسم المعدني A من النقطة M. فإذا كانت النقطة M خارج المعدن تنعدم هذه الزاوية المجسمة.

3 ـ على السطح الحدي Σ: نجد في هذه الحالة صيغة مشابهة للمعادلة (I-46) ولكن النقطة M هي الآن داخلَ Σ فتكون الزاوية المجسمة.

$$\Omega = - \int_S \operatorname{grad}_n \frac{1}{r} dS = 4\pi \quad \text{(I-48)}$$

ومن جهة ثانية إذا كانت دالة الكمون على السطح ثابتة بقيمة V_0 نجد

$$\int \left(\varphi \operatorname{grad}_n \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \operatorname{grad}_n \varphi\right) dS = 4\pi V_0 - \frac{4\pi}{\epsilon_0} \int \frac{\sigma_0}{r} dS \quad \text{(I-49)}$$

ولكن $\frac{4\pi\sigma_0}{\epsilon_0} = \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_0 = 0$ فإذا وضعنا $V_0 = 0$ واحللنا الصيغة (I-43) في الجنب الأيمن للمعادلة (I-42) ثم الصيغ (I-44) و (I-46) و (I-49) في الجانب الأيسر للمعادلة ذاتها (I-42) نجد

$$\boxed{V = \frac{1}{\epsilon_0} \int \frac{\rho}{r} d\mathcal{V} + \frac{1}{\epsilon_0} \int \frac{\sigma}{r} dS} \quad \text{(I-50)}$$

فإذا لم تكن هناك شحن كهربائية داخل المعدن $(\rho = 0)$ يمكن أن نكتب

$$V = \frac{1}{\epsilon_0} \int \frac{\sigma}{r} \, dS \qquad \text{(I-51)}$$

وأخيراً إذا كانت الأجسام المعدنية صغيرة بحيث لا تتغير عملياً المسافة بين النقطة P، حيث نحسب الكمون، ونقطة متجولة من الجسم المعدني، يمكن أن نكتب

$$V = \frac{1}{\epsilon_0} \Sigma_i \frac{q_i}{r_i} \qquad E = -\text{grad } V = \frac{1}{\epsilon_0} \Sigma_i \frac{q_i}{r_i} \qquad \text{(I-52)}$$

في هذه الحالة إذا وضع جسم اختبار شحنته q' في النقطة P يخضع لقوة ميكانيكيّة

$$\boxed{F = q' E = \frac{1}{\epsilon_0} q' \Sigma_i \frac{q_i}{r_i^2}} \qquad \text{(I-53)}$$

هكذا نستنتج قانون كولون من التحديد (I-50) أي بطريقة غير مباشرة من قانون غاوس. ويعني هذا أنه من الممكن إستخلاص قانون كولون دون افتراض وجود جسيمات نقطية ومنفصلة عن بعضها ومولدة الفعل عن بعد.

تاريخياً استُخلص قانون غاوس من قانون كولون، وكذلك استُخلصت جميع القوانين الأساسية للكهرباء السكونية. هكذا نجد أن أكثر المؤلفين «يثبتون» قانون غاوس انطلاقاً من فرضية وجود مجال كهربائي $E = \frac{q}{r^2}$ مستخلص من قانون كولون. أما نحن فنعتبر أن المعادلة (I-12) هي القانون العام المثبت تجريبياً بذاته وبكل نتائجه ولكن لا يمكن إثباته. أما المعادلة (I-14) فهي الصيغة المحلية لهذا القانون ومنها نستخلص قانون كولون في الحالات الخاصة التالية:

1 ـ إذا إستطعنا كتابة صِيغ تكاملية مثل (I-50) في حالة الكهرباء السكونية.
2 ـ في حالة الشحن الكهربائية المتناهية الصغر.

8 ـ تطبيقات

1 ـ الكمون الكهربائي الذي تكوّنه كرة معدنية موصّلة الى الأرض وموضوعة في مجال كهربائي خارجي:

لنفترض أن كرة معدنية شعاعها R موصلة الى الأرض grounded (أو الكتلة) وموضوعة في مجال كهربائي E متسق uniform. لنأخذ المحور Oz باتجاه هذا

المجال. ولنكتب الحل (I-41) لمعادلة لابلاس في الحالة الخاصة $m = 0$، $l = m$.

$$\psi = \left(ar + \frac{b}{r^2}\right)\cos\theta \qquad \text{(I-54)}$$

نحدد الثابتين a و b بفرض الشروط الحدية المناسبة لهذه المسألة. فعلى مسافة بعيدة عن الكرة $(r \to \infty)$ يكون المجال الكهربائي.

$$E = -\,\text{grad}\, V = -\frac{\partial V}{\partial z} \qquad \text{(I-55)}$$

مما يعني أن

$$V = -Ez = -Er\cos\theta \quad , a = -E. \qquad \text{(I-56)}$$

أما على الكرة فيكون الكمون:

$$V = 0 \qquad \text{(I-57)}$$

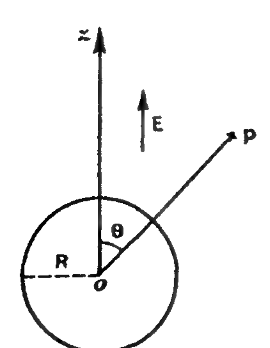
مما يعني إذا استعملنا (I-54) أن

$$-ER + \frac{b}{R^2} = 0, \quad b = ER^3.$$

فيكون الكمون في النقطة P

$$V = -\left(r - \frac{R^3}{r^2}\right)E\cos\theta, \qquad \text{(I-58)}$$

حلاً لمعادلة لابلاس خاضعاً للشروط الحدية المفروضة.



الشكل 4 ـ كمون كرة ناقلة موضوعة في مجال كهربائي خارجي

2 ـ عزم ثنائي القُطب الكهربائي Electric dipole moment

لنحسب الكمـون الكهربـائي الذي يكـوِّنه في نقطـة P ثنائي القطب (+ q, − q). نختار المحور Oz باتجاه ثنائي القطب هذا (انظر الرسم 5) فنجد:

$$V = \frac{q}{\epsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r + d\cos\theta}\right) \qquad \text{(I-59)}$$

أو

$$V \simeq \frac{q\,d}{\epsilon_0 r^2}\cos\theta \simeq -\frac{m_e}{\epsilon_0}\,\mathrm{grad}_n\left(\frac{1}{r}\right) \quad , \quad m_e = qd \qquad \text{(I-60)}$$

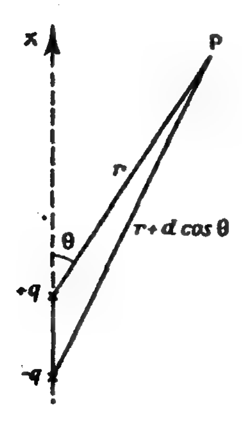
وإذا افترضنا أن المسافة d بين القطبين صغيرة بالمقارنة مع المسافـة r الفاصلـة بين الثنائي والنقطة n.P هو متجِه الوحدة باتجاه الثنائي و m_e هو عزم ثنائي القطب الكهربائي.

أما إذا كان ثنائي القطب موضوعاً في مجـال كهربـائي متسق E باتجـاه الثنائي فيكون الكمون الكهربائي الإجمالي للثنائي وللمجال الخارجي

$$V = -\left(r - \frac{m_e}{\epsilon_0 r^2 E}\right)E\cos\theta \qquad \text{(I-61)}$$

إذ يضاف الى كمون الثنـائي (I-60) كمون المجـال الخارجي $- r\,E\cos\theta$، نشـير هنا إلى أن الصيغة (I-61) تشبه الحل (I-41) لمعادلة لابلاس إذا وضعنا

$$a = -E \quad , \quad b = \frac{m_e}{\epsilon_0} = q\frac{d}{\epsilon_0}\ . \qquad \text{(I-62)}$$



الشكل 5 ـ مجال ثنائي القطب

وإذا قابلنا هذه النتيجة مع الصيغة (I-57) نستنتج أن الكرة الموصَّلة الى الأرض والموضوعة في مجال كهربائي خارجي متسق تكون كموناً كهربائياً على مسافة بعيدة عنها تماماً كأنها ثنائي القطب بعزم $m_e = qd$ متناسب مع E

$$m_e = \epsilon_0 R^3 E = \alpha E \quad , \quad \alpha = \epsilon_0 R^3 \tag{I-63}$$

مما يعني أن الكرة الموصَّلة الى الأرض والموضوعة في المجال الكهربائي الخارجي تُكتب عزماً ثنائياً كهربائياً. نقول إنها تصبح مستقطَبة polarized بعَزم $qd = \epsilon_0 R^3 E$.

9 ـ الأجسام الكهرنافذة

لقد أثبتت تجارب فاراداي عام 1831 أن فرق الكمون للوحتيْ مكثِّف كهربائي plates of a capacitor تقل إذا ما استبدلنا الهواء الفاصل بينهما بجسم كهرنافذ. مما يعني أن سعة capacity المكثِّف تزداد. لذلك يمكن أن نحدد عاملاً factor خاصاً لكل جسم كهرنافذ $(x_e > 1)$ وهو نسبة ثابت الكهرنافذية ϵ للجسم الى ثابت كهرنافذية الخلاء ϵ_0.

$$x_e = \frac{\text{ثابت كهرنافذية الجسم}}{\text{ثابت كهرنافذية الخلاء}} = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \tag{I-64}$$

إذا حصلت الظواهر الكهربائية في أجسام كهرنافذة بدلاً من الخلاء يجب تعديل القوانين العامة كما يلي:

ـ إستناداً الى تجارب فاراداي يجب تعديل القانون الأول الذي يعبِّر عن المحافظة على تدفق المجال الكهربائي. غير أنه من الممكن أن نفترض وجود مجال جديد D يخضع في الأجسام الكهرنافذة للقانون ذاته الذي يخضع له المجال E في الخلاء أي:

$$\int_S D_n \, dS = 4\pi \int_{\mathcal{V}} \rho \, d\mathcal{V} \tag{I-65}$$

مما يعني أيضاً الصيغة المحلية:

$$\boxed{\text{div. } D = 4\,\pi\,\rho} \tag{I-66}$$

ويرتبط المجال D بالمجال E بالعلاقة

$$D = \epsilon E \tag{I-67}$$

وذلك لأن المجال الكهربائي بين لوحتيْ مكثِّف يفصل بينهما الجسم الكهرنافذ يقل بنسبة ϵ عن المجال بين لوحتي المكثف ذاته إذا كان يحمل الشحنة الكهربائية ذاتها ولا يحتوي على الجسم الكهرنافذ.

ـ أما القانون الثاني (الذي يعبِّر عن أن شغل القوى الكهربائية على شحنة تنتقل بين نقطتين ثابتتين لا يختلف من مسار الى آخر بين هاتين النقطتين) فيبقى صالحاً في حال وجود أجسام كهرنافذة. مما يعني أن المجال الكهربائي E يخضع سواء في الخلاء أو في الأجسام الكهرنافذة للقانون.

$$\text{curl } E = 0 \tag{I-68}$$

الذي يعني أيضاً أن:

$$E = -\text{ grad } V \tag{I-69}$$

ويسمى المجال D عادة مجال التحريض الكهربائي. وقد كان ماكسويل يسميه مجال الإزاحة displacement الكهربائي وذلك للشبه بين هذه الظواهر الكهربائية ونظرية المرونة (elasticity) في الأجسام الصلبة إذ إن القوة E′ (المشابهة للمجال الكهربائي E) والإزاحة D′ (المشابهة لمجال الازاحة الكهربائي D) يرتبطان بعلاقة مشابهة للمعادلة (I-67) مع استبدال الثابت ϵ بعكس معامل المرونة elasticity coefficient.

ونستنتج من العلاقة (I-66) أن

$$\text{div}.\epsilon E = 4\pi\rho \tag{I-70}$$

أي

$$\text{div}.\ \epsilon \frac{\partial V}{\partial n} = -4\pi\rho \tag{I-71}$$

فإذا قابلنا هذه النتائج مع العلاقات (I-50) و (I-53) و (I-21) نجد ما يلي:

1 ـ يرتبط الكمون الكهربائي بكثافة الشحن الكهربائية إذا كانت $\epsilon = C^{st}$ لا تتغير من نقطة الى أخرى بالعلاقة

$$V = \frac{1}{\epsilon} \int_{\gamma} \frac{\rho dV}{r} + \frac{1}{\epsilon} \int_{S} \frac{\sigma dS}{r} \qquad \text{(I-72)}$$

2 ـ قانون كولون للتفاعل بين شِحنتين هو

$$f = \frac{1}{\epsilon} \frac{qq'}{r^2} \qquad \text{(I-73)}$$

3 ـ الضغط الكهربائي على السطوح المشحونة هو

$$\rho = E_S \sigma \quad , \quad E_S = \frac{2\pi\sigma}{\epsilon} . \qquad \text{(I-74)}$$

فالضغط يقل إذاً عما هو في الخلاء بالنسبة $\frac{\epsilon}{\epsilon_0}$ إذا كانت الشحنة الكهربائية لا تتغير ($\rho = \frac{2\pi\sigma^2}{\epsilon}$)، أو يزيد عما هو في الخلاء بالنسبة ذاتها إذا كان المجال الخارجي لا يتغير ($\rho = \frac{\epsilon}{2\pi} E_S^2$).

ستتيح لنا نظرية الأجسام الكهرنافذة الإلتقاء بنظرية التيار الكهربائي، لذلك يجب أن نميّز بين الشحن الكهربائية «الحقيقية» التي تظهر على سطوح المعادن والشحن «الوهمية» التي تتكون داخل الأجسام الكهرنافذة. ينجلي هذا التمييز بين النوعين من الشحن في النظرية الإلكترونية. فالشحن الوهمية ترتبط بالإلكترونات المقيدة، والشحن الحقيقية ترتبط بالإلكترونات الحرة. أما في ما يتعلق بظواهر التحريض الكهربائي، فإن الجسم الناقل كهربائياً يظهر كأنه جسم كهرنافذ ذو ثابت لا متناهٍ ϵ. إن نظرية الأجسام الكهرنافذة التي تلعب دوراً أساسياً في نظرية ماكسويل قد عَمَّمتْ بشكل واسع نظرية الكهرباء السكونية في الفراغ أو الخلاء.

ولا بد من الاشارة هنا أن مفهوم الأجسام الكهرنافذة كما تصوره ماكسويل وكما عرضناه هنا لا يعني إلا الظواهر، لأنه على مستوى الالكترونات ليس هناك الا شحن تتحرك في الفراغ. فمفهوم الأجسام الكهرنافذة ليس إلا نتيجة للمراقبة الإحصائية للأجسام، فهو تعميم عياني macroscopic للكهرباء السكونية في الخلاء. فإذا أردنا تفسيراً مجهرياً microscopic للظواهر الكهرمغنطيسية كما في نظرية لورنتز

Lorentz أو نظرية الفوتونات photons فإن ظواهر التحريض الكهرمغنطيسي تختفي ليبقى المجال الكهرمغنطيسي وحده يحمل معنى مجهرياً.

10 ـ الأجسام الكهرنافذة وثنائيات القطب

يتألف الجسم الكهرنافذ من مجموعة من ثنائيات القطب ذات عزم كهربائي متناسب مع شدة المجال الكهربائي الذي توضع فيه هذه الأجسام. ويكون ذلك بطريقتين:

1 ـ يمكن أن يتكون ثنائي القطب تحت تأثير المجال الكهربائي الخارجي ذاته. فجزيئيات الجسم ليس لها عادة عزم كهربائي لأن الشحن الكهربائية تتوزع بداخلها بتناظر كروي. ولكن هذه الجزيئيات تكتسب عزماً كهربائياً بتأثير مجال كهربائي خارجي إذ تتحرك الإلكترونات التي تحيط بالنواة تحت تأثير القوى الكهربائية الخارجية نحو سطح الجزيء الذي يبدو حينذاك كأنه كرة معدنية في حقل خارجي أي ثنائي القطب. ويكون العزم الكهربائي استناداً الى نتائج المقطع الثامن.

$$qd = \alpha E \quad \text{مع} \quad \alpha = \epsilon_0 R^3 \tag{I-75}$$

حيث R قريب من شعاع الجُزَيء. فإذا كان هناك عدد من الجزيئيات يساوي N في الحجم $\mathcal{V}$ يكون العزم الكهربائي الثنائي في وحدة الحجم.

$$P = \frac{N}{\mathcal{V}}\, qd = \frac{N}{\mathcal{V}}\, \alpha E \tag{I-76}$$

وتسمى P كثافة الإستقطاب polarization density في الجسم الكهرنافذ.

2 ـ هناك أجسام كهرنافذة مؤلفة من جزيئيات ذات عزم كهربائي ثنائي دائم أي حتى في غياب المجال الكهربائي الخارجي. وهذه هي حال جزيئيات الغازات والسوائل المؤلفة من شاردة سلبية وشاردة إيجابية. فإذا لم يكن هناك مجال كهربائي خارجي تتجه هذه الجزيئيات بشكل عشوائي ويكون عندها العزم الكهربائي الثنائي الوسطي منعدماً. ولكن إذا وضع هذا الجسم في مجال كهربائي خارجي، تدور هذه الجزيئيات على نفسها لتتجه باتجاه هذا المجال فيكون العزم الكهربائي الوسطي باتجاه المجال الخارجي وتكون كذلك كثافة الإستقطاب.

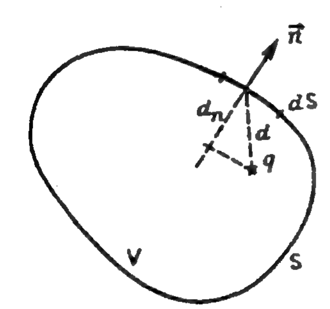
يظهر الفرق بين هذين النوعين من الأجسام في تغيير الاستقطاب مع درجة

الحرارة. ففي حالة الأجسام ذات العزم الكهربائي الدائم ينعدم العزم الكهربائي الإجمالي بسبب الاضطراب الحراري thermal agitation لجزيئيات الجسم. ولكن إذا أُخضع الجسم لتأثير مجال كهربائي خارجي يتكون عزم إجمالي متناسب عكسياً مع مربع درجة الحرارة المطلقة absolute temperature، أما في الحالة الثانية للإستقطاب أي في غياب العزم الكهربائي الدائم للجزيئيات وتكوّنه تحت تأثير المجال الكهربائي الخارجي فلا تتغير كثافة الاستقطاب مع درجة الحرارة.

11 ـ الإستقطاب والإزاحة الكهربائيان

لنتفحص جسماً عازلاً $\mathcal{V}$ يحيط بـه سطح مغلق S. ينتج الإستقطاب الكهربائي للجزيئيات عن تحرك الشحن الكهربائية q. فإذا كان هناك عدد من الشحن يساوي $\frac{N}{\mathcal{V}}$ في وحدة الحجم تكون الشحنة الكهربائية المنتقلة الى السطح التفاضلي dS العمودي على متجِه الوحدة n (أنظر الرسم 6)

$$dq = \frac{N}{\mathcal{V}}\, qd_n\, dS. \tag{I-77}$$



الشكل 6 ـ تحرك الشحن الكهربائية واستقطاب الأجسام الكهرنافذة

حيث d_n هي مـركّبة الإنتقال d على المتجه العمودي n. ولكن $\frac{N}{\mathcal{V}}$ qd تساوي العزم الكهربائي في وحدة الحجم أي كثافة الإستقطاب. فتكون الشحنة الكهربائية المنتقلة الى السطح S.

$$\int_S P_n dS.$$

وإذا كانت كثافة الشحن الكهربائية الوهمية داخل الحجم $\mathcal{V}$ تساوي ρ' نجد

$$\int_S P_n\, dS = -\int_{\mathcal{V}} \rho'\, d\mathcal{V}. \tag{I-78}$$

ولكن قاعدة غرين الرياضية تعطي

$$\int_S P_n \, dS = \int_{\mathcal{V}} \text{div. } P \, d\mathcal{V} \qquad \text{(I-79)}$$

فنستخلص من (I-78) العلاقة المحليّة.

$$\text{div. } P = -\rho'. \qquad \text{(I-80)}$$

وإذا كان الحجم $\mathcal{V}$ يحتوي، إضافة إلى الجسم الكهرنافذ المستقطب، على شحن كهربائية حقيقية بكثافة ρ' يمكن أن نكتب المعادلة (I-14) التي هي نتيجة لقانون غاوس في الخلاء. ولكن باستعمال كثافة الشحن الاجمالية وثابت الكهرنافذ ϵ_0 نجد:

$$\text{div. } E = \frac{4\pi}{\epsilon_0} (\rho + \rho'). \qquad \text{(I-81)}$$

وباستعمال (I-80) نكتب

$$\text{div. } E = \frac{4\pi\rho}{\epsilon_0} - \frac{4\pi}{\epsilon_0} \text{div. } P \qquad \text{(I-82)}$$

أو

$$\text{div. } (\epsilon_0 E + 4\pi P) = 4\pi\rho \qquad \text{(I-83)}$$

فإذا قابلنا هذه النتيجة مع التحديد (I-66) للمجال D نجد:

$$\boxed{D = \epsilon_0 E + 4\pi P} \qquad \text{(I-84)}$$

ومن جهة ثانية D و P متناسبان مع E إذ إن المعادلات (I-67) و (I-64) و (I-76) تعطي

$$D = \epsilon E = \chi_e \epsilon_0 E. \qquad \text{(I-85)}$$

$$P = \frac{N_\alpha}{\mathcal{V}} E = \chi_e \epsilon_0 E \qquad \text{(I-86)}$$

حيث حددنا الطواعية الكهربائية electric susceptibility χ_e بأنها:

$$\chi_e = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{N_\alpha}{\mathcal{V}}. \qquad \text{(I-87)}$$

أما المعادلة (I-84) فتعطي قيمة المعامل x_e

$$x_e = 1 + 4\pi \chi_e \qquad \text{(I-88)}$$

نشير أن قيمة α تتأثر بوجود الجزيئيات القـريبة. فـإذا كان الجسم الكهـرنافـذ كثيفاً مثل الأجسام السائلة والصلبة تتغير قيمة الطواعية الكهربائيـة وبالتـالي قيمة ثابت الكهرنافذ تبعاً للمعطيات التجريبية. أمـا العلاقـة (I-84) فتبقى صحيحة ولكن ليس هنـاك علاقـة تناسُب بسيطـة بين مجـال التحـريض الكهـربـائي D وكثـافـة الإستقطاب P والمجال الكهربائي E

تمـاريـن

1 ـ لنفترض أن توزيعاً للشحن الكهربائية ذا تناظر كـروي، إحسب الكثافـة $\rho(r)$ لهذه الشحن إذا كانت دالّة الكمون الكهربائي

$$V = -\frac{1}{\epsilon_0}\ \frac{qe^{-\alpha r}}{r}$$

حيث α و q ثـابتان. إحسب قيمـة الشحنة الكهـربائيـة لجسيم نقطي point particle موضـوع في المركز كي يعطي هذا الكمون.

2 ـ إحسب المجال الكهربائي لثنائي القطب الكهربائي.

3 ـ أ ـ إحسب المجال الكهربائي E_1 داخل كرة من جسم كهرنـافذ متجـانس homogeneous موضوعة في مجال كهربائي خارجي E_0 متسق.

ب ـ أنظر في الحالات الخاصة التالية:

α) ـ إبعاد الجسم الكهرنافذ.

β) ـ إستبدال الجسم الكهرنافذ بجسم ناقل للكهرباء.

جـ ـ ما هي قيمة العزم الكهربائي الذي يمكن أن يعطي المجال الكهربـائي ذاته الذي تعطيه الكرة المستقطبة؟

د ـ إحسب المجال الذي يتكون في الظروف ذاتها في تجويف كـروي داخل جسم كهرنافذ. ما هي القيم الحدية لهذا المجال؟

الحـل:

أ ـ يستعمل للكمون الخارجي حل V بالصيغة (I-54) وتختـار الثوابت a_1 و b و ϵ_1 لتحقيق الشروط التالية:

$E_0 = -\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_\infty$ ومسـاواة الكمـون عـلى سطـح الكـرة:

$E_1 = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}$ مع $(\varphi_1)_{r=R} = (V)_{r=R'}$ وأخيراً مساواة المركبة العموديـة لمجال التحريض الكهربائي.

$\epsilon_1 \dfrac{\partial V}{\partial r} = \epsilon_0 \dfrac{\partial V}{\partial z}$ على سطح الكرة.

ب ـ الحالات الخاصة يمكن الحصول عليها بوضع $\epsilon_1 = \epsilon_0$ ثم $\epsilon_1 = \infty$.

جـ ـ تستعمل العلاقة $m_e = qd = \epsilon_0 b$.

د ـ يجب استبدال ϵ_0 بـ ϵ_1 والعكس. يكون الحقل داخل التجويف ذا قيمة بين E_0 و $E_0 \dfrac{\epsilon_1}{\epsilon_0}$.

4 ـ ما هو تأثير شحنة كهربائية $+e$ على جسم كهرنافذ لا متناهٍ يحده سطح مستوٍ؟

الحــــل:

يُحسب الكمون الناتج الشحنة $+e$ والشحنة $-e$ الموجودة في موقع الصورة (أي النقطة المتناظرة مع موقع الشحنة $+e$ بالنسبة الى سطح الجسم الكهرنافذ). ثم تكتب شروط التواصل continuity على السطح الفاصل بين الخلاء والجسم الكهرنافذ.

الفصل الثاني

المغنطيسية السكونية
Magnetostatics

1 ـ الحالات الدائمة permanent

قانون بيو Biot وسافار Savart التجريبي

يتكون المجال المغنطيسي بواسطة تيار كهربائي وهو شحن كهربائية متحركة أو بواسطة الأجسام المغنطة. سوف ندرس أولاً مغنطيس التيار الكهربائي لاستخلاص النموذج الذي نستعمله لفهم ثنائي القطب المغنطيسي الذي هو أساس بنية الأجسام المغنطة.

لا يكون المجال المغنطيسي مستقلاً عن المجال الكهربائي والعكس بالعكس إلا في الحالات الدائمة. أما في الحالات المتغيرة مع الوقت فإن كلاً من هذين المجالين يرتبط بالآخر. لدى دراسة المغنطيسية السكونية نحصر اهتمامنا في الحالات الدائمة البسيطة التي يتولد فيها المغنطيس عن تيارات كهربائية بشدة ثابتة i.

ينتج التيار الكهربائي المستمر direct current عن التحرك المنتظم لسلسلة متواصلة من الشحن الكهربائية. فإذا كانت كل شحنة تتحرك بسرعة v في سلك مقطعه dS تكون شدة التيار

$$\rho v_n \, dS = i \qquad \text{(II-1)}$$

حيث v_n هي مركّبة السرعة على الإتجاه العمودي على المقطع dS، وإذا أخذنا جزءاً طوله dl من هذا السلك نجد:

(II-2) $$i d\ell = v_n \rho \, dS \, d\ell = q.v$$

حيث q هي الشحنة الإجمالية في الجزء dl من السلك ذي الحجم dS.dl

إذا حركنا شحنة كهربائية قرب تيار كهربائي أو قرب جسم ممغنط نلاحظ أن هذه الشحنة تخضع لقوة:

(II-3) $$\boxed{F = q\,(v \wedge B)}$$

حيث B هو مجال التحريض المغنطيسي الذي يكوِّنه التيار الكهربائي أو الجسم الممغنط. كذلك أي جزء dl من سلك كهربائي يمر فيه تيار شدته i وضع قرب تيارات أخرى أو أجسام ممغنطة يخضع لقوة

(II-4) $$F = i\,(d\ell \wedge B)$$

إن مجال التحريض المغنطيسي B يمكن أن يكون حصيلة حركة شحنة كهربائية 'q بسرعة 'v أو حصيلة تيار كهربائي منتظم بشدة 'i يمر في سلك طوله 'dl. وقد أثبتت تجارب بيو وسافار أن هذا المجال هو:

(II-5) $$B = \frac{q'\,(v' \wedge r)}{|r|^2} = \frac{i'\,(d\ell' \wedge r')}{|r|^2}$$

حيث 'r هو المتجه الفاصل بين الشحنة 'q أو الجزء الصغير من السلك 'dl الى النقطة حيث يقاس المجال. وباستعمال التحديد (II-3) و (II-4) نجد أن القوة المغنطيسية لتفاعل شحنتين كهربائيتين q و 'q تتحركان بسرعة v و 'v أو لتفاعل تيارين i و 'i في سلكين طولهما dl و 'dl هي

(II-6) $$F = \frac{qq'}{|r|^2}\Big[v \wedge (v' \wedge r)\Big] = \frac{ii'}{|r|^2}\Big[d\ell \wedge (d\ell' \wedge r)\Big]$$

حيث r هي المسافة بين شحنة الإختبار q أو الجزء $d\ell$ من سلك الإختبار والشحنة 'q أو الجزء $d\ell'$ من السلك الكهربائي الذين يكونان المجال المغنطيسي.

لدى دراستنا الكهرباء السكونية وجدنا أنه يمكن أن نحسب المجال الكهربائي انطلاقاً من قانون كولون ولكن هذه الطريقة محدودة جداً. والأفضل هو أن نستعمل

دالّة الكمون التي هي حل لمعادلات بـواسون أو لابـلاس، أي أن نستبدل العـلاقات التكاملية (التي تعادل في بعض الحالات قانون التأثير عن بعد) بعلاقات محلية تأخذ شكل معادلات تفاضلية جزئية. سوف نكون بوضع مشابه عنـد دراسة المغنطيسيـة السكونية، فنجد أنه من الأنسب أن نصيغ علاقات محلية بشكل معادلات تفـاضلية جزئية يمكن أن نستخلص منها القوانين الأساسية للمغنطيسية السكـونية وبشكـل خاص قانون بيو وسافار.

2 ـ القوانين العامة للمغنطيسية

القـانـون الأول: يتكـون قـرب تيـار كهـربـائي أو جسم ممغنط تـدفّق للمجـال المغنطيسي. تنطلق خطوط هذا المجـال من الجسم المغنط أو من الطبقة المغنطيسيـة magnetic shell (المعادلة للدارة الكهربائية التي يمـر بها التيـار) وتعود اليـه. وكل سطح مغلق لا يتقاطع مع الجسم الممغنط أو الطبقة المغنطيسية يلتقي حتمـاً مع أيّ خط للمجـال المغنطيسي عدداً مـزدوجاً من المـرات ويكون التـدفق الإجمالي للمجـال المغنطيسي على هذا السطح المغلق منعدماً أي:

$$\int_S B_n \, dS = 0 \qquad \text{(II-7)}$$

مما يعني أن

$$\boxed{\text{div. } B = 0} \qquad \text{(II-8)}$$

يحدِّد المجال B التحريض المغنطيسي في الوسط المادي الذي ندرس فيه التأثيرات المغنطيسية. ومن الممكن أن ندخل مجالاً جديداً H نسميه المجال المغنطيسي ويحـدَّد بطريقة مشابهة للمعادلة (I-67) أي:

$$\boxed{H = \frac{B}{\mu}} \qquad \text{(II-9)}$$

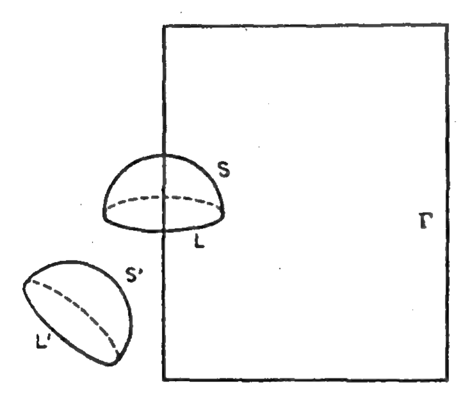
حيث μ هي النفاذية المغنطيسية magnetic permeability للجسم. أما المجـال H فهو القيمة الحدِّية للتحريض المغنطيسي في حال الفراغ. ورغم التشابه بين المعادلات (II-9) و (I-67)، سوف نرى أن المجال H مثل المجال D في الكهرباء السكونيـة ليس المجال الأولي في النظرية المغنطيسية. فالمجالان الأساسيان اللذان يدخلان مباشرة في النظرية المجهرية هما المجال الكهربائي E ومجال التحريض المغنطيسي B.

القــانون الثــاني: لنقارن انتقــال شحنة كهـربائيـة وانتقال شحنـة مغنطيسيـة افتراضية. فإذا كان المسار L' مغلقاً يكون الشغل الإجمالي للمجال على هذا المســار منعدماً في كلتا الحالتين:

$$W_{L'} = 0. \qquad \text{(II-10)}$$

ولكن إذا كان الانتقال على أحد خطوط المجال L لا يمكن أن ينعدم الشغل.

$$W_L \neq 0. \qquad \text{(II-11)}$$



الشكل 7 ـ
خطوط المجالات والمسارات المغلقة

فإذا قابلنا النتائج (II-10) و (II-11) يبدو أن خط القوة L لا يمكن أن ينغلق على نفسه لأن الشغل الناتج من الإنتقال عليه ينعدم حسب قانون المحافظة على الطـاقة: وهـذا هو فعـلاً حال خطـوط القوى التي تكـونها الشحن الكهـربـائيـة والأجســام المغنطيسية، فهي لا تنغلق على نفسها. وتكون المعـادلة (II-10) صحيحـة لأي مسار مغلق L' يحـدد سطحاً S'، لأن أي من هـذه المسارات لا يمكن أن يكـون خط قـوة. لذلك يمكن أن نكتب

$$W_{L'} = \int E_{L'}\, dL' = \int \operatorname{curl}_n E\, dS' = 0 \qquad \text{(II-12)}$$

مما يعني أن

$$\boxed{\operatorname{curl} E = 0, \quad E = \operatorname{grad} V} \qquad \text{(II-13)}$$

فالمجال يشتق إذاً من دالّة للكمون.

أما المجال المغنطيسي الذي يكونه تيار كهربائي فإنه ينغلق على نفسه. مما يعني أن المعادلة (II-11) صحيحة لبعض المسارات L وهي خطوط المجال. رغم ذلك يبقى قانون المحافظة على الطاقة صحيحاً من الناحية العملية لأنه لا يمكن أبداً نقل شحنة مغنطيسية واحدة. إن هذا الاختلاف بين المجال H والمجال B يعني أنه لا يمكن أن يشتق المجال المغنطيسي H من دالة للكمون مثل المجال الكهربائي. إذ إن المعادلة (II-12) تصبح:

$$W_L = \int H_L \, dL = \int \text{curl}\, H \, dS' \neq 0. \qquad \text{(II-14)}$$

إذا كان المسار L واحداً من خطوط المجال المغنطيسي. ولكن استناداً الى المعادلة (II-10) فإن الكمية curl H تنعدم على أي سطح 'S لا يخترقه التيار الكهربائي ويحده المسار 'L. ويعني هذا أن curl H لا يكون غير منعدم إلا في ملتقى السطح S مع السلك الكهربائي Γ. فكل سطح S محدود بخط للمجال L يجب أن يتقاطع مع السلك الكهربائي مرة واحدة على الأقل أو في عدد مفرد من النقاط. فإذا كان المسار L منغلقاً يجب أن يكون السلك الكهربائي Γ منغلقاً على نفسه أيضاً. فكل تيار كهربائي يشكل حتماً حلقة مغلقة. وهذا ما يعلل مبدأ ماكسويل بإدخال تيار الإزاحة الكهربائي displacement current في النظرية.

لنحسب الآن الشغل W_L في ملتقى السطح S والسلك Γ. لنضع

$$W_L = 4\pi i \qquad \text{(II-15)}$$

محددين هكذا نظاماً للوحدات الكهرمغنطيسية لقياس التيار الكهربائي[1] i. مما يتيح لنا كتابة المعادلة (II-14) بالصيغة

$$\int_L H_L \, dL = 4\pi \int_S I_n \, dS \quad , \quad i = \int I_n \, dS \qquad \text{(II-16)}$$

ترمز I_n هنا الى مركبة كثافة التيار الكهربائي I في الإتجاه العمودي على المقطع dS. والصيغة المحلية للمعادلة التكاملية (II-16) هي

---

(1) إذا كتبنا بهذا الاختيار قانون كولون في وسط مادي ذي ثابت الكهرنافذية ε أيّ $F = \frac{1}{\epsilon}\frac{qq'}{r^2}$ نخلص إلى أن ثابت كهرنافذية الخلاء $\epsilon_0 \neq 1$ إذا استعملنا الوَحْدة الكهرمغنطيسيّة للشِحن الكهربائية q و 'q.

(II-17) $$\text{curl } H = 4\pi I$$

في كل نقطة من الفضاء فيها كثافة تيار I ومجال مغنطيسي H.

وإذا قارنّا المعادلات (II-8) و (II-9) و (II-17) نجد أن مجال التحريض المغنطيسي B يخضع في الوقت ذاته للمعادلات التالية في حال الاستقرار المغنطيسي:

(II-18) $$\text{div } B = 0, \text{ curl } B = 4\pi\mu I$$

مما يعني أن المجال B يمكن كتابته بالصيغة التالية:

(II-19) $$B = \text{curl } A$$

حيث الكمون المتجِهي A يخضع استناداً إلى (II-18) الى المعادلات[2]

(II-20) $$\Delta A = -4\pi\mu I \quad , \quad \text{div. } A = 0$$

وهو بشكل خاص حال الحل:

(II-21) $$A = \mu \int \frac{I}{r} \, d\mathcal{V}$$

تحدد هذه الصيغة للحل إمكانية الإستقرار المغنطيسي[3] تماماً كما أن الحل

$$V = \frac{1}{\epsilon} \int \rho \frac{d\mathcal{V}}{r} + \frac{1}{\epsilon} \int \frac{\sigma dS}{r}$$

---

(2) إستنادا إلى $(11\text{-}19)_1$ تكون المعادلة $\text{div } B = 0$ مستوفاة بالتطابق إذا خضع الكُمون المتَّجهي A للمعادلة $\text{div } A = 0$. أما المعادلة $\text{curl} B = 4\pi\mu I$ فتصبح.

$$\text{curl curl } A = \text{grad div } A - \Delta A = 4\pi\mu I.$$

أيّ $\Delta A = -4\pi\mu I$ إذا استعملنا المعادلة $\text{div } A = 0$.

(3) يكون الفرق بين B وأيّ حل آخر B′ للمعادلات (II-18) ذا صيغة توافقيّة harmonic محدودة في كل مكان. فتكون إذا منعدِمة بالتطابق، مما يعني أن قيمة المجال B محدّدة بطريقة لا إلتباس فيها في حالة الاستقرار المغنطيسي.

يحدد إمكانية الإستقرار الكهربائي في جسم كهرنافذ ومتشابه بثابت الكهرنافذية ε.

تطبيق قانون بيو وسافار: لننظر الآن في الحالة الخاصة لتيار كهربائي شدته I يجتاز جزءاً من السلك وله $d\ell$ ومقطعه متساو قيمته a. نجد في هذه الحالة:

$$I\, d\mathcal{V} = Ia\, d\ell = i\, d\ell \qquad \text{(II-22)}$$

فتعطي الصيغة (II-21) الكمون المتجهي dA الذي يكونه هذا الجزء من السلك

$$dA = \frac{\mu i}{r}\, d\ell \qquad \text{(II-23)}$$

ولكن إذا استعملنا (II-19) نجد

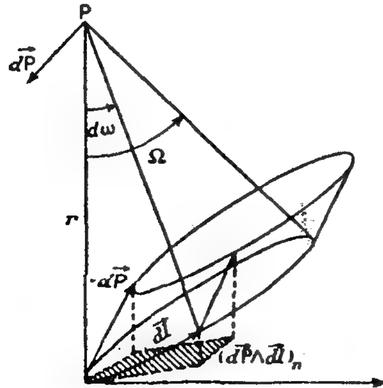
$$dB = \text{curl}\, dA = \frac{\mu i}{r}\, \text{curl}\, d\ell + \mu i \left[\text{grad}\left(\frac{I}{r}\right) \wedge d\ell\right] \qquad \text{(II-24)}$$

$$= \mu i\, \frac{d\ell \wedge r}{|r|^2}$$

وما هي إلا الصيغة (II-5) التي أثبتتها تجارب بيو وسافار. مما يعني أن هذا القانون يمكن استنتاجه من المعادلات التفاضلية الجزئية المحلية التي هي جزئياً نتيجة لمقارنة سلوك الشحن الكهربائية وسلوك الشحن المغنطيسية المفترضة.

3 ـ ثنائي القطب المغنطيسي

لنفترض أن دارة كهربائية صغيرة مساحتها dS تُرى من النقطة P في الفضاء تحت زاوية مجسمة Ω (انظر الرسم 8). إذا انتقلت النقطة P مسافة dP تتغير الزاوية المجسمة بكمية dΩ بحيث إن



الشكل 8 ـ تحديد grad Ω

$$d\Omega = \int d\omega \quad \text{مع} \quad \omega = -\frac{(dP \wedge d\ell)_n}{|r|} = \frac{(dP \wedge d\ell).\, r}{|r|^2} \qquad \text{(II-25)}$$

وذلك لأن $(dP \wedge d\ell)_n$ – هو إسقاط السطح التفاضلي المتوازي الأضلاع المكون من المتجهات dP – و $d\ell$ على السطح المستوي العمودي على المتجه r. لذلك يمكن أن نكتب.

$$d\Omega = -\int \frac{(dP \wedge d\ell) r}{|r|^3} = -\int \frac{dP\,(d\ell \wedge r)}{|r|^3}$$

ولكن من جهة ثانية

$$d\Omega = \text{grad}\,\Omega.\, dP \qquad \text{(II-26)}$$

أي

$$\text{grad}\,\Omega = -\int \frac{d\ell \wedge r}{|r|^3} \qquad \text{(II-27)}$$

فإذا قارنا هذه النتيجة مع الصيغة (II-24) يمكن أن نكتب

$$B = -\mu i\, \text{grad}\,\Omega \qquad \text{(II-28)}$$

مما يعني أن المجال B يشتق في هذه الحالة الخاصة من كمون عدديّ.

$$V = \mu i\, \Omega \qquad \text{(II-29)}$$

وينتج عندئذ عن المعادلة (II-28) أن

$$\text{curl}\, B = 0 \qquad \text{(II-30)}$$

إن صيغة هذا الكمون العددي

$$\text{(II-31)} \qquad V = \mu i \Omega = \frac{\mu i}{r^2}\, S' \cos\theta \qquad \text{(II-31)}$$

تشبه تماماً صيغة الكمون الكهربائي لثنائي القطب الكهربائي

$V = \frac{1}{\epsilon} \frac{qd}{r^2} \cos\theta$ لذلك يمكن أن نعتبر هذه الدارة الكهربائية الصغيرة كأنها ثنائي القطب المغنطيسي بعزم iS ونسميها عندئذ الطبقة المغنطيسية magnetic

shell. وانطلاقاً من مفهوم الطبقة المغنطيسية يمكن أن نستخلص العلاقة (II-18). إذ يمكن أن نكتب استناداً إلى (II-28).

$$\int B_L \, dL = -\mu i \int d\Omega \qquad \text{(II-32)}$$

فإذا كان المسار L يتقاطع مرة واحدة مع الطبقة المغنطيسية نجد

$$\int d\Omega = -4\pi \qquad \text{(II-33)}$$

إذا كانت الزاوية المجسمة Ω إيجابية. نستنتج إذاً المعادلة

$$\int B_L \, dL = 4\pi\mu i \qquad \text{(II-34)}$$

أما في حال المسارات الأخرى L' التي لا تتقاطع مع الطبقة المغنطيسية فنجد

$$\int B_L \, dL' = 0 \qquad \text{(II-35)}$$

ولكن إذا استعملنا قاعدة ستوكس Stokes الرياضية والمعادلة (II-34) نحصل على

$$\int B_L \, dL = \int_S \text{curl}_n B \, dS = 4\pi \int_S \mu I_n \, dS \qquad \text{(II-36)}$$

حيث I هي كثافة التيار الذي يخترق السطح S أي $i = \int I_n \, dS$ بذلك نحصل على المعادلة التفاضلية الجزئية

$$\text{curl } B = 4\pi\mu I \qquad \text{(II-37)}$$

وتسمى العلاقة (II-34) قانون أمبير Ampere، أما المعادلة (II-37) فهي الصيغة التفاضلية (أو المحلية) لهذا القانون. وبشكل خاص في الأماكن التي ليس فيها أي تيار كهربائي أي خارج السلك الكهربائي $(I = 0)$ نجد أن المجال B يخضع للمعادلة $\text{curl } B = 0$.

لقد استنتجنا في ما سبق قانون أمبير (المعادلة الثانية II-18) من القوانين العامة للمغنطيسية السكونية. أما هنا فجاء قانون أمبير كتطبيق لقانون بيو وسافار التجريبي. يتيح لنا قانون أمبير اعتبار أية دارة كهربائية كطبقة مغنطيسية، كما يتيح لنا استنتاج القوانين العامة (II-18). ولكن هذه الطريقة في التحليل ليست

متفقة مع منهجية نظرية ماكسويل التي ترمي الى استبدال التفاعل عن بعد بمعادلات تفاضلية جزئية ومحلية. لذلك يمكن في التحليل اعتماد إحدى الطريقتين التاليتين:

1 ـ قبول فرضية أمبير أي اعتبار الدارة الكهربائية طبقة مغنطيسية أو ثنائي القطب المغنطيسي، ومنها نستنتج كما فعلنا في هذا المقطع القوانين العامة للمغنطيسية (II-18).

2 ـ القبول بالقانون الفرضي (II-17) الذي يستند الى وجود الشحن المغنطيسية وتحركها كما فعلنا في الكهرباء السكونية.

مهما يكن من أمر فإن هذه الفرْضيات تبرَّر بنتائجها أي إثبات قانون بيو وسافار وتتطابق جميع نتائجها مع الواقع.

4 ـ الأجسام المغنطيسية

كما تتألف الأجسام الكهرنافذة من ثنائيات القطب الكهربائية كذلك تتألف الأجسام المغنطيسية من ثنائيات القطب المغنطيسية. ويمكن أن نميز بين ثلاثة أنواع من الأجسام المغنطيسية:

1 ـ هناك عدد من الأجسام لا يحتوي على ثنائيات القطب المغنطيسية الدائمة بل تتكون هذه الثنائيات بتأثير مجال مغنطيسي خارجي. لقد أعطينا تفسيراً لظواهر الاستقطاب الكهربائي للذرات في مجال كهربائي خارجي، وذلك بالافتراض أن الالكترونات الذرية تستطيع التحرك قليلاً داخل الذرة لتعطيها عزماً كهربائياً وتحولها الى ثنائيات القطب الكهربائية. كذلك إذا وضعت الذرة في مجال تحريض مغنطيسي خارجي B يتغير مع الوقت، يتولد تيار كهربائي داخل الذرة باتجاه يعطي عزماً مغنطيسياً عكس المجال المغنطيسي الخارجي الذي أنتجه. فالأجسام التي يتكون فيها فقط عزم مغنطيسي معاكس لمجال التحريض المغنطيسي الخارجي تسمى أجساماً مغنطيسية مغايرة diamagnetic.

2 ـ كما أن هناك أجساماً مؤلفة من ذرات ذات عزم كهربائي دائم حتى بغياب مجال خارجي، كذلك هناك أجسام مؤلفة من ذرات ذات عزم مغنطيسي دائم. فإذا لم يكن هناك مجال تحريض مغنطيسي خارجي تكون حركة هذه الذرات باتجاه عشوائي ويكون العزم المغنطيسي الإجمالي منعدماً. أما إذا أخضعت هذه الأجسام لمجال مغنطيسي خارجي، فإن ثنائيات القطب المغنطيسية تدور على نفسها لتتجه باتجاه

المجـال الخارجي. فيكـون العـزم المغنطيسي الإجمـالي للجسم بهـذا الاتجـاه. هـذه الأجسام هي أجسام مغنطيسيـة مسايـرة paramagnetic. وهذا التمغنط يغطي، في حال وجوده، على النوع الأول من التمغنط الذي يحدث في كل الأجسام. وتتغـير قيمة التمغنط المساير مع الحرارة المطلقة تماماً كما هـو حال العـزم الكهربـائي الوسطي للـذرات. أما العـزم المغنطيسي في الأجسام المغـايرة التمغنط فـلا يتغـير مـع درجـة الحرارة.

إن وجـود العزم المغنطيسي الـدائم للذرات في حـال عدم وجـود مجـال مغنطيسي خارجي يعود الى سببين لا يمكن استيعابهما تماماً الا في نطاق الميكانيك الكمومي:

أ ـ تـدور الإلكترونـات باستمـرار حول النـواة nucleus. ويمكن أن يكـون هـذا الدوران باتجاهات مختلفـة مما يجعـل العزم المغنطيسي الإجمـالي لهذه الإلكتـرونات منعـدماً. وهـذا هو حـال الأجسام المغنطيسيـة المغايـرة. ولكن إذا لم تتعادل هـذه التيارات يبقى هناك تيار إجمالي داخل الذرة. وقـد افترض أمبـير وجود هـذا التيار لذلك يـدعى تيار أمبـير. ولكن مقدار العـزم المغنطيسي الاجمالي وطبيعـة هذا التيـار الكهربائي يمكن تفسيرهما فقط بواسطة النظـرية الكمـومية quantum theory كمـا اقترح سومرفلد Sommerfeld.

ب ـ وللإلكترونـات أيضاً حـركة دوران ذاتيـة تميزهـا. وينتج عن زخم الـدوران الـذاتي هذا (أو الـدُّومة spin) عـزم مغنطيسي مما يعطي الـذرة عزمـاً مغنطيسيـاً إضافياً ناتجاً عن دومة الإلكترونات ذاتها. ففي حال الأجسام المغنطيسيـة المغايـرة ينعدم كل من العزم المغنطيسي المداري orbital والعزم المغنطيسي الناتج عن الدومـة لمجموع الإلكترونات في الذرة. إن فرضية الإلكترون المغنطيسي الذي يدور حول نفسه وردت في النظريات الكمومية في أوائل عهدها ولكنها لم تَـحـظ بتأويل كامل وصحيـح إلا في نظرية ديراك Dirac النسبية.

جـ ـ إن المغنطيسيـة الحديـدية ferromagnetism هي حـالة حـدِّية وخـاصة في الأجسام المغنطيسية المسايرة وليس لها تفسير مقبول إلا في النظرية الكموميـة. ففي هذه النظرية يمكن أن نثبت أن ثنائيات القطب الدائمة ذات العزم النـاتج مثـلاً عن دومة الالكترونات تخضع لقوة خاصة في الميكانيـك الكمومي تسمى قـوة التبادل ex-change force تدفع دومة ذرتين أو جـزيئيين متجـاورين ليتجها بـاتجاه واحـد. مما يكون في بعض الأجسام مناطق مجهريـة ذات عزم مغنطيسي كبـير نـاتـج عن توحيـد اتجاه دومة الالكترونات في كل من هذه المناطق. فإذا لم يكن هناك مجال مغنـاطيسي خارجي يكون عزم كل من هذه المناطق متجهـاً عشوائيـاً والعزم المغنطيسي الإجمـالي

للجسم منعدماً. ولكن إذا أخضع هذا الجسم لمجال مغنطيسي خارجي يتجه عزم كل من المناطق باتجاه هذا المجال مما يعطي الجسم عزّماً مغنطيسياً كبيراً جداً. ويبلغ هذا العزم مداه الأعلى إذا كانت الدومة الاجمالية في جميع المناطق ذات اتجاه واحد ويسمى هذا الحد الأعلى عزم الإشباع saturation. فإذا أنقص المجال الخارجي حتى الإنعدام يقل العزم المغنطيسي للجسم ولكنه لا ينعدم بسبب نوع من الاحتكاك بين الجزيئيات. وتسمى هذه الظاهرة البطاء المغنطيسي hysteresis، وهذا هو سبب وجود الأجسام ذات المغنطيس الدائم.

إن خصائص المغنطيسية الحديدية معقدة لأن العزم المغنطيسي ليس متناسباً مع المجال المغنطيسي كما هو حال الأجسام المغنطيسية المسايرة أو المغنطيسية المغايرة. أما إذا هبطت درجة الحرارة فإن المغنطيسية الحديدية تقل وتختفي إذا بلغت الحرارة درجة حرجة θ تسمى نقطة كوري curie. وتحت هذه الحرارة الحرجة يكون التمغنط متناسباً مع (1/T − θ). أما في درجات الحرارة المرتفعة فإن الاضطراب الحراري يعارض توحيد اتجاه العزم المغنطيسي لمختلف المناطق.

5 ـ عزم طبقة مغنطيسية

النفاذية والطواعية المغنطيسيتان

في الأجسام المغنطيسية المغايرة أو المغنطيسية المسايرة يكون العزم المغنطيسي متناسباً مع مجال التحريض المغنطيسي. لنفترض أن M هو العزم المغنطيسي في وحدة الحجم أي كثافة التمغنط، وأن هذا العزم يساوي عزم طبقة مغنطيسية تكوّنها دارة كهربائية يجتازها تيار كهربائي بشدة j:

$$\int_L M_L \, dL = \int_S \text{curl}\, M \, dS = j = \int_S j_n \, dS \;,\; j = \int_S Jn \, dS \tag{II-38}$$

مما يعني أن

$$\text{curl}\, M = J \tag{II-39}$$

ولكننا أثبتنا أن المجال B في الحالة الدائمة يخضع للمعادلة[4]

$$\text{curl}\, B = 4\pi\mu_0 I \tag{II-40}$$

(4) من الواضح أنه يجب أن نأخذ هنا $\mu_0 = \mu$ إذ إن ثُنائيات القُطب المغنطيسيّة هي في الفراغ.

حيث ترمز I الى شدة التيار الكهربائي الـذي يخرج من السطـح S الذي يحـدّه الخط المغلق L. فإذا كان الـوسط المادي غـير مغنطيسي تكون الـدارة الكهربـائية Γ بعزم مغنطيسي iS وبشدة تيار i ترتبط الى كثافة التيار I بالعلاقة $i = \int I_n\, dS$. وهذا التيار هو نتيجة للحركة العادية للشحن الكهربائية داخل السلك الناقل للكهرباء. أما في حـال وسط مادي مغنطيسي فهنـاك تيار إضـافي بكثافـة J ناتـج عن الإستقطـاب المغنطيسي لهذا الجسم تماماً، كما أن هناك تيار نقـل وتياراً نـاتجاً عن الاستقطـاب الكهربائي في الأجسام الكهرنافذة. نجد إذاً العلاقة:

$$\text{curl } B = 4\pi\mu_0 (I+J). \qquad \text{(II-41)}$$

ولكن إستناداً الى المعادلة (II-39)

$$\text{curl } M = j. \qquad \text{(II-39)}$$

مما يعطينا العلاقة

$$\boxed{\text{curl } H = 4\pi I} \qquad \text{(II-42)}$$

حيث حددنا المجال المغنطيسي H بالصيغة

$$H = \frac{B}{\mu_0} - 4\pi M. \qquad \text{(II-43)}$$

فالمجال المغنطيسي H يدخل هنا تماماً كما دخل المجال D في الكهرباء السكـونية. فنجد في كل الحالات

$$\boxed{B = \mu_0 (H + 4\pi M)} \qquad \text{(II-44)}$$

ولكن كثافة التمغنط M متناسبة مع المجال B في الأجسـام المغنطيسية المسـايرة والمغايرة

$$M = aB \qquad \text{(II-45)}$$

ومن جهة أخرى استناداً إلى (II-9)

$$B = \mu H. \qquad \text{(II-46)}$$

فإذا قابلنا المعادلات (II-44) و (II-45) و (II-46) نجد

$$\mu = \mu_0 (1 + 4\pi a\mu) \qquad \text{(II-47)}$$

ومن المناسب أن نحدد النفاذية المغنطيسية

$$\boxed{\chi_m = \frac{\mu}{\mu_0}} \qquad \text{(II-48)}$$

والطواعية المغنطيسية

$$\boxed{\chi_m = \frac{M}{H}} \qquad \text{(II-49)}$$

وهذه الأخيرة إيجابية إذا كان الجسم مغنطيسياً مسايراً وسلبية إذا كان الجسم مغنطيسياً مغايراً.

ومن جهة أخرى تكون النفاذية المغنطيسية χ_m قريبة دائماً من I بينما الطواعية المغنطيسية χ_m أصغر كثيراً من I سواء أكان الجسم مغنطيسياً مسايراً أو مغايراً (خلافاً لذلك يمكن أن تكون الطواعية الكهربائية χ_m أكبر من I).

وإذا قابلنا المعادلات (II-45) و (II-46) يمكن أن نكتب

$$\chi_m = a\mu. \qquad \text{(II-50)}$$

وتكتب المعادلة (II-48) إذا أخذنا بعين الإعتبار العلاقات (II-47) و (II-50).

$$\boxed{\chi_m = 1 + 4\pi\, \chi_m} \qquad \text{(II-51)}$$

تمارين

1 ـ إحسب الكمون المتّجهي A خارج وداخل سلك مستقيم شعاعه R يجتازه تيار بكثافة I. إستنتج قيمة المجال المغنطيسي خارج وداخل السلك.

الحل:

خذ اتجاه المحور oz باتجاه محور السلك $(I = J_Z, A = A_z)$ أكتب (II-20) باستعمال $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ وبحساب التكامل تجد دالّة الكمون المتجهي $A = C_1 Lr + C_2 - \pi\mu Ir^2$.

أ ـ خارج السلك $I = 0$ فينتج عن الشرط (II-15) أن $C_1 = 2\mu i$.

ب ـ داخل السلك الشروط الثلاثة: $C = 0$ (كي يكون الكمون المتجهي دائماً متناهياً) و $\pi R^2 I = i$ و $A_{int} = A_{ext}$ تقودنا الى الصيغة:

$$A = -2\mu i \left[LR + C_2 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{r^2}{R}\right)\right]$$

إستنتج من (II-19) ومن (أ) و (ب) أن

$$|H|_{ext} = \frac{2\,i}{r} \quad , \quad |H|_{int.} = 2i\,\frac{r}{R^2}\ .$$

2 ـ إحسب شدة واتجاه المجال المغنطيسي H الناتج عن دوران كرة مشحونة حول محورها. إفترض أن شعاع الكرة هو R وأن الشحن الكهربائية هي على سطحها بكثافة سطحية σ. إثبت أن المجال H لا يتغير داخل الكرة.

3 ـ يسير إلكترون شحنته e على دائرة شعاعها r بسرعة v. إحسب عزمه المغنطيسي. إثبت أن هذا العزم المغنطيسي متناسب مع الزخم الزاوي للإلكترون. إحسب العزم المغنطيسي إذا كان الزخم الزاوي بقيمة $\frac{h}{2\pi}$.

المغنطيسية الكهربائية (الكهرمغنطيسية)

Electromagnetism

لقد بدا حتى أوائل القرن الماضي أن الكهرباء السكونيّة والمغنطيسيّة السكونية تشملان مجموعتين مختلفتين من الظواهر. ولكن أظهرت دراسة المجال المغنطيسي لتيّار كهربائي، لأول مرة، علاقة بين التأثيرات التي تصدر عن أجسام مغنطيسية وتلك التي تصدر عن حركة الشِحن الكهربائيّة (تجارب أورستد). وحوالي سنة 1830 أجرى فاراداي سلسلة تجارب لإثبات عكس ظاهرة أورستد. فقد كان يعتقد أن بإمكان التأثير المغنطيسي أن يولد تياراً كهربائياً. في حال صحة هذه الفكرة يكون بإمكان التحريض المغنطيسي الناتج عن تيار كهربائي في دارة أولى أن يولد تياراً كهربائياً في دارة ثانية مجاورة. في الواقع لقد وجد فاراداي أن التيار في الدارة الثانية المسمى تيار التحريض الكهربائي لا ينتج عن مجرد وجود التيار الأول بل عن تغيراته. إذ إن التيار الثانوي يظهر فقط عند وصل أو قطع التيار الأولي أي عند أي تغيير في تدفق المجال المغنطيسي الذي يكوِّنه التيار الأولي في سلك ثانوي مجاور.

إن ظهور قوى كهربائية محركة electromotive force تحت تأثير مجال التحريض المغنطيسي تفرض صياغة رياضية لقوانين الظواهر الكهربائية والمغنطيسية وقانون فاراداي الجديد. وقد حقق ماكسويل ذلك بعد عدة سنوات، إذ صاغ مجموعة معادلات تفاضلية جزئية تعبر عن جميع قوانين الكهرمغنطيسية بطريقة مرضية. وقد بدا أن معادلات ماكسويل تحتوي على حد term جديد ضروري لتأمين تناسقها. وقد فسر ماكسويل هذا الحد بأنه تيار الإزاحة الذي يفرض على كل دارة كهربائية أن تكون مغلقة. وقد أثبتت التجارب فعلاً وجود تيار الإزاحة هذا بمقدار ما جاء في نظرية ماكسويل. وإضافة الى تفسيرها لجميع الظواهر الكهربائية

والمغنطيسية المعروفة عندئذ، كانت معادلات ماكسويل تتنبأ بوجود موجات كهرمغنطيسية. وكانت النظرية الكهرمغنطيسية الجديدة تمتد لتشمل أيضاً البصريات.

إن اتساع مدى النظرية الكهرمغنطيسية ونجاحها كانا كبيرين الى درجة تفضيلها على الحركية الكلاسيكية عند ظهور تناقض بينهما من الناحية النظرية والتجريبية. وقد كانت هذه النظرية الإندماجية تفترض ضمنياً حركيات نسبية. مما أتاح فيما بعد صياغة نظرية النسبية الخاصة.

أ ـ التحريض الكهرمغنطيسي ـ تيار الإزاحة

1) قانون فاراداي التجريبي

إن المجال المغنطيسي الناتج عن تيار بشدة دائمة يدخل في نطاق الظواهر الدائمة. أما إذا تغيرت شدة التيار أو تحركت الدارة الكهربائية، يتغير المجال المغنطيسي في كل نقطة من الفضاء فتوصف هذه الحالات بالمتغيرة. وتدخل هذه الحالات في نطاق نظرية ماكسويل إذا كانت هذه التغيرات بطيئة بمعنى أن مدتها كبيرة إذا قيست بالمدة اللازمة لانتشار الاضطرابات الكهرمغنطيسية في الجهاز المستعمل. وهذا الشرط يتحقق في حالات عديدة سندرسها الآن.

إذا تغير مجال التحريض المغنطيسي قرب دارة كهربائية، يظهر في هذه الدارة تيار كهربائي بسبب تكوُّن قوة كهربائية محركة تحريضية، وتُبين التجربة أن مقدار القوة المحركة هذه متناسب مع سرعة تغير تدفق مجال التحريض المغنطيسي في الدارة أي:

$$\text{(III-1)} \qquad e = -\frac{d}{dt} = \int_S B_n \, dS$$

حيث e هي القوة المحركة الكهربائية في الدائرة. وتساوي e شغل المجال الكهربائي حول الدارة أي:

$$\text{(III-2)} \qquad \int_L E_L dL = \int_S \text{curl } E \, dS$$

مما يتيح لنا كتابة الصيغة المحلية أو التفاضلية لقانون فاراداي التجريبي

$$\text{(III-3)} \qquad \frac{\partial B}{\partial t} = -\text{curl } E.$$

ولكن المجال B يشتق من كمون متجِهي A وفق المعادلة

(III-4) $$B = \text{curl } A.$$

نستنتــج من المعادلات (III-3) و (III-4) أن دوران curl المتجِهـين E و $-\frac{\partial A}{\partial t}$ متساو، مما يعني أن الفرق بينهما هو تدرُّج دالة عدديّة ψ أي

(III-5) $$\boxed{E = -\frac{\partial A}{\partial t} - \text{grad } \psi}$$

2) تيار النقل وتيار الإزاحة

1 ـ **تيار النقل**: يتكون التيار الكهربائي نتيجـة لحركـة الشحن الكهربـائية في جسم ناقل للكهرباء بتأثير المجال الكهربائي E الذي يشتق من دالّة الكمون V.

(III-6) $$E = \text{grad } V.$$

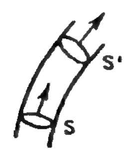
فإذا كان الجسم الناقل سلكاً نحدد شدة التيار بأنها:

(III-7) $$i = \frac{dq}{dt}$$

أي الشحنة الكهربائية التي تجتاز مقطع السلـك خلال وحـدة الزمن. ويمكن أن نحدد كثافة التيار في نقطة معينة من الفضاء بأنهـا شدة التيـار الذي يجتـاز وحدة المساحة إذا وضعت عمودياً على اتجاه حركة الشحن. وتظهر التجربـة صحة قـانون أوم Ohm وهو أن كثافة التيار متناسبة مع المجال الكهـربائي E. ويتميـز كل جسم ناقل بمقاومية resistivity ρ_c أو نـاقلية conductivity $\sigma_c = 1/\rho_c$ بحيث يكتب قـانون أوم كما يلي:

(III-8) $$\boxed{E = \rho_c \text{ أو } I = \sigma_c E.}$$

في حالة الدوام الكهربائي يتساوى تدفق التيار الكهربائي الداخل من السطـح S



الشكل 9 ـ الحالة الدائمة والمحافظة على الشحن

والتدفق الخارج من 'S. فتبدو الشحن الكهربائية كأنها سائل غير ضغوط ونعبر عن هذا بالمعادلة:

$$\text{div } I = 0. \qquad \text{(III-9)}$$

وهي الصيغة المحلية لقانون المحافظة على الشحن الكهربائية.

2 ـ تيار الإزاحة الكهربائي: يمكن ألا تكون شدة التيار (III-7) لدارة كهربائية مغلقة نتيجة لتأثير قوة كهربائية محركة بل نتيجة لتفريغ مكثّف كهربائي. فتعني dq عندئذ التغير في شحنة لوحتي المكثف خلال الوقت dt ولكن في هذه الحالة يبدو التيار كأنه في دارة غير مغلقة (بين لوحتي المكثف).

وقد افترض ماكسويل أنه ليس هناك في الحالة الثانية دارة غير مغلقة إذ إن خطوط المجال تنغلق دائماً على نفسها. لذلك يجب أن نعتبر أن قانون غاوس يبقى صحيحاً في حال تفريغ مكثف كما في حالة الدوام الكهربائي. ولكن المجال D بين لوحتي المكثف يرتبط بالشحنة q في اللوحتين بالعلاقة:

$$\int D_a \, dS = 3\pi q \qquad \text{(III-10)}$$

أي:

$$\text{div } D = 4\pi\rho \qquad \text{(III-11)}$$

وكما في المعادلة (III-7) يمكن أن نحدد تيار الإزاحة الكهربائي

$$i' = \frac{dq}{dt} = \int I'_n \, dS \qquad \text{(III-12)}$$

حيث حددنا كثافة تيار الإزاحة بأنها:

$$\boxed{I' = \frac{1}{4\pi} \frac{dD}{dt}} \qquad \text{(III-13)}$$

فإذا كان الجسم بالوقت ذاته ناقلاً بناقلية (σ_c) وكهرنافذاً بثابت (ϵ) يجب أن نحدد التيار بأنه:

(III-14) $$I_e = I + \frac{1}{4\pi}\frac{dD}{dt} = \sigma_c E + \frac{\epsilon}{4\pi}\frac{dE}{dt}$$

فيصبح قانون المحافظة على الشحن الكهربائية

(III-15) $$\text{div}\, I_e = 0$$

3 ـ إدخال تيار الإزاحة في معادلات المجالات

لقد كتبنا المعادلة:

(III-16) $$\text{curl}\, H = 4\pi I$$

إستناداً الى قانون أمبير، وترمز هنا I الى شدة تيار النقل في الدارة. فإذا استعملنا هذه المعادلة في حالة تفريغ مكثّف نجد:

(III-17) $$\text{div curl}\, H = 4\pi\, \text{div}\, I = 0$$

مما يعني أن الدارة مغلقة وهو غير صحيح. وقد افترض ماكسويل أن المعادلة (III-16) تبقى صحيحة في كل الحالات شرط أن نستعمل كثافة التيّار العام I_e أي مجموع تيار النقل I وتيار الإزاحة I'.

في الحالات الدائمة ينعدم تيار الإزاحة $I' = 0$ فنجد قانون أمبير العادي. أما في الحالات المتغيرة (مثل حالة تفريغ المكثف) فنكتب:

(III-18) $$\text{curl}\, H = 4\pi I_e$$

مع

(III-19) $$\text{div}\, I_e = \text{div}\,(I + I') = 0.$$

مما يعني استناداً الى المعادلات (III-13) و (III-11) أن:

(III-20) $$\text{div}\, I = \frac{1}{4\pi}\, \text{div}\, \frac{dD}{dt} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}\,.$$

ب ـ معادلات ماكسويل

3) نظام الوحدات

نظام الوحدات الكهربائية سنتيمتر ـ غرام ـ ثانية CGS هو النظام الذي توضع فيه:

$$\epsilon_0 = 1. \tag{III-21}$$

في جميع المعادلات السابقة. أما نظام الوحدات الكهرمغنطيسية CGS فهو النظام الذي توضع فيه:

$$\mu_0 = 1. \tag{III-22}$$

فوحدة الشحن الكهربائية مثلاً في نظام الوحدات الكهربائية $(\epsilon_0 = 1)$ تختلف عن الوحدة في نظام الوحدات الكهرمغنطيسية $(\mu_0 = 1)$.

غير أنه من المناسب أحياناً أن نستعمل نظاماً مختلطاً وذلك باستعمال وحدات كهربائية للكميات E و D و ϵ ووحدات كهرمغنطيسية للكميات H و B و μ. لنضع مؤشراً (e) للكميات المقيسة بوحدات كهربائية ومؤشراً (m) للكميات المقيسة بوحدات كهرمغنطيسية فنجد العلاقة التالية:

$$\frac{q_{(e)}}{q_{(m)}} = \frac{j_{(e)}}{j_{(m)}} = \frac{\rho_{(e)}}{\rho_{(m)}} = c. \tag{III-23}$$

حيث c عدد ثابت. ولكن إذا قابلنا صيغ القوى الكهربائية والمغنطيسية:

$$|F| = q\,|E| = \frac{1}{\epsilon}\,\frac{q^2}{r^2} \quad , \quad F = q\,(v \wedge B) \tag{III-24}$$

في النظامين نجد النسب التالية:

$$\frac{E_{(e)}}{E_{(m)}} = \frac{1}{c}\,\frac{\epsilon_{(e)}}{\epsilon_{(m)}} = c^2\,\frac{D_{(e)}}{D_{(m)}} = c \tag{III-25}$$

$$\frac{B_{(e)}}{B_{(m)}} = \frac{1}{c}\,\frac{\mu_{(e)}}{\mu_{(m)}} = \frac{1}{c^2}\,\frac{H_{(e)}}{H_{(m)}} = c$$

إستناداً إلى العلاقات $B = \mu H$ و $D = \epsilon E$ وقانون أمبير (III-18).

4) العلاقات الأساسية

من المناسب، قياساً على صيغة كثافة تيار الإزاحة الكهربائي

$$I' = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial D}{\partial t} \qquad \text{(III-26)}$$

أن نحدد كثافة تيار الإزاحة المغنطيسي

$$J' = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial B}{\partial t} = J_m. \qquad \text{(III-27)}$$

وتمثل الكثافة J' كامل التيار المغنطيسي J_m لأنه ليس هناك شحن مغنطيسية حرة تولد تيار نقل مغنطيسي مشابهاً لتيار النقل الكهربائي I.

فإذا استعملنا النظام المختلط للوحدات تكتب المعادلات (III-3) و (III-18) بالصيغ التالية:

$$\text{(I)} \begin{cases} \text{a) } \operatorname{curl} H = 4\pi J_e \\ \text{b) } \operatorname{curl} E = -4\pi J_m \end{cases}$$

حيث وضعنا:

$$\text{(II)} \begin{cases} \text{a) } J_e = \dfrac{I}{c} + \dfrac{1}{4\pi c}\dfrac{\partial D}{\partial t} \\ \text{b) } J_n = \dfrac{1}{4\pi c}\dfrac{\partial B}{\partial t} \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{aligned} D &= \epsilon E \\ I &= \sigma_c E \\ B &= \mu H \end{aligned}$$

ونتيجة للمعادلات (I) نجد:

$$\text{(I')} \begin{cases} \text{a) } \operatorname{div} J_e = 0 \\ \text{b) } \operatorname{div} J_m = 0. \end{cases}$$

ومن جهة ثانية تكتب المعادلات (III-11) و (III-4) لمجالي التحريض الكهربائي والمغنطيسي كما يلي:

$$(III)\begin{cases} a)\ \text{div}\ D = 4\pi\rho \\ b)\ \text{div}\ B = 0. \end{cases}$$

المعادلة (III-a) هي نتيجة لقانون غاوس، أما (III-b) فتعني أنه ليس هناك شحن مغنطيسية. أخيراً إذا أخذنا بعين الإعتبار التحديدات (II) تكون المعادلات (I′) نتيجة للمعادلات (III) إذا خضعت كثافة تيار النقل I وكثافة الشحن الحقيقية ρ لمعادلة استمرارية الشحن الكهربائية.

$$(III')\ \text{div}\ I + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$

تُشكل المعادلات (I) و (II) و (III) القوانين الأساسية التي تخضع لها جميع الظواهر الكهرمغنطيسية.

5) الكمون الكهرمغنطيسي

لقد رأينا لدى دراستنا الظواهر السكونية أنه يمكن اشتقاق المجال الكهربائي E ومجال التحريض المغنطيسي B من كمون عدديّ V وكمون متّجهي A أي:

$$(III\text{-}28)\qquad E = \text{grad}\ V, \quad B = \text{curl}\ A$$

ومن جهة ثانية لقد أثبتت لنا ظواهر التحريض أن المجال الكهربائي E يصبح في حالة الظواهر المتغيرة:

$$(III\text{-}29)\qquad E = -\frac{\partial A}{\partial t} - \text{grad}\ \Psi.$$

فإذا قابلنا هذه النتائج واستعملنا نظام الوحدات المختلطة يمكن أن نربط المجالات E و B الى دوالّ الكمون V و A في حالات الظواهر المتغيرة كما يلي:

$$(IV)\begin{cases} a)\ E = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial A}{\partial t} - \text{grad}\ V \\ b)\ B = \text{curl}\ A. \end{cases}$$

فتصبح المعادلات (I) و (III)

$$(V)\quad \begin{cases} a)\ \mathrm{curl}\, H = 4\pi J_e \\ b)\ \mathrm{div}\, D = 4\pi\rho \end{cases}$$

6) معادلات الانتشار ـ دوالّ الكمون المتأخرة

لنفترض أن ثابت الكهرنافذ ϵ والنفاذية المغنطيسية μ ثابتان. ولنحسب انطلاقاً من المعادلات (IV) الكميات $+ \mathrm{curl}\, B$ $\frac{\partial E}{\partial t}$ $\frac{\mu\epsilon}{c}$ $-$ و $\mathrm{div}\, E$ فنجد إذا أخذنا بعين الإعتبار المعادلات (V) والتحديدات (II)

$$(VI)\quad \begin{cases} \frac{\mu\epsilon}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \Delta A = \frac{4\pi}{c}\mu I, \\ \frac{\mu\epsilon}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \Delta V = \frac{4\pi}{\epsilon}\rho \end{cases}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

إذا فرضنا على دوالّ الكمون V و A شرط لورنتز

$$(VII)\quad \frac{\mu\epsilon}{c}\frac{\partial V}{\partial t} + \mathrm{div}\, A = 0$$

تسمى المعادلات (VI) معادلات دالمبير d'Alembert وتتيح حساب دوال الكمون V و A.

من المعروف أن لمعادلة بواسون

$$(III\text{-}30)\qquad \Delta\phi = 4\pi\rho$$

حلاًّ خاصًا بصيغة:

$$(III\text{-}31)\qquad \varphi = \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho}{\epsilon\, r}\, d\mathcal{V}$$

وهذا يعني أن الشحنة الكهربائية $\rho d\mathcal{V}$ في الحجم التفاضلي $d\mathcal{V}$ حول النقطة M (ξ, η, ζ) من الفضاء تكون في النقطة P (x, y, z) الكمون التفاضلي

$$d\varphi = \frac{1}{\epsilon} \frac{\rho}{r} d\mathcal{V} \qquad \text{(III-32)}$$

حيث r هي المسافة الفاصلة بين الحجم $d\mathcal{V}$ (أي النقطة M) والنقطة P. الكمون في (III-32) هو حل لمعادلة لابلاس ما عدا في النقطة $r = 0$. ومجموع دوال الكمون (III-32) لكل الأحجام $d\mathcal{V}$ هو حل لمعادلة دالمبير (VI) إذا لم تؤخذ الكثافة ρ في الزمن ذاته t الذي يحسب فيه الكمون بل في الزمن $t - \frac{r}{c}$. فتكون حينئذ الشحنة الكهربائية في الحجم $d\mathcal{V}$.

$$\rho\left(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{c}\right) d\mathcal{V}$$

ويكون كمونها في النقطة P (x, y, z) يساوي $\frac{\rho}{r}\left(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{c}\right) d\mathcal{V}$ هذا هو الكمون الذي يتكون في النقطة P في الوقت t لأن $\frac{r}{c}$ هي تماماً الوقت اللازم لوصول تأثير الشحن الكهربائية من النقطة M الى النقطة P. فتكون دالةالكمون الإجمالية:

$$V = \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho}{\epsilon r}\left(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{c}\right) d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \frac{(\rho)\, t - \frac{r}{c}}{\epsilon r} d\mathcal{V}. \qquad \text{(III-33)}$$

وكذلك يكون الكمون المتجهي

$$A = \int_{\mathcal{V}} \frac{\mu(i)_{t - \frac{r}{c}}}{r} d\mathcal{V}. \qquad \text{(III-34)}$$

هذه الصيغ للدوالّ V و A هي حلول لمعادلات الإنتشار (VI) وتسمى الحلول المتأخرة أو دوال الكمون المتأخرة لأن تأثير الشحنة الكهربائية الموجودة في النقطة M يظهر متأخراً في النقطة P. ويعود ذلك الى أن التأثيرات الكهرمغنطيسية التي تكوِّنها شحنة كهربائية تنتشر بسرعة محدودة انطلاقاً من الشحنة.

ومن جهة ثانية إن حل معادلة بواسون في منطقة محدودة من الفضاء هو[1]:

---

(1) يُطابق هذا الحل الصيغة (72-1) إذا وضعنا

$$\Delta\varphi = 4\pi\rho\,,\ \frac{\partial\varphi}{\partial n} = -4\pi\sigma \int,\ \varphi \cdot \mathrm{grad}_n\left(\frac{1}{r}\right) = 4\pi V_0$$

وإذا فترضنا اعتباطيًّا أن الكُمون V_0 مُنعدم على السطح المحيط بالمَنطقة.

$$\text{(III-35)}\quad \varphi = -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}}\frac{\Delta\phi}{r}\,d\mathcal{V} - \frac{1}{4\pi}\int_S\left[\varphi .\ \mathrm{grad}_n\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\,\mathrm{grad}_n\,\varphi\right]dS$$

وذلك إذا أخذنا بعين الإعتبار الشروط الحدية.

ومن الممكن أن نثبت [2] أن حل معادلات دالمبير في منقطة محدودة هو

$$\text{(III-36)}\quad \varphi = -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}}\left[\frac{\Delta\varphi - (1/c^2)\,(\partial^2\phi/\partial t^2)}{r}\right]_{t-\frac{r}{c}} d\mathcal{V}$$
$$+\frac{1}{4\pi}\int_S\frac{1}{r}\left\{\left[\frac{1}{c}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{t-\frac{r}{c}} + \frac{\varphi\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r}\right]\cos(n,r) + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_{t-\frac{r}{c}}\right\}dS.$$

التكـامل الأول من هـذه الصيغ ينتـج من الشحن الكهـربـائيـة في الحجم. أمـا التكامل الثاني فينتج من توزيع الشحن على السطح. والتكامل الأخير هو الذي يلعب دوراً مهماً في البصريات. إذ يتيح صياغة رياضية لمبدأ هيغنز القائل بأن كل جزء من صدر الموجـة wave front الكرويـة الأولية يبـدو كأنـه مصدر source للضـوء يبث مويجة ثانوية تنتشر حسب الصيغة (III-36).

ج ـ الطاقة الكهرمغنطيسية وتدفق الطاقة

7) كثافة الطاقة الكهربائية والمغنطيسية

إن طاقة منظومة مؤلفة من شحنتين كهربائيتين q_1 و q_2 على مسافة r_{12} الـواحدة عن الأخرى تساوي:

$$\text{(III-37)}\qquad W_{12} = \frac{q_1\, q_2}{\epsilon_0 r_{12}}$$

(2) انظر مثلاً في الصفحة 171 من [6] C. Slater. Electromagnetism

أما الطاقة الكهربائية لمنظومة مؤلفة من n من الشحن فهي:

$$W_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}{}_1^n \frac{q_i\, q_j}{\epsilon_0 r_{ij}} \quad \text{(III-38)}$$

حيث الجمع يكون لكل المؤشرات i و j ما عدا i = j وذلك لأن الشحنة الكهربائية لا تؤثر على نفسها. نشير أيضاً أن الطاقة الإجمالية W هي نصف مجموع الطاقات لكل الأزواج W_{ij} كي لا تحسب طاقة التفاعل $W_{ij} = W_{ji}$ مرتين. ويمكن أن نكتب أيضاً:

$$W = \frac{1}{2} \Sigma_i\, q_i\, V_i \quad \text{(III-39)}$$

حيث V_i هو الكمون الذي تكوّنه في موقع الشحنة q_i جميع الشحن الأخرى:

$$V_i = \sum_{i \neq j}{}_1^n \frac{q_i}{\epsilon_0 r_{ij}} \quad \text{(III-40)}$$

أما إذا كانت الشحن موزعة توزيعاً متواصلاً بكثافة ρ فتكون الطاقة الكهربائية

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \rho V\, d\mathcal{V}. \quad \text{(III-41)}$$

لنحسب هذه الطاقة تبعاً للمجال الكهربائي ومجال التحريض الكهربائي

$$E = -\,\text{grad}\, V, \quad \text{div}\, D = 4\pi\rho \quad \text{(III-42)}$$

فنكتب الطاقة كما يلي:

$$\begin{aligned} W_e &= \frac{1}{8\pi} \int_{\mathcal{V}} V\, \text{div}\, D\, d\mathcal{V} \\ &= \frac{1}{8\pi} \int_{\mathcal{V}} [\text{div}\,(VD) - D.\,\text{grad}\, V]\, d\mathcal{V} \\ &= \frac{1}{8\pi} \int_{\mathcal{V}} E.D\, d\mathcal{V} + \frac{1}{8\pi} \int_S VD_n\, dS. \end{aligned} \quad \text{(III-43)}$$

ولكن التكامل الثاني يكتب أيضاً:

$$\frac{1}{8\pi} \int_S VD_n\, dS = -\frac{1}{2} \int_S V_\sigma\, dS$$

لأن: $D_n = \frac{\partial D}{\partial n} = -4\pi\sigma.$ (III-44)

وتنعدم قيمة هذا التكامل إذا كان السطح S يحد حجماً لا متناهياً. فتصبح الطاقة عملياً[3]

$$W_e = \frac{1}{8\pi} \int_{\mathcal{V}} E.D\, d\mathcal{V} \qquad \text{(III-45)}$$

وتعني هذه الصيغة أن كثافة الطاقة الكهربائية في حالة السكون هي:

$$u_e = \frac{1}{8\pi}\; E.D = \frac{1}{8\pi}\; \epsilon E^2 \qquad \text{(III-46)}$$

حيث استعملنا العلاقة $D = \epsilon E$ (إذا كانت صحيحة).

أما حساب الطاقة المغنطيسية فأكثر تعقيداً[4]. نفترض هنا ببساطة أن المقارنة مع الكهرباء في حالة السكون مقبولة. فتكون كثافة الطاقة المغنطيسية:

$$u_m = \frac{1}{8\pi}\; B.H = \frac{1}{8\pi}\; \mu H^2 \qquad \text{(III-47)}$$

حيث استعملنا العلاقة $B = \mu H$ (إذا كانت صحيحة). ولكن من الواضح أن هذه الصيغة لا يمكن استعمالها لحساب الطاقة المغنطيسية الداخلية للأجسام المغنطيسية التي لا يمكن تحديد قيمتها. ولكن يمكننا استعمالها لحساب الطاقة الخارجية للأجسام المغنطيسية. وفي الحالة الخاصة لمجال يكوِّنه تيار كهربائي تكون الطاقة المغنطيسية الإجمالية $W_m = \int u_m d\mathcal{V}$ حيث يمكن حساب كثافة الطاقة u_m

---

(3) من المُمكن أن نحصل على الصيغة ذاتها إذا حسبنا الشغل اللازم لتجميع الشحن الكهربائيّة تباعاً وبطريقة عكوسة reversible. فإذا جُلبت هذه الشحن من نقطة لا متناهية البعد حيث ينعدم الكُمون إلى جسم موصّل غير مشحون أصلاً فإننا نعطي هذا الجسم شِحنة تتغيَّر من صفر إلى q وكُموناً يتغير من صفر إلى V بالتدرّج. نستطيع إذاً أن نفترض أن شِحنة الجسم هي qa وكُمونه هو Va حيث a عدد يتغير من صفر إلى واحد خلال عملية النقل. الشُغل اللازم لزيادة a بكمية da هو

$$d\tau = qda.\, V$$

فتكون الطاقة الكهربائيّة النهائية للجسم المشحون

$$W_e = qV \int_0^1 ada = \frac{1}{2}\; qV.$$

ومنها نستنتج باستعمال (III-42) و(III-44) أن طاقة جسم كهرنافذ هي

$$W_e = \frac{1}{8\pi} \int_{\mathcal{V}} E.D\, d\mathcal{V}$$

(4) أنظر المقاطع (2.14) إلى (2.18) من [7] J.A. stratton, Electromagnetic Theory

تبعاً لقيمة التيار الكهربائي. وتثبت التجربة فعلاً صحة التحديد (III-47)[5].

وفي الحالة العامة لمجال كهرمغنطيسي نفترض أن الطاقتين الكهربائية والمغنطيسية تضافان الى بعضهما دون تغيير متبادل في قيمتهما فتكون الطاقة الكهرمغنطيسية الإجمالية.

$$u = \frac{1}{8\pi}(E.D + H.B) = \frac{1}{8\pi}(\epsilon E^2 + \mu H^2) \qquad \text{(III-48)}$$

ويمكن أن نتحقق من أن هذه الصيغة تستوفي شرط المحافظة على الطاقة.

8) متجه بوينتنغ

لقد حسبنا في المقطع السابق الطاقة الكهرمغنطيسية في حالة السكون الكهربائي والمغنطيسي. وتبقى الصيغة (III-48) صالحة في الحالات المتغيرة مع الزمن. لإثبات ذلك نحدد المتجِه:

$$S = \frac{1}{4\pi}(E \wedge H) \qquad \text{(III-49)}$$

المسمى متجِه بوينتنغ Poynting الذي يخضع دائماً للمعادلة:

$$\begin{aligned} 4\pi \operatorname{div} S &= H \operatorname{curl} E - E \operatorname{curl} H \qquad \text{(III-50)} \\ &= -H\left(\frac{\partial B}{c\partial t}\right) - E\left(\frac{4\pi I}{c} + \frac{1}{c}\frac{\partial D}{\partial t}\right) \\ &= -H\left(\frac{\partial \mu H}{c\partial t}\right) - E\left(\frac{\partial \epsilon E}{c\partial t}\right) - \frac{4\pi I}{c}E. \end{aligned}$$

أي:

$$\operatorname{div} S = -\frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{c\partial t}(\mu H^2 + \epsilon E^2) - \frac{I\cdot E}{c} \qquad \text{(III-51)}$$

---

(5) إذا استعملنا (III-47) مثلاً في حساب طاقة دارة ذات تحريض ذاتي self-induction أو دارتين بتحريض متبادل mutual induction نحصل على قِيَم تتفق مع التجربة.

وإذا استعملنا الصيغة (III-48) نحصل على معادلة بوينتنغ التالية

$$\frac{1}{c}\frac{\partial u}{\partial t} + \text{div}\,S = \frac{I\cdot E}{c} \qquad \text{(III-52)}$$

وهي معادلة استمرارية الطاقة الكهرمغنطيسية. فالحد الأول $\frac{1}{c}\frac{\partial u}{\partial t}$ هو الزيادة في الطاقة المخزونة في وحدة الحجم. وفي الجانب الثاني من المعادلة تمثل $-\frac{I\,E}{c}$ الطاقة المهدورة سواء كحرارة في الجسم أو كزيادة في الطاقة الحركية للجسيمات داخل الجسم. لتفسير الحد div S نحسب تكامله على كامل حجم الجسم فنجد باستعمال قاعدة غرين تدفق المتجه S على سطح الجسم الخارجي. مما يعني أن المتجه S يمثل تدفق الطاقة أي كمية الطاقة التي تخترق عمودياً سطحاً مساحته وحدة المساحة خلال وحدة الزمن.

د ـ الموجات الكهرمغنطيسية

9) معادلات إنتشار المجالات

لقد كان التنبؤ بوجود الموجات الكهرمغنطيسية من أهم إنجازات نظرية ماكسويل. وتحدد هذه النظرية سرعة انتشار هذه الموجة بقيمة متفقة مع التجربة.

فاستناداً الى المعادلات (I) و (II) يمكن أن نكتب:

$$\begin{aligned}\text{(III-53)} \qquad \text{curl curl } E &= -\frac{\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\text{curl } H)\\ &= -\frac{\mu}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(4\pi I + \frac{\partial D}{\partial t}\right)\\ &= -\frac{4\pi\mu}{c^2}\frac{\partial I}{\partial t} - \frac{\mu\epsilon}{c^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{(III-54)} \qquad \text{curl curl } H &= \frac{4\pi}{c}\text{curl } I + \frac{\epsilon}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\text{curl } E)\\ &= \frac{4\pi}{c}\text{curl } I - \frac{\epsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}\end{aligned}$$

وباستعمال المعادلة التطابقية

$$\text{(III-55)} \qquad \text{curl curl } A = \text{grad div } A - \Delta A.$$

يمكن أن نكتب المعادلات (III-53) و (III-54) بالصيغ التالية:

$$-\Delta E + \frac{4\pi}{\epsilon}\ \text{grad}\ \rho = -\frac{4\pi}{c^2}\ \mu\frac{\partial I}{\partial t} - \frac{\mu\epsilon}{c^2}\ \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \qquad \text{(III-56)}$$

$$-\Delta H = \frac{4\pi}{c}\ \text{curl}\, I - \frac{\mu\epsilon}{c^2}\ \frac{\partial^2 H}{\partial t^2}\,. \qquad \text{(III-57)}$$

وبافتراض غياب الشحن الكهربائية ($\rho = 0$) وباستعمال قانون أوم:

$$I = \sigma_c E \qquad \text{(III-8)}$$

وبعد أخذ المعادلات (III-8) و $(I)_b$ بالحسبان نجد معادلات الإنتشار:

$$\frac{\mu\epsilon}{c^2}\ \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \Delta E + \frac{4\pi\sigma_c}{c^2}\ \mu\frac{\partial E}{\partial t} = 0. \qquad \text{(III-58)}$$

$$\frac{\mu\epsilon}{c^2}\ \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} - \Delta H + \frac{4\pi\sigma_c}{c^2}\ \mu\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \qquad \text{(III-59)}$$

نستنتج مما سبق أن كلاً من المجالين E و H يخضع لمعادلة الإنتشار:

$$\boxed{\frac{\epsilon\mu}{c^2}\ \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} - \Delta a + \frac{4\pi\sigma_c}{c^2}\ \mu\frac{\partial a}{\partial t} = 0} \qquad \text{(III-60)}$$

التي تصبح في حالة الإنتشار في وسط غير ناقل للكهرباء:

$$\Box\, a = 0, \quad \Box = \frac{1}{c^2}\ \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} - \Delta a = 0. \qquad \text{(III-61)}$$

10) الموجات المستوية plane waves

للمعادلات (III-60) حل خاص بالصيغة:

$$a = a_0\, e^{i\omega t - \gamma^2} \qquad \text{(III-62)}$$

يمثل موجة مستوية تنتشر باتجاه المحور Oz. فإذا أحللنا هذه الصيغة محل a في المعادلة (III-60) نجد القيمة المعقدة complex γ للثابت:

$$\gamma = \pm\, i\ \frac{\omega}{c}\ \sqrt{\left(\epsilon - \frac{4\pi i\sigma_c}{\omega}\right)\mu} \qquad \text{(III-63)}$$

التي تصبح في حالة جسم غير ناقل ($\sigma_c = 0$)

$$\gamma = \pm \frac{i\,\omega}{c} \sqrt{\epsilon\mu} \qquad \text{(III-64)}$$

فيكتب الحل بالصيغة:

$$a = e^{i\omega}\left(1 \pm \frac{z}{u}\right) \qquad \text{(III-65)}$$

حيث وضعنا

$$\boxed{u = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{c}{n}} \qquad \text{(III-66)}$$

مع:

$$n = \sqrt{\epsilon\mu} = \sqrt{\chi_e \chi_m} \qquad \text{(III-67)}$$

لأن $\epsilon_0 = \mu_0 = 1$ في النظام المختلط للوحدات:

$$\epsilon = \epsilon_0\,\chi_e,\ \mu = \mu_0\,\chi_m \qquad \text{(III-68)}$$

ومن جهة ثانية نستنتج من معادلة الإنتشار ذاتها (III-60) أن سرعة انتشار الموجات المستوية V تخضع للمعادلة

$$\frac{\epsilon\mu}{c^2} = \frac{1}{V^2} \qquad \text{(III-69)}$$

وكما يظهر في صيغة الموجات المستوية (III-65) تحدد سرعة الطور u phase الوقت $t = \frac{z + k\lambda}{u}$ اللازم كي يستعيد الطور $\varphi = \omega\left(t - \frac{z}{u}\right)$ قيمته من جديد أي دورة الاهتزاز $T = \frac{\lambda}{u}$.

أما الثابت c الذي يظهر في المعادلة (III-66) فهو كما رأينا في المقطع الثالث نسبة الوحدات الكهرمغنطيسية والوحدات الكهربائية CGS أي:

$$c = \frac{q_e}{q_m} = \frac{[Q]_m}{[Q]_e}$$

ولكن استناداً للمعادلة (III-69) تمثل c سرعة انتشار العوارض الكهرمغنطيسية في الخلاء. إذ إننا نجد في هذه الحالة:

$$V_0 = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = c \qquad \text{(III-70)}$$

لأن $\epsilon_0 = \mu_0 = 1$ في النظام المختلط للوحدات.

فنظرية ماكسويل تفرض إذاً تساوي سرعة الموجات الكهرمغنطيسية المستوية في الخلاء V_0 وسرعة الطور u_0 ونسبة الوحدات الكهربائية والكهرمغنطيسية.

الموجات الكهرمغنطيسية والموجات الضوئية لقد كانت سرعة الضوء في الهواء (أي تقريباً في الخلاء) معروفة بدقة كبيرة في عصر ماكسويل. فقد استعملت لقياس هذه السرعة مصادر غير أرضية (تجارب رومر Römer وبرادلي Bradley) أو مصادر أرضية (تجارب فيزو Fizeau وفوكو Foucault وميكلسون Michelson). وقد أصبحت أخيراً هذه السرعة معروفة بدقة كبيرة جداً[6,7]. وتقاس مباشرة في هذه التجارب السرعة V لإشارات ضوئية[8] هرتزية[9] أو أشعة غاما[10] أو سرعة الطور u لموجات هرتزية[11,12,13,14] أو ضوئية[15,16,17,18,19]. فالمعروف أن سرعتيّ u و V متساويتان إذا لم يكن الجسم مشتتاً dispersive. وقد كانت القياسات الأكثر دقة باستعمال الفجوة الطنانة resonant cavity (اسن[11] Essen وهنسن بول[20]

---

(6) BIRGE. Rep. Prog. Phys,. 8, 1941 P.90; BERGSTRAND- Handbuch der Physik,. XXIV, 1956, p.1. O. COSTA de BEAUREGARD. Revue des questions Scientif, 1957, p.5.

(7) E. BERGSTRAND. N.P.L., Rec. Dev. Stand. London., 1952, p.75.

(8) E. BERGSTRAND. Arkiv. för. Physik., 2, 1950, p.119.

(9) C.I. ASLAKSON. Proc. Am. Soc. Civ. Eng., 77, 1951, p.1; Trans. Amer geophys. Un., 32, 1951, p.813.

(10) CLELAND JASTRAM. Phys. Rev., 84, 1951, p.271.

(11) L. ESSEN, A.C. GORDON-SMITH. Proc. Roy. Soc., 194, 1943, p.348; 204, 1950, p.260; Nature, 175, 1955, p.793.

(12) CULSHAW. Proc. Phys. Soc., B66, 1953, p.597.

(13) K.D. FROOME. Proc. Roy. Soc., 213, 1952, p.123, 223; 1954, p.195.

(14) E.F. FLORMAN. Journ. of Res. N.B.S. 54, 1955, p.335.

(15) D.H. RANK, RUTH VAN DER SLUIS. Phys. Rev., 86, 1952, p.799; J. Opt. Soc. Amer., 42, 1952, p.693.

(16) NETHERCOT KLEIN TOWNES. Phys. Rev., 86, 1952, p.798.

(17) D.H. RANK, SHEARER, WIGGINS. Phys. Rev., 94, 1954, p.575.

(18) D.H. RANK, BENNETT, BENNETT. Phys. Rev., 100, 1955, p.993.

(19) D.H. RANK, GUENTHER, SHEARER. J. Opt. Soc. America, 47, 1957, p.148.

(20) HANSEN-BOL. Phys. Rev., 80, 1950, p.298.

Hansen-Bol) أو الدليل الموجي wave-guide (فروم[13] Froome وفلورمان[14] Florman) أو الطيفيات Spectroscopy تحت الحمراء أو الهرتزية (رانك[17,18] وبلايلر[21] Plyler). نذكر أخيراً القياسات التي تستعمل طريقة الرادار (اسلاكسون[9] Aslakson) وطريقة مقياس المسافات الأرضية geodimeter البصري (برغستراند[8] Bergstrand). وهذه الطريقة الأخيرة هي تحديث لطريقة العجلة المسننة التي ابتدعها فيزو Fizeau إذ تستعمل الشعاع الضوئي المستقطَب الذي يمكن تقطيعه بواسطة خلية كر Kerr بتردد عال جداً. والقيمة المعتمدة حاليا لسرعة الضوء هي:

$$V_0 \# 299.790 \pm 1 \text{ km/sec.}$$

نوضح هنا أن أكثر هذه الأساليب في قياس سرعة الضوء تكون عملياً بقياس طول الموجة ودورة الموجة الكهرمغنطيسية، وهي أدق بكثير من قياس طول الموجة الضوئية بالمقارنة مع المتر. فيبدو إذاً أنه من الممكن بل من المفضل أن نفترض أن قيمة V_0 هي ما تعطيه أدق التجارب الحالية وأن نربط بهذه الطريقة بين وحدة الطول ووحدة الوقت. فإذا قسنا واحدة منهما نستطيع أن نحدد الأخرى.

ومن جهة أخرى لقد جرى قياس النسبة c للوحدات CGS الكهربائية والمغنطيسية لأول مرة عام 1864[22] (وبر Weber وكوهلروش Kohlrausch) وذلك بمقارنة فرق الكمون الكهربائي المقيس في كل من نظامي الوحدات. ففي نظام الوحدات الكهربائية يحدد فرق الكمون نتيجة لقياس يجري بواسطة مقياس الشحنة الكهربائي Electrometer، أما في نظام الوحدات الكهرمغنطيسية فيقاس فرق الكمون مباشرة بواسطة مقياس كهرتحريكي Electrodynamometer ويمكن أن نقيس سعة مكثف كهربائي. وتعطى أدق القياسات الحديثة بهذه الطريقة

$$c = 299.790 \text{ Km/s.}$$

إن تطابق قيم V_0 و c التجريبية يجعلنا نفكر أن الظواهر الضوئية تخضع لمعادلات ماكسويل التي تقود نظرياً الى هذا التطابق. مما يعني أن الموجات الضوئية هي جزء صغير من الموجات الكهرمغنطيسية.

في الواقع إن الترابط بين الظواهر الضوئية والكهرمغنطيسية كان متوقعاً منذ

---

(21) E.K. PLYLER. J. Opt. Soc. Amer., 44, 1954, p.507.

(22) W. Weber et R. Kohlrausch. Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschatten, 1856, n°2.

زمن بعيد. فقد أثبتت تجارب فاراداي أن اتجاه إستقطاب حزمة ضوئية يتغير بتأثير المجال المغنطيسي. ولم تحظَ هذه الظاهرة الا بتفسير نوعي. وما وجد لهـا تفسير كمي إلا بعد اكتشاف ظاهرة زيمان Zeeman بعد ذلك بخمسين عاماً، إذ تبـين أن دوران اتجاه الإستقطاب هو حالة خاصة من ظاهرة زيمان[23].

ولقـد أثبت هرتـز Hertz تجريبيـاً أن الظواهـر الضـوئيـة مـا هي إلا ظـواهـر كهـرمغنطيسية. فقـد استطاع أن يـولد مـوجات كهـرمغنطيسية بـواسطة التفـريغ الكهربائي المتذبذب الحاصل بينْ مسريين electrode كهربائيين موصولين الى كـرتين كبـيرتين ذواتَيْ كمـون مرتفـع. فيتولـد عن هذه الإهتـزازات الكهربـائيـة مـوجـات كهـرمغنطيسية ذات تـردد عال. وقيـاس هذا التـردد يتفق مع قـاعـدة طـومسـون Thomson.

$$T = \frac{1}{\nu} = 2\pi\sqrt{LC}.$$

وقد ثبت أن الموجات الكهرمغنطيسية تتداخل وتنعرج ولهـا خصائص استقطـاب تماماً مثل الموجات الضوئية. وقد أتاح إنتاج موجات كهـرمغنطيسية متنـاهية القصر الإقتراب من الموجات فوق البنفسجيـة وبالتـالي دمج المـوجات الضـوئية بـالموجـات الهرتزية دمجاً كاملاً.

ومن البديهي أن المعادلة (III-66) أي:

$$u = \frac{c}{n} \qquad \text{(III-71)}$$

ليست صـحيحة الا للأجسام الكهرنافذة (العازلة) تمـاماً ($\sigma_c = 0$). أمـا إذا كان الجسم الكهرنافذ مشتِّتاً فإن المعادلة (III-71) ليست صـحيحة إلا للموجات الأُحادية اللون monochromatic فهي إذاً حالة حدية. سوف نرى في المقطع التالي ماذا يحـل بهذه العلاقة في حال جسم قليل التشتت إذا كان تردد الموجات متقارباً.

إن النفاذية المغنطيسية لأكثر الأجسام شفافية هي قريبة من 1. في هذه الحـالات تصبح الصيغة (III-67).

$$n^2 = \epsilon \qquad \text{(III-72)}$$

---

(23) إن ظاهرة زيمان تعود مثل المغنطيسية المغـايرة إلى التحـولات التي يحدثهـا المجال المغنطيسي في حـالة دوران الالكترونات داخل ذرّات بعض الأجسام. فتضيف إلى الدوران الأساسي للإلكترون دورانا ثانويًا بإتجاه متّسق وسرعة زاوية $\omega_2 = \frac{-e}{4\,m\,c} H$. وهذا الدوران يُضاف إلى الدوران بسرعـة $\pm\omega$ التي تدور بهما مركّبتا الضوء المستقطَب دائريًا.

وقد أثبت ماكسويل إتفاق هذه الصيغة مع التجربة للغازات ولبعض الأجسام العازلة (الكبريت sulfur والبارافين parrafin). وفي حالات كثيرة (تجربة بولتزمان Boltzman على أوكسيد الكربون) يمكن تحديد قرينة index الانكسار n من قياس كهربائي للثابت ϵ. وفي أغلب الأحيان يتغير الثابت ϵ بسرعة تبعاً لطول الموجة وتستقر قيمته إذا كان طول الموجة كبيراً[24] وقد ثبتت في الواقع صحة علاقة ماكسويل للموجات الهرتزية. ولكن حتى في هذه الحالة الحدية تبقى بعض الأجسام الكهرنافذة مشتتة. لذلك يجب الرجوع الى نظرية ماكسويل ليس للأجسام الكهرنافذة تماماً (وهي الأجسام التي تتميز بالثابتين ϵ و μ وبمجال الإزاحة الكهربائي) ولكن للإجسام شبه الناقلة أي التي يكون فيها تيار نقل بناقلية σ_c. في تلك الأجسام تظهر دائماً ظاهرتا امتصاص absorption وتشتت انتقائيتين بسبب ظواهر الطنين وتتغيران تبعاً للفرق بين تردد الموجة الساقطة على الجسم والتردد الذاتي للإلكترونات داخل الجسم.

11) رزمة موجات wave packet

لنفترض أن موجتين أُحاديتي اللون بسعة واحدة amplitude a_0 ولكن بترددين متقاربين $\nu + d\nu$ و $\nu - d\nu$ (أي بسرعة زاويّة $\omega + d\omega$ و $\omega - d\omega$) تتراكبان، ولنفترض أن سرعة الطور في جسم مشتت هي $u - du$ و $u + du$ لهاتين الموجتين، فتكون الموجة الإجمالية

$$A = a_0 e^{i(\omega+d\omega)\left(t - \frac{z}{u + du}\right)} + a_0 e^{i(\omega+d\omega)\left(t - \frac{z}{u - du}\right)} \tag{III-73}$$

$$\simeq a_0 e^{i\left[\omega t + id\omega - \frac{z}{u}\, d\omega - \frac{\omega z}{u}\left(i - \frac{du}{u}\right)\right]}$$

$$+ a_0 e^{i\left[\omega t - id\omega + \frac{z}{u}\, d\omega - \frac{\omega z}{u}\left(i + \frac{du}{u}\right)\right]}$$

حيث أهملنا حاصل ضرب (جداء) dω و du المتناهي الصغر فنجد إذاً:

(24) نذكر بالعلاقات الأساسيّة للموجات بين التردد الزاويّ ω والتردد ν والدوران T وطول الموجة λ وسرعة الطور u

$$\omega = 2\pi\nu \;\; ; \;\; T = \frac{1}{\nu} = \frac{\lambda}{u}$$

(III-74) $$A \simeq 2a_0 \cos\left(td\omega - \frac{z}{u}\ d\omega + \frac{\omega z}{u^2}\ du\right) e^{i\omega\left(t - \frac{z}{u}\right)}$$

$$\simeq 2a_0 \cos 2\pi \left(td\nu - \frac{z}{u}\ d\nu + \frac{\nu z}{u^2}\ du\right) e^{i\omega\left(t - \frac{z}{u}\right)}$$

بذلك يمكن أن نكتب:

(III-75) $$A \simeq 2a_0 \cos 2\pi\, d\nu \left(t - \frac{z}{U}\right) e^{i\omega\left(t - \frac{z}{u}\right)}$$

حيث

(III-76) $$\frac{1}{U} = \frac{1}{u} - \frac{\nu}{u^2}\ \frac{du}{d\nu} = \frac{d}{d\nu}\left(\frac{\nu}{u}\right)$$

أي:

(III-77) $$\frac{1}{U} = \frac{d}{d\nu}\ \frac{1}{\lambda}$$

أو:

(III-78) $$U = \frac{d\nu}{d\left(\frac{1}{\lambda}\right)}$$

هكذا يبدو تراكب موجتين بذات السعة ولكن بترددين متقاربين كموجة بتردد ν ولكن بسعة تتغير مع الوقت بتردد $d\nu$ وبسرعة طور U. نقول أن التراكب يعطي موجة مضمنة modulated ترددها ثابت ν ولكن سعتها تتغير بتردد $d\nu$. وهذا صحيح أيضاً في حالة تراكب عدد كبير من الموجات بترددات متقاربة (رُزمة موجات wave packet). وتسمى U سرعة المجموعة (group velocity)، وهي سرعة انتشار سعة الموجة وبالتالي سرعة انتقال الطاقة التي تحملها الموجة الإجمالية. بينما سرعة الطور للموجة الاجمالية تبقى u دون تغيير.

إستناداً الى المعادلة (III-75) نجد:

(III-79) $$-\frac{\pi}{2} < 2\pi d\nu\left(t - \frac{z}{U}\right) \leqslant \frac{\pi}{2}$$

أي:

(III-80) $$Ut - \ell \leqslant z \leqslant \ell + Ut$$

حيث وضعنا:

$$\ell = \frac{U}{4\,d\nu} \qquad \text{(III-81)}$$

مما يعني أن رزمة الموجات تمتد على منطقة من المحور Oz محدودة بالنقط $Ut - \ell$ و $Ut + \ell$. فيكون امتداد رزمة الموجات 2ℓ.

في الحالة الخاصة لجسم غير مشتّت تكون السرعة u واحدة لكل أطوال الموجات λ. نجد إذاً استناداً الى (III-76).

$$\frac{du}{d\nu} = \frac{u^2}{\nu}\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{U}\right) = 0 \qquad \text{(III-82)}$$

أي:

$$u = U \qquad \text{(III-83)}$$

فتكون سرعة المجموعة مساوية لسرعة الطور. هذا الشرط مستوفى طبعاً في حالة انتشار الموجات الكهرمغنطيسية في الفراغ (الخلاء).

لقد افترضنا في التحليل السابق أن $1 \leqslant \frac{d\nu}{\nu}$، ولكن استناداً الى المعادلة (III-81) يمكن أن نكتب:

$$\ell = \frac{U}{4\,dV} = \frac{1}{4d\left(\frac{1}{\lambda}\right)} = -\frac{\lambda^2}{4\,d\lambda} \qquad \text{(III-84)}$$

مما يعني أن:

$$\frac{\ell}{\lambda} = -\frac{\lambda}{4\,d\lambda} = \frac{\nu}{4\,d\nu} \geqslant 1 \qquad \text{(III-85)}$$

اذاً كي يكون التحليل السابق صحيحاً، يجب أن يكون امتداد رزمة الموجات أكبر بكثير من طول الموجة. في هذه الحالة تتحرك رزمة الموجات دون تشويه وتكون سعتها دالّة مترددة تنتشر بسرعة U.

لتكن n قرينة إنكسار جسم مشتّت لطول الموجة λ_0 في الفراغ.

$$\lambda_0 = \frac{u}{\nu}\,,\ u = \frac{c}{n} \qquad \text{(III-86)}$$

ولكن استناداً الى المعادلة (III-78):

$$U = \frac{d\nu}{\left(\frac{1}{d\lambda}\right)} = \frac{d\left(\frac{u}{\lambda_0}\right)}{d\left(\frac{1}{\lambda_0}\right)} \tag{III-87}$$

$$= u - \lambda_0 \frac{du}{d\lambda_0} = u\left(1 - \frac{\lambda_0}{u}\frac{du}{d\lambda_0}\right) = u\left(1 + \frac{\lambda_0}{n}\frac{dn}{d\lambda_0}\right)$$

إذ إن:

$$\frac{du}{u} = -\frac{dn}{n}. \tag{III-88}$$

إذا أخذنا بعين الأعتبار (III-86). وتكتب أيضاً المعادلة (III-87) كما يلي:

$$U = \frac{c}{n}\left(1 + \frac{\lambda_0}{n}\frac{dn}{d\lambda_c}\right). \tag{III-89}$$

إذا كان الضوء مؤلفاً من مجموعة موجات أحادية اللون فأي قياس لسرعة الموجة يعطي سرعة المجموعة U التي هي أيضاً سرعة انتقال الطاقة الضوئية. فإذا كان الجسم غير مشتّت أو قليل التشتيت (مثل الهواء مثلاً) يعطي هذا القياس عملياً سرعة الطور لأن:

$$U = u = \frac{c}{n}. \tag{III-90}$$

أما في حالة الأجسام المشتّتة (مثل كبريت الكربون) فتثبت التجربة صحة (III-89) وليس (III-90).

12) الموجات الكروية Spherical waves

نستطيع كتابة معادلات ماكسويل في الإحداثيات الكروية وإيجاد صيغ حلولها. سنكتفي هنا بدرس حالة خاصة فقط.

تخضع دالّة الكمون الكهربائي V لمعادلة الإنتشار في الخلاء (الفراغ). ($\mu_0 = \epsilon_0 = 1$). أما في غياب الشحن الكهربائية فتصبح هذه المعادلة:

$$\Box V \equiv \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \Delta V = 0. \tag{III-91}$$

إستناداً الى المعادلة $(VI)_b$. وإذا استعملنا الإحداثيات الكروية

$$x = r \sin\theta \cos\varphi, \quad y = r \sin\theta \sin\varphi, \quad z = r \cos\theta, \tag{III-92}$$

نجد لأية دالة عددية V

$$\Delta V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} \tag{III-93}$$

يمكن أن نكتب حلولاً خاصة للمعادلة (III-91) بالصيغة

$$V = R(r)\, \Theta(\theta)\, \Phi(\varphi)\, e^{i\omega t}. \tag{III-49}$$

وفي حالة التناظر الكروي لا تتغير V مع الزوايا θ و φ بل مع r و t فقط. فتكتب معادلة الإنتشار (III-91) بالصيغة

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (rV) - \frac{\partial^2 (rV)}{\partial r^2} = 0 \tag{III-95}$$

ذات الحلول

$$V = \frac{f\left(t \pm \frac{r}{c}\right)}{r} \tag{III-96}$$

حيث f هي دالة اختيارية. وتمثل هذه الصيغة موجة كروية بسيطة. والإشارة (−) في هذه الصيغة تتناسب مع الموجات التي تنتشر باتجاه تزايد r. أما الاشارة (+) فتتناسب مع الموجات التي تنتشر باتجاه تناقص r. أخيراً يمكن أن نختار f بالصيغة التوافقية البسيطة.

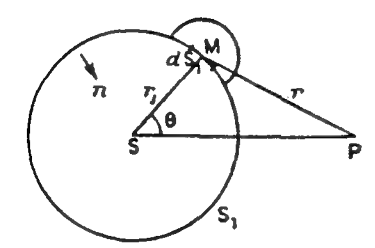
$$f\left(t - \frac{r}{c}\right) = a_0 e^{i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)} \tag{III-97}$$

فتكون دالة الكمون الذي تكونه في النقطة P (r, t) من الفضاء شحنة كهربائية موضوعة في أصل origin المحاور

$$V(r, t) = a_0 \frac{e^{i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)}}{r} \tag{III-98}$$

لنفترض الآن حسب مبدأ هيغنز Huygens أن موجة كروية تصدر عن S ليصبح شعاعها r_1 في الوقت $t = 0$. عن كل نقطة M من هذه الكرة تنبعث مويجة يصبح شعاعها ct في الوقت t. فيكون غلاف جميع هذه المويجات سطحاً كروياً مركزه S وهو صدر الموجة في الوقت t. يتناسب الاضطراب Perturbation في النقطة P الذي يكونه الجزء dS_1 من الكرة مع مساحة هذا الجزء. ولكن استناداً إلى المعادلة (III-98) يكون الكمون في $(M(r_1t)$.

$$(III\text{-}99) \qquad V(r_1, t) = a_0 \frac{e^{i\omega(t - \frac{r^2}{c})}}{r_1}$$



الشكل 10 ـ مبدأ هيغنز

أما الكمون في النقطة P على مسافة r من M فهو

$$(III\text{-}100) \qquad V\left(t - \frac{r}{c}\right) = a_0 \frac{e^{i\omega(t - \frac{r + r_1}{c})}}{r_1}$$

وهو حل لمعادلة دالمبير فيكتب إذاً بالصيغة (III-36). فإذا أخذنا بعين الإعتبار الشروط الحدية نجد

$$(III\text{-}101) \qquad V = -\frac{1}{4\pi} \int \left[\frac{\Delta V - \frac{1}{c^2} (. \ \partial^2 V | \partial t^2)}{r} \right]_{t - \frac{r}{c}} d\mathcal{V}$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{r} \left\{ \left[\frac{1}{c} \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right)_{t - \frac{r}{c}} \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{V\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} \right] \cos(n; r) + \left(\frac{\partial V}{\partial n} \right)_{t - \frac{r}{c}} \right\} dS$$

ولكن باستعمالنا الصيغة (III-100) نجد:

$$\text{(III-102)} \qquad \frac{\partial V^{(t-\frac{r}{c})}}{\partial t} = i\omega \frac{a_0 e^{i\omega(t-\frac{(r+r_1)}{c})}}{r_1}$$

$$\text{(III-103)} \qquad \frac{\partial V^{(t-\frac{r}{c})}}{\partial n} = -a_0 \cos(n,r_1)\left(\frac{1}{r_1}+\frac{i\omega}{c}\right)\frac{e^{i\omega[t-\frac{(r+r_1)}{c}]}}{r_1}$$

فإذا أحللنا هذه الصيغ في المعادلة (III-101) يمكن أن نكتب

$$\text{(III-104)} \qquad V = \frac{1}{4\pi}\int \frac{a_0 e^{i\omega(t-\frac{(r+r_1)}{c})}}{rr_1}$$

$$\left[\left(\frac{1}{r}+\frac{i\omega}{c}\right)\cos(n,r)-\left(\frac{1}{r_1}+\frac{i\omega}{c}\right)\cos(n,r_1)\right]dS$$

لنفترض الآن أن r و r_1 تفوق كثيراً طول الموجة وهو حال الموجات الضوئية دائماً. فتكتب الصيغة (III-104) كما يلي:

$$\text{(III-105)} \qquad V = \int \frac{ia_0}{2\lambda r_1 r} e^{i\omega(t-\frac{r+r_1}{c})}\left[\cos(n,r)-\cos(n,r_1)\right] dS \quad \text{مع} \quad \omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$$

ولكن $a_0 \frac{e^{i\omega(t-\frac{r_1}{c})}}{r_1}$ هي السعة a_1 للموجة الساقطة على النقطة M.

فإذا انبعثت مويجة بهذه السعة من النقطة M تولّد في النقطة P اضطراباً كهرمغنطيسياً

$$\text{(III-106)} \qquad \int \left(\frac{a_1\, dS_1}{r}\right)_{t-\frac{r}{c}} = \int \frac{a_0}{rr_1} e^{i\omega[t-\frac{r+r_1}{c}]} dS \quad , \quad r = MP.$$

هذه هي تقريباً النتيجة التي وصلنا اليها في المعادلة (III-105). ولكن مبدأ هيغنز لا يعطي المعامل التصحيحي Correction factor.

$$\frac{i}{2\lambda}\left[\cos(n,r)-\cos(n,r_1)\right]$$

الذي يدل على أن سعة المويجات التي تصل الى النقطة P تتغير تبعاً للـزوايا التي يكوّنها المتجهان r و r_1 مع المتجه الأحادي n[25] العمودي على صدر الموجة الأولية. وهي متناسبة عكسياً مع طول الموجة.

تتيح المعادلة (III-106) حل مسائل الإنعراج diffraction العاديـة. وتبدو كتطبيق لمبدأ هيغنز. إن حل معادلة دالمبير يعطينا الصيغة الـرياضيـة الدقيقـة لمبدأ هيغنـز والتصحيحات الضرورية لهذا المبدأ.

هـ ـ المعـادلات الكهـرمغنطيسيـة في الأجسـام غـير المغنطيسيـة المتحركة ببطء.

13) مبدأ تطبيق نظرية ماكسويل في حالات الحركة

في تطبيقنا لمفاهيم ماكسويل على الحالات الدائمة وشبه الدائمة إفتـرضنا دائمـاً أن الأجسـام في حالـة السكـون rest، وأهملنـا دراسـة المجـالات التي تكـون فيهـا الأجسام ناقلة أو كهرنافذة (عازلة) متحركة.

غير أن دراستنا للحـالات المتغيرة أظهـرت أن ظاهـرة التحريض الكهـرمغنطيسي تنتـج عن التغير في التـدفق الناتـج عن تغير شـدة التيار الكهـربائي أو عن حـركـة الدارات الكهربائية التي يجتازها تيار ثابت أو حركة الأجسـام المغنطيسية. فتكـافؤ هذه الأسباب لتوليد قوى كهربائية محركة مثبت تجريبياً ونعبر عنه بقانون فاراداي.

$$e = -\frac{d}{dt}\int_S B_n\, dS, \qquad \text{(III-1)}$$

يمكن أن تنتج تغيرات الكمية $B_n dS$ مع الزمن عن تغيرات شـدة التيار أو مـواقع الأجسام المغنطيسية التي تولد المجال B أو عن تغيرات dS. غير أننا لا نعلم مـا إذا كان المجال المغنطيسي يؤثر على دارة كهربائية أو الأجسام الكهرنافذة بذات الطريقة سواء أكانت ساكنة أو متحركة. في الواقع تختلف جذرياً في هذا الموضوع آراء هرتز

---

(25) إذا كان صدر الموجة S_1 كرويا نجد $\cos(n, r_1) = -1$ فيعطي الحساب التقـريبي للتكامـل (III-105) بطريقة دارات فرينل $V = Ae^{i\omega\left(t - \frac{R}{c}\right)}$ (حيث $R = SP$). وتمثـل هذه الصيغـة الكمون الـذي يكوّنـة المصدر S مباشرة في النقطة P مما يعلل مبدأ هيغنز. وحساب التكامل (III-105) في حالة وجود حواجب screens بشقوق slits بين النقطتين S و P يعطي تقديرا صحيحا لصور الإنعراج diffraction.

ولـورنتز Lorentz وأينشتـاين. سنتفحص أولاً الظواهـر التجريبيـة التي تستـوجب تفسيراً.

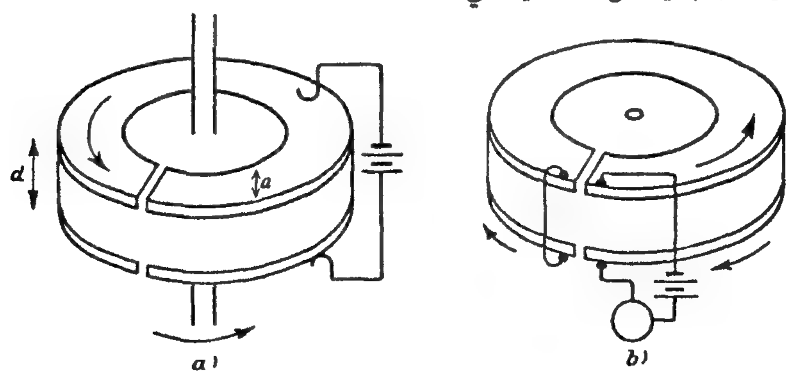
14) تحريك جسم ناقل أو كهرنافذ في المجال الكهربائي

1 ـ لقد قام بالتجارب الأولى على تحريـك الأجسام النـاقلة في المجـال الكهربـائي رولاند H.A. Rowland عام 1875 ثم أكدتها تجارب إيشنوالد Eichenwald. وترتكز هذه التجارب على مقارنـة الظواهـر المغنطيسية النـاتجة عن الـدوران الرتيب لطبق معدني مشحون بكثافة سطحية σ بالظـواهر النـاتجة عن تيـارات بكثافـة I تدور في طبق ثابت. وتتطابق النتائج إذا كانت الكثافات σ و I ترتبط بالعلاقة.

(III-107) $$I = \sigma V$$

التي تعني، كمـا في الفصل الثـاني، تعادُل تيـار النقل وتيـار الحمل convection الناتج عن حركة الجسم الناقل.

2 ـ لقـد قام رونتغن W. C. Rontgen بـالتجارب الأولى عـلى تحريـك الأجسـام الكهرنافذة (العازلة) في المجال الكهربائي عام 1885[26] ثم أكدتهـا تجارب إيشنـوالد عام 1903[27] وقد استعمـل إيشنوالـد مكثفاً كهـربائيـاً مؤلفاً من حلقتـين معدنيتـين ومسطحتين بهما شقّان دقيقان ويفصـل بينهما عـازل من المطاط (انظـر الرسم 11) ويدور المطاط حول المحور zz' ويمكن جعل الحلقتين تدوران مع المطـاط أو لا. كثافـة الشحن الكهربائية على الحلقتين هي



الشكل 11 ـ تجارب رونتغن وايشنوالد

---

(26) W. C. RÖNTGEN. Ann. d. Phys. 35, 1888, 268.

(27) A. EICHENWALD. Ann. d. Phys. 11, 1903, 1 et 421.

$$\sigma_\rho = \frac{\epsilon V}{4\pi d} = \frac{\epsilon E}{4\pi} . \qquad \text{(III-108)}$$

وهذه هي أيضاً كثافة الشحن (باشارة معكوسة) على سطح المطاط العازل. فـإذا تحرك المطاط وحده بسرعة V نتوقع أن نحصل على تيار حمل بكثافة

$$i = \frac{\epsilon E}{4\pi} aV = \frac{\epsilon V}{4\pi d} aV \qquad \text{(III-109)}$$

حسب نتائج المقطع السابق. لكن تجارب رونتغن أثبتت أن التيار الكهربائي هو:

$$i = \frac{(\epsilon - 1)}{4\pi d} Vav = \frac{(\epsilon - 1)}{4\pi} Ea V. \qquad \text{(III-110)}$$

كما لو أن كثافة الشحن الكهربائية على سطح الجسم الكهرنافذ المتحرك هي

$$\sigma_i = (\epsilon - 1) \frac{E}{4\pi} \qquad \text{(III-111)}$$

أي كما لو أن المجال الكهربائي E استُبدل بالمجال

$$E' = \left(1 - \frac{1}{\epsilon}\right) E. \qquad \text{(III-112)}$$

أما إذا دارت الحلقتان مع المطاط كما في تجربة إيشنوالد، فيكون التيار الإجمالي مجموع التيار الناتج عن حركة σ_ρ و σ_i ـ. فإذا استعملنا نتائج تجارب رونتغن تكون كثافة هذه الشحن (III-108) و (III-111). مما يعني أن شدة التيار هي:

$$(\sigma_\rho - \sigma_i)\, av = \frac{\epsilon E}{4\pi} av - \frac{(\epsilon - 1)}{4\pi} Eav = \frac{E}{4\pi} av. \qquad \text{(III-113)}$$

أي:

$$i = (\sigma_\rho - \sigma_i)\, va \frac{E}{4\pi} va = \frac{V}{4\pi d} va. \qquad \text{(III-114)}$$

وشدة التيار هذه لا تتغير مع قيمة ثابت الكهرنافذيـة. لقد أثبتت التجـارب صحة هذه التوقعات المستندة الى نتائج تجارب رولاند. وكان إيشنوالد يقيس انحراف إبرة مغنطيسية نتيجة لهذا التيار. وفي التجربة الثانية كـان يثبت الحلقتين ويقيس شـدة تيار النقل الذي يسبب انحراف الإبرة المغنطيسية ذاته (انظر الرسم 11). وقد كانت النتيجة لا تتغير مع طبيعة الجسم الكهرنافذ ومتفقة مع الصيغة (III-114).

15) تحريك جسم ناقل أو كهرنافذ في مجال مغنطيسي

1 ـ لقد كان تحريك الأجسام الناقلة في مجال مغنطيسي موضوع تجارب فاراداي المعروفة (حركة دارة بين قطبي مغنطيس). وهذا هو مبدأ الدينمو والمولدات الكهربائية.

2 ـ لقد كان تحريك الأجسام الكهرنافذة في مجال مغنطيسي موضوع تجارب ويلسون H. A. Wilson[28]. فقد استعمل جسماً كهرنافذاً بشكل أسطوانة مجوفة وبسماكة a موضوعة بين قطبي مغنطيس. وكانت الصفحتان الداخلية والخارجية للجسم الكهربائي مغطّاتَيْن بطبقتين معدنيتين موصولتين الى طرفي مقياس الشحنة الكهربائي.

من المعروف أن شحنة كهربائية q موضوعة في مجال مغنطيسي B تخضع لقوة لورنتز (أنظر المقطع II-3).

$$F = q\left[\frac{v}{c} \wedge B\right] \qquad \text{(II-3)}$$

مقيسة بنظام الوحدات المختلط. كما لو أنها في مجال كهربائي

$$E = \left[\frac{v}{c} \wedge B\right]. \qquad \text{(III-115)}$$

وفي تجربة ويلسون إذا دارت الاسطوانة العازلة حول محورها المتوازي مع المجال المغنطيسي يتكون مجال كهربائي بالاتجاه الشعاعي للاسطوانة. فإذا كانت الاسطوانة معدنية يكون فرق الكمون الكهربائي بين صفحتيها $V = aE$. أما إذا كانت عازلة فتظهر كثافة استقطاب P بحيث إن:

$$D = \epsilon E = E + 4\pi P \qquad \text{(III-116)}$$

أي:

$$P = \left(\frac{\epsilon - 1}{4\pi}\right) E = \left(\frac{\epsilon - 1}{4\pi}\right)\left[\frac{v}{c} \wedge B\right]. \qquad \text{(III-117)}$$

وقد أظهر قياس كثافة الشحن على صفحتي الاسطوانة العازلة وبواسطة مقياس الشحنة الكهربائي أن هذه الكثافة تساوي تماماً

---

(28) H.A Wilson. Phil. Trans. 204, 1904, 121.

$$\sigma = \left(\frac{\epsilon - 1}{4\pi}\right)\left[\frac{v}{c} \wedge B\right]. \quad \text{(III-118)}$$

وهي تتفق مع الكثافة التي يحدثها مجال كهربائي $E' = \left(1 - \frac{1}{\epsilon}\right) E$ بدلاً من E. فالمجال E' الأصغر من E أو بعبارة أفضل كثافة الاستقطاب P هي التي تولد الشحنة الكهربائية في الأجسام الكهرنافذة المتحركة في مجال مغنطيسي.

16) فرضيات هرتز ولورنتز

سنبحث في الفصل الخامس تجارب الضوء في الأجسام المتحركة (تجارب دوبلر Doppler وفيزو وزيمان). وسنرى أنها كانت تقود الى القبول بمبدأ تكافؤ هياكل الإسناد التي تتحرك بسرعة ثابتة الواحد بالنسبة الى الآخر ولكن بسرعة أقل بكثير من سرعة الضوء (بحيث انه يمكن إهمال الكميات v^2/c^2 وذلك قبل صياغة نظرية النسبية الخاصة. وهذا المبدأ كان يعبر عنه إما بفرضية الانسحاب translation (الجر) الكامل لموجات الضوء مع الأجسام المتحركة (التي طرحها ستوكس) أو بفرضية الانسحاب الجزئي (التي طرحها فرينل).

ولقد أراد هرتز أن يعمم فرضية ستوكس لتشمل جميع الظواهر الكهرمغنطيسية فافترض أن أثير ماكسويل الذي يرتبط به المجالان E و H ومجالا التحريض D و B يتحرك تماماً مع المادة (الجر الكامل) ولكن التجارب التي عرضناها في المقطعين السابقين أظهرت عدم صحة نظرية هرتز[29]. إذ إن مجال التحريض الكهربائي D مثلاً يكتب بالصيغة

$$D = E + 4\pi P.$$

فكثافة الاستقطاب P ترتبط بوجود الوسط المادي مما يعني أنها تنتقل تماماً مع الجسم بينما المجال E لا يُسحب مطلقاً مع الجسم. وهذه النتائج تفسر بصورة طبيعية بواسطة نظرية لورنتز المجهرية المبنية على فرضية الأثير الثابت. فالمجالان المجهريان e و h اللذان يدخلان في تحديد المجالين العيانيين E و B يرتبطان بالأثير الثابت. بينما كثافة الاستقطاب الكهربائي P وكثافة العزم المغنطيسي M يتحركان تماماً مع المادة المتحركة. مما يعني أن المجالين العيانيين D (المرتبط بالمجال E

(29) نظرية هرتز تقود إلى موازنة كاملة بين تيارات رونتغن ورولاند في تجربة إيشنوالد. خلافا لنتائج هذه التجربة (للتوسع في هذا الموضوع يرجع إلى الصفحات 387 و 397 من بلوش [2] :L. Bloch.

والكثافة P) و H (المرتبط بالمجال B والكثافـة M) يتحركـان جزئيـاً مع المـادة. فكل شيء يحدث كما لو أن المجال E مثلاً يستبدل بـالمجال $E' = \left(1 - \frac{1}{\epsilon}\right) E$ استنـاداً الى التجارب المذكورة أعلاه. هكذا تتيح فرضية لـورنتز الإلتقـاء مع نتـائج فـرضية فرينل في البصريات المستندة الى انسحاب جزئي في حالات السرعة الخفيفة للأجسام على الأقل ($c \gg 0$).

نكتفي هنا بهذا التحليل الوصفي لنظـريات تستنـد الى أسس تجاوزتهـا نظريـة النسبيـة الخاصـة ونتائجهـا. ولكنه كـان لا بـد من التعـرض لهـا لتبيـان الأسس الفيزيائية المنطقية والتجريبية لنظـرية اينشتـاين. فسنرى أن نظـريات مـاكسويـل ولورنتز تقود طبيعياً الى النسبية الخاصة.

تمارين

1 ـ انطلاقاً من صيغ الموجات المستوية (III-62)

$$E = E_0 e^{i\omega t - \gamma^2} \quad , \quad H = H_0 e^{i\omega t - \gamma^2} \quad (i = \sqrt{-1})$$

إثبت العلاقات بين مركبات المجالين E و H وذلك بـإحلال هـذه الصيغ في المعادلات (I) و (II) و (III). إثبت ما يلي:

ـ المجالان E و H مستعرضان Transverse (أي $E_z = H_z = 0$)

ـ المجالان E و H متعامدان ويرتبطان بالعلاقات:

$$\frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} = \pm \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon - \dfrac{4\pi\sigma_c}{\omega}}}$$

2 ـ لننظر في تعديل لمعادلات ماكسويل بحيث يدخل فيها الكمون الكهرمغنطيسي V و A (وهو مجال ميزوني meson أو فوتوني مع فوتون ثقيل)

$$\text{curl } H = \frac{e}{c}\frac{\partial E}{\partial t} + k_0^2 A, \quad \text{div } E = k_0^2 V$$

$$\text{curl } E = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial H}{\partial t}, \quad \text{div } H = 0.$$

ونفترض أن هذا التعديل طفيف بمعنى أن ($k_0^2 \ll 1$) حيث k_0 ثـابت. إثبت أن لهذه المعادلات حلاً بصيغة مـوجات مستـوية ولكن بمجـال كهربـائي ذي مركبة طولية ($E_z \neq 0$) longitudinal. إثبت استنـاداً الى هذه المعـادلات شرط لورنتز بين دوال الكمون (نشـير الى أن هذا الشرط مفـروض مسبقاً في نظـرية ماكسويل) إثبت معادلات الإنتشار.

3 ـ إثبت أن الموجة المستوية $E = E_0 e^{i\omega t - \gamma^2}$ التي هي حـل للمعادلـة (III-58) هـي حل أيضاً للمعادلة

$$\frac{\mu\,\epsilon'}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \Delta E = 0 \quad \text{مع} \quad \epsilon' = \epsilon - 4\pi i \sigma_c \tau \quad \left(\tau = \frac{1}{\omega}\right)$$

إثبت أنه يمكن كتابة E بشكل موجة توافقية مخمدة damped

$$E = E_0 e^{-\frac{p'z}{\tau}} e^{\frac{1}{\tau}(t - pz)}$$

مع

$$p = \frac{1}{u} = \frac{n}{c}, \quad p' = \frac{k}{c}$$

حيث $k = \dfrac{2\pi\mu\sigma_c\tau}{n}$ هو معامل الإمتصاص في الجسم.

مصادر المجال الكهرمغنطيسي ـ نظرية لورنتز

لقد جاءت نظرية لورنتز[1] عام 1892 بعد التجارب العديدة التي أظهرت في أواخر القرن التاسع عشر الطبيعة الجسيمية corpuscular للمادة والكهرباء. فإذا استعملنا فرضية البنية الذرية للمادة لفهم بعض الظواهر المعروفة مثل الكهرلة (التحليل الكهربائي) Electrolysis نصل حتماً الى أن الكهرباء غير متواصلة. فأية شحنة كهربائية تساوي الشحنة الأساسية e عدداً صحيحاً من المرات. ويمكن قياس الشحنة الأساسية مباشرة أو غير مباشرة.

فالقياس المباشر يكون بتحديد شحنة النقط الدقيقة المتساقطة بين لوحتي مكثف كهربائي (ميليكان Millikan[2] وإرنهافت Ehrenhaft وريجينر Regener[3]) أو بقياس الشحنة التي تحملها أشعة α المنبعثة من الراديوم c (ريجينر Regener[4])[5].

أما القياسات غير المباشرة المعروفة في عصر لورنتز فقد كانت تستند الى معرفة

(1) Cf. H.A. LORENTZ. The Theory of Electrons. Leipzig 1916. - W. Gerlach. Hand. d. Phys. 22-II-2 (Berlin 1933): - L. Reosenfeld. Theory of Electrons. Amsterdam 1951. - R. Becker. Théorie des électrons. Paris Alcan.

(2) A. MILLIKAN. - Phys. Rev., 1913, 136; Phys. Rev., 14, 1913, 796.

(3) E. REGENER. Z. f. Phys. 39, 1926, 247.

(4) E. REGENER. Berl. Ber. 1909, 948.

(5) نُشير ايضا إلى قياس e باستعمال ظاهرة شروت Schrott
W. SCHOTTKY. Ann. d. Phys. 65, 1918, 541; 68, 1922, 157.

عدد أفوغادرو Avogadro الذي كان يحدد بمعرفة ثابت بولتزمان أي استناداً الى نتائج النظرية الحركية Kinetic theory للغازات. وقد كانت هذه القياسات موضوع أساليب عديدة طبقت على الحركة البراونية Brownian motion وطورها كثيرون ومنهم جان بيرين Jean Perrin.

فإذا استعملنا ثابت فاراداي F = 96 600 C نجد أن الشحنة الكهربائية الأساسية هي:

$$e = \frac{96\,600}{N} = 4.77 \times 10^{-10} \text{ u.e.s CGS}$$

حيث N هو عدد أفوغادرو.

ومن جهة ثانية، إن قياس انحراف الأشعة المَهبطيّة في مجال كهربائي ومغنطيسي مشترك يتيح قياس النسبة $\frac{e}{m}$. فإذا مرت جسيمات من نوع واحد وبسرع متنوعة ولكن باتجاه واحد في مجالين كهربائي ومغنطيسي متوازيين ومتعامدين على الاتجاه الأساسي للجسيمات فإنها تنحرف وتتوزع على خط قطعي مكافىء Parabolic.

$$\frac{y^2}{x} = \frac{1}{2} \frac{e}{m} \frac{H^2}{c^2} \frac{\ell^2}{E}$$

ففي حالة الأشعة المهبِطية نجد دائماً النسبة ذاتها

$$\frac{e}{m} = 1.76 \times 10^7 \text{ u.e.m. CGS}$$

1 ـ المجالات ودوالّ الكمون المجهرية للإلكترون

يفرض وجود الإلكترونات إعادة صياغة للنظرية تستند الى المجالات المجهرية التي تكوِّنها هذه الشحن الكهربائية. فوصف المجال الكهرمغنطيسي يجب أن يستند الى خصائص تحرك الشحن الكهربائية في الفراغ (الخلاء). وبناء على هذه المعلومات يجب تفسير تكوين المجالات الكهرمغنطيسية ومجالات التحريض وخصائصها التي تدخل في نظرية ماكسويل.

يفترض لورنتز أن وجود الشحنة الكهربائية وحركتها يتيحان معرفة المجالين المجهريين e و h المرتبطين بالشحنة. أما مجالا التحريض فهما ظاهرة إجمالية، أي تتعلق بالجسم ككل ولا تدخل في تحليل الظواهر الأساسية. لنفترض أن ρ هي كثافة

الشحن الكهربائية وأن v هي سرعة هذه الشحن. إن النوع الوحيد الممكن للتيار الكهربائي في هذه النظرية هو تيار النقل الناتج عن حركة الإلكترونات.

تفترض نظرية لورنتز أن الإلكترونات تتحرك في أثير ثابت وأن معادلات شبيهة بمعادلات ماكسويل تربط بين e و h و ρ و ρv. فتصبح معادلات ماكسويل (I) و (II) و (III).

$$\text{curl } h = \frac{4\pi}{c} \rho v + \frac{1}{c}\frac{\partial e}{\partial t} \qquad \text{(IV-1)}$$

$$\text{curl } e = -\frac{1}{c}\frac{\partial h}{\partial t} \qquad \text{(IV-2)}$$

$$\text{div } e = 4\pi\rho \qquad \text{(IV-3)}$$

$$\text{div } h = 0 \qquad \text{(IV-4)}$$

أما كثافة القوة التي تؤثر على الشحن فهي

$$f = \rho\left[e + \frac{1}{c}[v \wedge h]\right] \qquad \text{(IV-5)}$$

هذه القوى التي تؤثر على الإلكترون ذاته يجب أن توازن قوى أخرى إذا كان الإلكترون غير نقطي والا فلن يكون مستقراً stable بل ينفجر. نشير[6] هنا الى أن المعادلات الأساسية لنظرية الإلكترونات (IV-1) الى (IV-5) هي معادلات بين المجالات وكميات متواصلة. فمميزات الجسيم لا تظهر مباشرة ووجودها بحد ذاته يكون موضع تساؤل إذا كانت القوة (IV-5) وحدها تلعب دوراً في النظرية.

أما صيغ كثافة الطاقة وتدفق الطاقة المتعلقة بالإلكترون فيمكن كتابتها استناداً لنظرية ماكسويل.

$$u = \frac{1}{8\pi}(e^2 + h^2) \qquad \text{(IV-6)}$$

$$s = \frac{1}{4\pi}[e \wedge h]. \qquad \text{(IV-7)}$$

(6) انظر في الصفحة 39 من [1] .R. BECKER

ويمكن أن ننطلق من الصيغة (IV-5) لحساب كثافة القوة f تبعاً للمجالين e و h. فإذا استعملنا الصيغ (IV-3) للكثافة ρ و (IV-1) للتيار ρv والمعادلة (IV-2) نجد المركبات التالية للقوة

$$(IV\text{-}8)_1 \qquad f_x = -\frac{1}{c}\,\frac{\partial s_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\,T_{xx} + \frac{\partial}{\partial y}\,T_{xy} + \frac{\partial}{\partial z}\,T_{xx}$$

$$(IV\text{-}8)_2 \qquad f_y = -\frac{1}{c}\,\frac{\partial s_y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\,T_{yx} + \frac{\partial}{\partial y}\,T_{yy} + \frac{\partial}{\partial z}\,T_{yz}$$

$$(IV\text{-}8)_3 \qquad f_z = -\frac{1}{c}\,\frac{\partial s_z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\,T_{zx} + \frac{\partial}{\partial y}\,T_{zy} + \frac{\partial}{\partial z}\,T_{zx}$$

حيث وضعنا

$$(IV\text{-}9) \quad T_{pq} = \frac{1}{4\pi}\begin{vmatrix} e_x^2 + h_x^2 - \frac{1}{2}(e^2+h^2) & e_x e_1 y + h_x h_y & e_x e_z + h_x h_z \\ e_x e_y + h_x h_y & e_y^2 + \frac{2}{y} - \frac{1}{2}(e^2+h^2) & e_y e_z + h_y h_z \\ e_x e_z + h_x h_z & e_y e_z + h_y h_z & e_z^2 + h_z^2 - \frac{1}{2}(e^2+h^2) \end{vmatrix}$$

إذا حسبنا تكامل المعادلة (IV-8) على الحجم $\mathcal{V}$ مع التحديدات

$$(IV\text{-}10) \qquad F = \int f d\mathcal{V}, \text{ و } S = \int s d\mathcal{V},$$

نجد مثلاً

$$(IV\text{-}11) \qquad F_x = -\frac{1}{c}\,\frac{\partial S_x}{\partial t} + \int \Big[T_{xx}\cos(n,x) + T_{xy}\cos(n,y) + T_{xz}\cos(n,z)\Big]\, dS,$$

وعلاقتين مشابهتين للمركبتين F_y و F_z.

إذا افترضنا أن القوى الكهرمغنطيسية هي الوحيدة، تكون F القوة الإجمالية التي تؤثر على الحجم $\mathcal{V}$. وتساوي تغيُّر زخم المادة $P^{(m)}$ داخل الحجم $\mathcal{V}$ في وحدة الزمن حسب قانون نيوتن. فنكتب إذاً:

$$(IV\text{-}12) \qquad F = \frac{dP^{(m)}}{dt}, \; P^{(m)} = (P^{(m)}_x, P^{(m)}_y, P^{(m)}_z).$$

وإذا وضعنا:

$$P^{(r)} = \frac{S}{c} \text{ و } P^{(r)} = \int P^{(r)} d\mathscr{V} \quad , \quad P^{(r)} = P^{(r)}_x, P^{(r)}_y, P^{(r)}_z. \qquad \text{(IV-13)}$$

نجد استناداً إلى (IV-11)

$$\frac{d}{dt}\left(P^{(m)}_x + P^{(r)}_x\right) = \int_S (T_{xx} \cos(n, x) + T_{xy} \cos(n, y) + T_{xz} \cos(n, z)] dS \qquad \text{(IV-14)}$$

ومعادلتين مشابهتين للمركبتين على المحاور Oz و Oy.

تمثل T_{pq} الضغط الكهرمغنطيسي. وتعبر المعادلة (IV-14) عن قانون المحافظة على الزخم العام. $P^{(m)}$ يمثل زخم المادة و $P^{(r)}$ يمثل زخم الإشعاع ومجموعهما هو الزخم العام للحجم $\mathscr{V}$. تمثل إذاً الكمية.

$$p^{(r)} = \frac{s}{c} = \frac{1}{4\pi c} [e \wedge h]. \qquad \text{(IV-15)}$$

كثافة الزخم في الحجم $\mathscr{V}$ الناتج عن وجود المجال الكهرمغنطيسي المجهري e و h.

2 ـ تركيب إلكترون لورنتز

إن أبسط فرضية لتركيب الإلكترون هي أنه يشبه كرة مشحونة شعاعها محدود. النظريات الأولى هفيسايد Heaviside[7]، سيرل Searle، طومسون J. J. Thomson وأبراهام Abraham كانت تفترض أن الإلكترون كروي وصلب. إستناداً الى المعادلة (IV-13) تكون كثافة زخم المجال الكهرمغنطيسي الذي يكوّنه هذا الإلكترون.

$$h = \frac{1}{c} [v \wedge e]^{(8)}. \quad \text{مع} \quad p^{(r)} = \frac{s}{c} = \frac{1}{4\pi c} [e \wedge h] \qquad \text{(IV-15)}$$

نجد إذاً:

$$p^{(r)} = \frac{1}{4\pi c^2} \left[e \wedge (v \wedge e)\right] = \frac{1}{4\pi c^2} \left(v.e^2 - e\,(v.e)\right) \qquad \text{(IV-16)}$$

---

(7) سنرى أن هذا النموذج الذي توسّع فيه ابراهام خصوصا لا يتفق مع نتائج النسبية الخاصة.

(8) في الواقع يجب أن نستبدل المجال e بالمجال النسبي e′ الناتج عن حركة الشحن. ولكن الفرق بين هذين المجالين متناسب مع $\beta = \frac{v}{c}$ (انظر المقطع 3). فيكون هذا الفرق صغيراً جداً في اغلب الحالات وهذا ما سنفترضه في ما يلي.

فإذا كانت حركة الإلكترون باتجاه oz $(v = \nu_z = \nu)$ نجد

(IV-17) $$p_z^{(r)} = \frac{\nu}{4\pi c^2}\ (e_x^2 + e_y^2)$$

ويكون زخم المجال الكهرمغنطيسي العام

(IV-18) $$P_z^{(r)} = \frac{\nu}{4\pi c^2} \int_{\mathcal{V}} (e_x^2 + e_y^2)\, d\mathcal{V}.$$

ولكن إذا كان توزيع الشحن الكهربائية داخل الإلكترون ذا تناظر كروي نجد:

(IV-19) $$e_x^2 + e_y^2 = \frac{2}{3}\ e^2$$

وإذا استعملنا الإحداثيات الكروية يمكن أن نكتب:

(IV-20) $$e = \frac{q}{r^2}\ ,\quad d\mathcal{V} = 4\pi r^2\, dr.$$

لنفترض أن شحنة الإلكترون q موزعة على سطح كرة شعاعها r_0 الذي يمثل شعاع الإلكترون. عندما ينعدم المجال الكهربائي داخل هذه الكرة، يجب حساب التكامل (IV-18) في الفضاء خارج الكرة فنجد إذاً:

(IV-21) $$P^{(r)} = \frac{\nu}{4\pi c^2} \int_{r_0}^{\infty} \frac{2}{3}\ \frac{q^2}{r^4}\ .\ 4\,\pi r^2\, dr = \frac{2\, v\, q^2}{3\, c^2\, r_0}\ .$$

وبما أن $P^{(r)}$ هو الزخم تكون كتلة الإلكترون

(IV-22) $$m_0 = \frac{2q^2}{3c^2\, r_0}$$

وتسمى m_0 «كتلة الإلكترون الكهرمغنطيسية». ولكن هذا التحديد لا يحمل أي معنى عملي إلا إذا كان قياس شعاع الإلكترون r_0 ممكناً. كما يمكن أن نعتبر العلاقة (IV-22) تحديداً للشعاع r_0 تبعاً لقيم q و m_0.

(IV-23) $$r_0 = \frac{2q^2}{3c^2 m_0} \simeq 1.9 \times 10^{-13}$$

وبالتحديد يمثل r_0 شعاع الجسيم إذا اعتبرنا أن كل كتلته ذات أصل كهرمغنطيسي. ونعلم أن هذه المسافة تحدد منطقة من الفضاء حيث لا يمكن كتابة القواعد العادية للكهرمغنطيسية الا ببعض التحفظات.

ومن جهة ثانية يمكن أن نحسب طاقة الجسيم وهو ساكن استناداً الى المعادلة (IV-6) باعتبارها الطاقة الاجمالية للمجال الكهرمغنطيسي فنجد:

$$U_0 = \frac{1}{8\pi} \int_{\mathcal{V}} e^2 \, d\mathcal{V} = \frac{1}{8\pi} \int_{r_0}^{\infty} \frac{q^2}{r^4} \, . \, 4\pi r^2 \, dr = \frac{q^2}{2r_0} \, . \qquad \text{(IV-24)}$$

وإذا قارنا النتائج (IV-22) و (IV-24) نحصل على العلاقة

$$m_0 = \frac{4}{3} \; \frac{U_0}{c^2} \, . \qquad \text{(IV-25)}$$

التي تربط بين كتلة وطاقة الجسيم في حال السكون.

يجب ألا نفاجأ بالفرضية القائلة بأن لكتلة الجسيم جذوراً كهرمغنطيسية إذ إن حركة الجسيم تولد مجالاً مغنطيسياً. فإذا خففنا سرعته مثلاً ينتج عن تغيرات المجال المغنطيسي مجال كهربائي يسبب حسب قواعد التحريض المعروفة تسريعاً acceleration للجسيم. فتخفيف سرعة الإلكترون يولد إذاً قوى عطالية تعود بسببها الى التحريض الكهرمغنطيسي.

غير أن فرضية الجذور الكهرمغنطيسية للكتلة التي تبدو معقولة لا يمكن تأكيدها (أو رفضها) تجريبياً. إذ إن ذلك يتطلب قياساً للشعاع r_0. ومن جهة ثانية فإن المعامل 4/3 في المعادلة (IV-25) هو اعتباطي لأنه يرتكز على فرضية معينة لتوزيع الشحنة الكهربائية داخل الإلكترون.

ولقد استبدلت لاحقاً نظرية أبراهام عن الإلكترون الصلب بنظرية بوشرر Bücherer ولورنتز عن الإلكترون ذي الشكل المتبدل، إذا افترضنا أن الإلكترون المتحرك بسرعة v يتقلص باتجاه الحركة بالنسبة $\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ حيث $\beta = \frac{v}{c}$. وهذه الفرضية التي أوحت بها نتائج تجربة ميكلسون Michelson وثيقة الصلة بمفاهيم النسبية الخاصة. ولن نحاول تعليلها هنا إذ إننا سنخلص إليها لاحقاً بطريقة أكثر إقناعاً. (انظر المقطع 11 من الفصل الخامس). نشير هنا فقط الى أي حد تختلف نتائج لورنتز عن نتائج أبراهام.

لنفترض أن الإلكترون يتحرك باتجاه oz بسرعة v وأن كثافة الشحن بداخله هي ρ_0 (X, Y, Z) إذا كان ساكناً. لدى الحركة تصبح هذه الكثافة:

$$\rho\,(xyz) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \rho_0\left(x,\, y,\, \frac{z}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) \tag{IV-26}$$

تقود هذه الفرضية الى أن كثافة الزخم الكهرمغنطيسي باتجاه oz هي:

$$p_z^{(r)} = \frac{\nu}{4\pi c^2 \sqrt{1-\beta^2}}\,(e_x^2 + e_y^2) \tag{IV-27}$$

وبحساب مشابه لما سبق نجد أن الزخم الإجمالي هو:

$$P^{(r)} = \frac{v}{4\pi c^2 \sqrt{1-\beta^2}} \int_{r_0}^{\infty} \frac{2}{3}\,\frac{q^2}{r^4}\,.\,4\pi r^2\,dr = \frac{2}{3}\,\frac{v}{c^2}\,\frac{q^2}{r_0\sqrt{1-\beta^2}} \tag{IV-28}$$

مما يعني أنه يجب استبدال الصيغة $P = m_0 v$ للزخم بالصيغة

$$P^{(r)} = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{IV-29}$$

شرط أن نضع كما في (IV-25)

$$m_0 = \frac{2}{3}\,\frac{q^2}{c^2 r_0} = \frac{4}{3}\,\frac{U_0}{c^2}\,. \tag{IV-25}$$

تثبت التجربة صحة الصيغة (IV-29) وليس $P = m_0 v$ المستخلصة من فرضية أبراهام. فإذا أعدنا النظر بانحراف جسيمات مشحونة في مجال كهربائي ومغنطيسي مشترك وإذا افترضنا صحة صيغة لورنتز (IV-29) نجد أن الجسيمات تتوزع على الخط

$$\frac{y^2}{x} = \frac{1}{2}\,\frac{e}{m}\,\frac{H^2}{c^2}\,\frac{\ell^2}{E}\,\sqrt{1-\left(\frac{\nu^2}{c^2}\right)} \tag{IV-30}$$

يزداد افتراق هذه الصيغة عن مثيلتها $\frac{y^2}{x} = \frac{1}{2}\,\frac{e}{m}\,\frac{H^2}{c^2}\,\frac{\ell^2}{E}$ المبنية على العلاقة $P = m_0 v$ كلما اقتربت سرعة الجسيم من سرعة الضوء. وتتفق النتائج التجريبية تماماً مع الصيغة (IV-30) (أنظر المقطع 2 من الفصل العاشر).

ومن جهة ثانية إذا كان الإلكترون تحت تأثير قوة F نجد استناداً الى الصيغة (IV-29).

(IV-31) $$P = v/ (\nu^2) \quad \text{مع} \quad F = \frac{d\,p}{d\,t}$$

فإذا جزَّأنا F الى مركَّبة باتجاه v ومركبة متعامدة مع v نجد

(IV-32) $$F = F_\ell + F_t = \frac{d\,v}{d\,t}\ f(\nu^2) + 2v\,f'(\nu^2).\ v.\ \frac{d\,v}{d\,t}$$

أي:

(IV-33) $$F_\ell = \left(\frac{d\,v}{d\,t}\right)_\ell [f(\nu^2) + 2\nu^2 f'(\nu^2)] = \left(\frac{d\,v}{d\,t}\right)_\ell \frac{d\,P}{d\,v}$$

(IV-34) $$F_t = \left(\frac{d\,v}{d\,t}\right)_t f(\nu^2) = \left(\frac{d\,v}{d\,t}\right)_t \frac{P}{v}$$

فتكون المركِّبات الطولية والمستعرضة للقوة F_l و F_ℓ متناسبة مع المركبات المماثلة للتسريع.

$$\gamma_t = \left(\frac{d\,v}{d\,t}\right)_t \quad \text{و} \quad \gamma\ell = \left(\frac{d\,v}{d\,t}\right)_{l\ell}$$

شرط أن نستعمل كتلة عطالية مختلفة في كل حالة. لذلك يمكن أن نحدد «الكتلة الطولية» بـ:

(IV-35) $$m_\ell = \frac{d\,P}{d\,v} = \frac{m_0}{(1-\beta^2)^{3/2}}$$

والكتلة المستعرضة» بـ:

(IV-36) $$m_t = \frac{P}{v} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

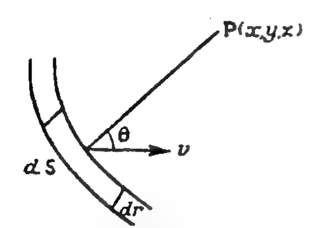
في الواقع ستغير النسبية الخاصة هذه النتائج لأن القوة لن تحدد بالصيغة $F = m\gamma$ كما سنرى. وتبقى علاقة لورنتز (IV-29) التي تؤكدها التجربة وحدها صحيحة مع النسبية الخاصة. غير أنه لن يكون لها التأويل الذي أعطي لها هنا. فقد ظن أولاً أن الكتلة الكهرمغنطيسية المحددة بالعلاقة (IV-25) تتغير وحدها مع السرعة بينما الكتلة الميكانيكية تبقى بدون تغيير. وقد عقد الأمل على تجارب تصوير طيف spectrography الكتلة للفصل بين المساهمات الكهرمغنطيسية والمساهمات الميكانيكية في تكوين الكتلة.

وقد كان مفترضاً أن يؤدي تأكيد التجارب لصحة صيغة لورنتز الى الاستخلاص أن كل كتلة الجسيم لها أصل كهرمغنطيسي. عندئذ يجب استبعاد وجود كتلة ميكانيكية وزوجيّة أساسية

A و φ دالتي ماكسويل وهرتز للكمون الذي يكونه في الوقت t وفي النقطة $P(x, y, z)$ الجزء من الحجم $d\mathcal{V} = d\xi d\eta\, d\zeta$ الذي يحتوي على كثافة شحن كهربائية $\rho\left(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{c}\right)$ وكثافة تيار $\rho v\left(\xi, \eta, \zeta\, t - \frac{r}{c}\right)$. لحساب التكاملات (IV-42) و (IV-43) لدوال تحسب في أزمنة مختلفة $t - \frac{r}{c}$ نستعمل الطريقة التالية التي اقترحها بلانك Planck. لنفترض أن كرة مركزها النقطة $P(x, y, z)$ تصغر تدريجياً بحيث إن سطحها يخترق بالتوالي كل المنطقة $d\mathcal{V}$. يمر هذا السطح في الزمن $t - \frac{r}{c}$ في النقطة $M(\xi, \eta, \zeta)$ حيث الكثافة ρ وشدة التيار ρv. يجمع هذا السطح بالتوالي مساهمات مختلف المناطق في الفضاء للكمون المكون في النقطة P.

بين الأوقات τ و $\tau + d\tau$ يكون شعاع هذه الدائرة بين $r = c(t - \tau)$ و $r' = r - cd\tau$. لنأخذ الجزء من الحركة الكروية ذي السماكة dr والمساحة ds (أنظر الرسم 12) تحمل الحلقة الكروية الشحنة الكهربائية[9].

$$(IV\text{-}44)_1 \qquad \int \rho\,(x, y, z, \tau)\, ds\, dr$$



الشكل 12 ـ طريقة حساب دالتي ماكسويل ـ هرتز للكمون

ولكن هذه الشحن تتحرك بسرعة v سواء نحو داخل الكرة أو خارجها. والشحنة التي تخترق سطح الكرة خلال الوقت dτ هي:

$$(IV\text{-}44)_2 \qquad \int \rho ds.\, v\cos\theta.\, d\tau = \int \rho\, \frac{(\mathbf{v.r})}{r}\, ds\, d\tau = \int \rho\, \frac{(\mathbf{v.r})}{cr}\, ds\, dr.$$

فتكون الشحنة الكهربائية التي جمعها السطح الكروي المتحرك خلال الوقت dτ

(9) التكامل (IV-44) لا يتغير كثيراً بين الوقت t والوقت τ+dτ وينعدم هذا التغير في الحدود $dr \to 0$.

الفرق بين $(IV\text{-}44)_1$ و $(IV\text{-}44)_2$ أي

$$q = \int \rho \left[1 - \frac{(\mathbf{v}.\mathbf{r})}{c r} \right] ds\, dr \qquad (IV\text{-}45)$$

ولكن الصيغة

$$\rho \left[1 - \frac{(\mathbf{v}.\mathbf{r})}{c r}\right] \qquad (IV\text{-}46)$$

تمثل الشحنة dq الموجودة داخل الحجم $d\mathscr{V} = ds\, dr$ شرط أن تكون المساحة ds كبيرة جداً بالمقارنة مع dr. في هذه الحالة يكون تدفق الشحن خلال dr صغيراً جداً بالمقارنة مع التدفق خلال ds مما يعني أن:

$$\rho\, d\mathscr{V} = \frac{dq}{1 - \frac{(\mathbf{v}.\mathbf{r})}{c r}} \qquad (IV\text{-}47)$$

فتكتب الصيغ (IV-42) و (IV-43) كما يلي:

$$A = \frac{1}{c} \int \frac{v\, dq}{\left[r - \frac{(\mathbf{v}.\mathbf{r})}{c}\right]_{t - \frac{r}{c}}} \qquad (IV\text{-}48)$$

$$\varphi = \int \frac{dq}{\left[r - \frac{(\mathbf{v}\cdot\mathbf{r})}{c}\right]_{t - \frac{r}{c}}} \qquad (IV\text{-}49)$$

وإذا كانت الشحنة الكهربائية صغيرة جداً تكون الكميات $r - \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}}{c}$ تقريباً ثابتة في المنطقة التي حجمها r_0^3 تقريباً. فيمكن عندئذ أن نكتب

$$A = \frac{q v}{c\left[r - \frac{\mathbf{v}.\mathbf{r}}{c}\right]_{t - \frac{r}{c}}} \qquad (IV\text{-}50)$$

$$\varphi = \frac{q}{c\left[r - \frac{\mathbf{v}.\mathbf{r}}{c}\right]_{t - \frac{r}{c}}} \qquad (IV\text{-}51)$$

تسمى هاتان الدالّتان للكمون الذي يكوِّنه الإلكترون دالتي لينارد ـ فيشرت

Liénard Wiechret. وتتيح هاتان الصيغتان حساب المجالات الكهرمغنطيسية باستعمال العلاقتين.

$$E = -\text{grad}\,\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t} \qquad \text{(IV-52)}$$

$$H = \text{curl}\,A \qquad \text{(IV-53)}$$

فتجد الصيغ التالية[10] إنطلاقاً من المعادلتين (IV-50) و (IV-51)

$$E = E_1 + E_2 \quad H = H_1 + H_2 \qquad \text{(IV-54)}$$

حيث:

$$E_1 = \frac{a(1-\beta^2)}{\left(r - \frac{\mathbf{r.v}}{c}\right)^2}\left(\mathbf{r} - \mathbf{v}\frac{r}{c}\right),\ H_1 = \frac{\mathbf{v}}{c} \wedge E_1 \qquad \text{(IV-55)}$$

$$\mathbf{E_2} = \frac{q}{\left(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{r.v}}{\mathbf{c}}\right)^{3} c^2}\left[\mathbf{r} \wedge \left(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{v}}{c}\,r\right) \wedge \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\right],\ H_2 = \frac{\mathbf{r}}{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{E_2} \qquad \text{(IV-56)}$$

يرمز المجالان E_1 و H_1 الى مجالي الإلكترون إذا كانت سرعته ثابتة إذ يكوّن هذا الإلكترون مجالين ينقلهما معه. بينما المجالان E_2 و H_2 يتعلقان فقط بحالات السرعة المتغيرة فيرتبطان إذاً بظواهر التسريع أو كبح السرعة. نشير الى أن E_2 و H_2 يتناقصان مثل $\frac{1}{r}$ على مسافة بعيدة عن الشحنة بينما E_1 و H_1 يتناقصان أسرع من ذلك مثل $1/r^2$ مما يعني أن E_2 و H_2 هما الغالبان بعيداً عن الشحنة الكهربائية. نشير أيضاً الى أن E_2 و H_2 متعامدان على اتجاه الإنتشار r وهي خصائص مميزة للموجة الكهرمغنطيسية الكروية المرتبطة بالحركات المسرعة للشحن الكهربائية.

لدى دراستنا لنظرية ماكسويل أخذنا بعين الاعتبار خصائص الإلكترونات مما أتاح لنا تفسير ظواهر استقطاب الأجسام الكهرنافذة وتمغنط الأجسام المغنطيسية. من المؤكد أن نظرية ماكسويل تبدو أكثر وضوحاً إذا استُخلصت خصائص الأجسام الكهرنافذة والمغنطيسية من خصائص الشحن والتيارات. غير أن النظريات الكاملة لظواهر الإستقطاب والتمغنط لا بد أن تدخل فيها حركة الإلكترونات داخل

---

(10) إرجع مثلاً إلى الصفحة 72 من [1] R. BECKER.

الـذرات. ولكن هذه المسـائل التي بحثت في البـدء استنـاداً الى نمـاذج كـلاسيكيـة للإلكترونات مرتبطة بالنواة بقوى مرنة لا يمكن دراستها فعلاً إلا في نطاق الميكانيـك الكمومي. سنكتفي هنا باستخلاص نظرية ماكسويل من مبادىء نظرية لورنتز.

4 ـ معادلات القيم الوسطية ونظرية ماكسويل العيانية.

تنطبق المعادلات (IV-1) و (IV-2) و (IV-3) و (IV-4) على المجالين المجهـريين h و e خارج الإلكترونـات وداخلها كمـا يفترض لـورنتز. نطبق هنـا هذه المعـادلات في منطقة كبيرة الى درجـة احتواء عـدد كبير من الجـزيئيات ولكنهـا صغيرة الى درجـة يمكن فيهـا اعتبار المجـالات E و H و D و B لا تتغير من نقطـة الى أخرى في هـذه المنطقة. إذ إن هذه المجالات تتغير ببطء على مسافـات تضاهي شعـاع الجزيئيـات. بهذه الحالة يمكن أن نستبدل التغاير heterogeneity المجهري من نقطة الى أخـرى بالتواصل الظاهري.

لحساب القيمة الوسطية لكمية فيزيائية A في النقطة P (x, y, z) والوقت t_1 نحيط هذه النقطة بكرة صغيرة شعاعها a وحجمها $\mathscr{V}$. فتكون القيمة الوسطيّة

$$(IV\text{-}57)\quad \overline{A} = \frac{1}{2\tau}\ \frac{1}{\mathscr{V}} \int_{-\tau}^{+\tau}\int_{\mathscr{V}} A\,(x+\xi,\ y+\eta,\ z+\zeta,\ t+\theta)\ d\xi\ d\eta\ d\zeta\, d\theta$$

حيث يحسب التكامل داخـل الكرة وفي الفتـرة الزمنيـة $t-\tau, t+\tau$. ويمكن أن نثبت أن مشتق القيمة الوسطية هو القيمة الوسطية للمشتق أي:

$$(IV\text{-}58)\quad \frac{\partial\overline{A}}{\partial t} = \overline{\frac{\partial A}{\partial t}}\quad ,\quad \frac{\partial\,\overline{A}}{\partial x^p} = \overline{\frac{\partial\,A}{\partial x^p}}$$

هكـذا يمكننا أن نكتب انطـلاقـاً من المعـادلات المجهـريـة (IV-1) حتى (IV-4) المعادلات التالية للقيم الوسطية

$$(IV\text{-}59)\qquad \operatorname{curl}\overline{H} - \frac{1}{c}\ \frac{\partial\overline{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\,\overline{\rho v}$$

$$(IV\text{-}60)\qquad \operatorname{curl}E + \frac{1}{c}\ \frac{\partial\overline{H}}{\partial t} = 0$$

$$(IV\text{-}61)\qquad \operatorname{div}\overline{E} = 4\pi\rho$$

$$(IV\text{-}62)\qquad \operatorname{div}\overline{H} = 0.$$

شرط ألا يكون الجسم قليل الكثافة (متخلخـل) rarefied والا يكون طـول الموجـة قصيراً جداً.

5 ـ تأويل المجالات في نظرية ماكسويل
المعادلات الكهرمغنطيسية في حالة الأجسام الساكنة.

لنفترض أن الجسم ساكن بالنسبة الى الأثير وأن سرعة الإلكترونات بـالنسبة الى هذا الجسم الساكن هي v.

أ ـ في حالة الأجسام الناقلة تكون كثافة الشحن ρ وكثافة تيار النقل الكهربائي I حسب المعادلات

$$\rho = (\bar{\rho})_1 = nq \qquad \text{(IV-63)}$$

$$I = (\overline{\rho v})_1 = nqv \quad \left(n = \frac{N}{\mathcal{V}}\right) \qquad \text{(IV-64)}$$

ويكون تيار النقل نتيجة لوجود الإلكترونات الحرة في المعدن.

ب ـ في الأجسام الكهرنافذة لا ينتج عن حركة الإلكترونـات أية شحنـة إضافيـة إجمالية للجزيء بل يكتسب عـزماً كهـربائيـاً ثنائي القطب (المقطـع 10 من الفصل الأول) مما يعطي الجسم كثافة استقطاب.

$$P = nqd. \qquad \text{(IV-65)}$$

وهـذا الاستقطاب يكـون شحنة $\int P_n \, dS$ عـلى سطـح الجـزيء، وكمـا رأينـا في الفصل الأول توازن هـذه الشحنة السطحيـة الشحنة $- \int \rho' \, d\mathcal{V}$ ذات الكثـافة ρ' داخل الجزيء. نجد إذاً:

$$\int P_n \, dS = \int \operatorname{div} P \, d\mathcal{V} = - \int \rho' \, d\mathcal{V}. \qquad \text{(IV-66)}$$

مما يعني أن هناك شحنة كهربائية إضافية بكثافة حجمية

$$\rho' = (\bar{\rho})_2 = - \operatorname{div} P. \qquad \text{(IV-67)}$$

ومن جهة ثانية إذا تغيرت كثافة الإستقطاب P مع الوقت يتولد تيار تحريض

$$(\overline{\rho v})_2 = \frac{\partial P}{\partial t}. \qquad \text{(IV-68)}$$

فالكثافات $(\overline{\rho v})_2$ و $(\bar{\rho})_2$ تمثل مساهمة الشحن الكهربائيـة الموجـودة في الجسم

الكهرنافذ (العازل). وتسمى هذه «الشحن الوهمية» وتنتج عن الإلكترونات المقيدة في الجسم الكهرنافذ.

ج ـ أخيراً هناك عدد من الجزيئيات ذات عزم مغنطيسي يمكن تفسيره في النظريات الكمومية. ينتج عن ذلك كثافة تمغنط.

$$\mathbf{M} = n\mathbf{m} \tag{IV-69}$$

حيث $\mathbf{m}$ هو العزم المغنطيسي لكل جزيء يشبه لوحة مغنطيسية بتيار حمل j' داخل الجزيء بحيث إن

$$\int m_l \, d\ell = J' \tag{IV-70}$$

أي:

$$\int \text{curl}\, \mathbf{m}\, dS = \int J'\, dS \tag{IV-71}$$

مما يعني أن

$$\text{curl}\, \mathbf{m} = J'. \tag{IV-72}$$

هكذا يمكن أن نحدد تيار حمل داخل الجسم المغنطيسي بـ:

$$(\overline{\rho v})_3 = nJ' = c\, \text{curl}\, M \tag{IV-73}$$

حيث استعملنا نظام الوحدات المختلط. نجد إذاً القيم الوسطية التالية

$$\bar{\rho} = (\dot{\bar{\rho}})_1 + (\bar{\rho})_1 + (\bar{\rho})_2 = \rho - \text{div}\, P \tag{IV-74}$$

$$\overline{\rho v} = (\overline{\rho v})_1 + (\overline{\rho v})_2 + (\overline{\rho v})_3 = I + \frac{\partial P}{\partial t} + c\, \text{curl}\, M \tag{IV-75}$$

لنحدد المجالين العيانيين E و B بأنهما

$$\bar{E} = E \quad , \quad \bar{H} = B, \tag{IV-76}$$

فنكتب المعادلات من (IV-59) الى (IV-62) إذا استعملنا القيم الوسطية.

$$\text{curl}\, B - \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t} = 4\pi \left(\frac{I}{c} + \frac{\partial P}{c\partial t} + \text{curl}\, M\right) \tag{IV-77}$$

(IV-78) $$\text{curl } E = -\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t}$$

(IV-79) $$\text{div } E = 4\pi\rho - 4\pi \text{ div } P$$

(IV-80) $$\text{div } B = 0.$$

لنحدد الآن المجالين D و H بأنهما

(IV-81) $$D = E + 4\pi P$$

(IV-82) $$H = B - 4\pi M.$$

فنكتب المعادلتين (IV-77) و (IV-79) كما يلي:

(IV-83) $$\text{curl } G = 4\pi\frac{I}{c} + \frac{1}{c}\frac{\partial D}{\partial t}$$

(IV-84) $$\text{div } D = 4\pi\rho$$

وتكون المعادلات (IV-78) و (IV-80) و (IV-83) و (IV-84) مطابقة تماماً لمعادلات ماكسويل العيانية (مجموعات المعادلات (I) و (II) في الفصل الثالث). ولا بد من الاشارة الى أن المجال الكهربائي E ومجال التحريض المغنطيسي B (ليس المجال المغنطيسي H) يحدّدان مباشرة بالقيم الوسطية للمجالات المجهرية. لذلك يجب اعتبار مجال التحريض المغنطيسي B بأنه الند للمجال الكهربائي E.

6 ـ نظرية لورنتز والتحريك الكهربائي للأجسام المتحركة

لنفترض الآن أن المادة تتحرك بسرعة u نعتبرها ثابتة (لا تتغير من نقطة الى أخرى على مسافات تضاهي كبر الجسيمات). فإذا كانت السرعة u تقل كثيراً عن سرعة الضوء[11].

(IV-85) $$u \ll c$$

نستطيع أن نطبق قاعدة جمع السرع كما في الميكانيك الكلاسيكي فنجد:

(IV-86) $$v = u + v'$$

(11) وهذا هو حال سُرعة الأرض على مدارها حول الشمس 30 كلم/ث.

$$\text{(IV-87)} \qquad \overline{\rho v} = \overline{\rho u} + \overline{\rho \acute{v}}.$$

تكتب كثافة التيار $\overline{\rho \acute{v}}$ كما رأينا أعلاه بالصيغة التالية:

$$\text{(IV-88)} \quad \overline{\rho v}' = (\rho v')_1 + (\rho v')_2 + (\rho v')_3 = I' + \frac{d\rho'}{dt} + c \ \mathrm{curl}\, M'$$

شرط أن نقيس I' و $\frac{\partial P'}{\partial t}$ و $\mathrm{curl}\ M'$ بواسطة أجهزة منتقلة مع المادة المتحـركة. ولكن تيار التحريض $(\overline{\rho v}')_2 = \frac{dp'}{dt}$ يحدد بالتكامل

$$\text{(IV-89)} \qquad \int_S (\overline{\rho \acute{v}})_n \, dS = \frac{d}{dt} \int_S P_n \, dS$$

فنجد استناداً الى القواعد العادية لحساب المتجهات[12]

$$\text{(IV-90)} \qquad \frac{d}{dt} \int_S P'_n \, dS = \int_S \left(\frac{\partial P'}{\partial t} + \mathrm{curl}\,[P' \wedge u] + u \,\mathrm{div}\, P' \right)_n dS.$$

مما يعني أن:

$$\text{(IV-91)} \qquad (\overline{\rho \acute{v}})_2 = \frac{dP'}{dt} = \frac{\partial P'}{\partial t} + \mathrm{curl}\,[P' \wedge u] + u \,\mathrm{div}\, P'.$$

---

(12) لإثبات ذلك ننطلق من العلاقة:

$$(1) \quad \frac{d}{dt} \int P_n dS = \int \frac{\partial p_n}{\partial t} dS + \int \frac{P_n}{dt} \left[(dS)_{t+dt} - (dS)_t \right]$$

لنطبّق قـاعدة غـرين للحجم الـذي يحـده السطـح $d\Sigma$ المؤلّف من السطـح $(dS)_{t+dt}$ والسطـح $(dS)_t$ والسطح الجانبي الـذي هو مجمـوع السطوح الصغـيرة $d\sigma = dl \wedge u \, dt$ التي تشكلها الأجـزاء dl من محيط dS عند حركتها بسرعة u خلال الوقت dt. فنجد:

$$(2) \quad \int P_n (dS)_t + dt - \int P_n (dS)_t + \int P. [dl \wedge u \, dt] = \int \mathrm{div}\, P \, d\mathcal{V}$$

أي:

$$(3) \quad \int P_n (dS)_{t+dt} - \int P_n (dS) = \int \mathrm{div}\, P \, d\mathcal{V} + \int [P \wedge lu] \, dl \, dt$$
$$= dt \int u \,\mathrm{div}\, P \, dS + dt \int \mathrm{curl}\, [P \wedge u] \, dS$$

فإذا استعملنا نظرية ستوكس Stokes لحساب الحد الاخير واحللنا الصيغة (3) في المعادلة (1) نحصل على المعادلة (IV-90).

فتُكتب معادلتا القيم الوسطية (IV-59) و (IV-61) بالصيغ

$$\text{curl}\, B - \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\left(I + \frac{\partial p'}{\partial t} + \text{curl}\,[p' \wedge u] + u\, \text{div}\, P' + c\, \text{curl}\, M' + \overline{\rho u}\right) \tag{IV-92}$$

$$\text{div}\, E = 4\pi\rho - 4\pi\, \text{div}\, p' \tag{IV-93}$$

حيث P' و M' تمثلان كثافتي الاستقطاب والتمغنط المرتبطتين بهيكل الإسناد المتحرك مع المادة. فإذا وضعنا

$$D = E + 4\pi P' \tag{IV-94}$$

$$H = B - 4\pi M' \tag{IV-95}$$

يمكن أن نكتب

$$\text{curl}\, H - \frac{1}{c}\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\left(I + \rho u + \text{curl}\,[P' \wedge u]\right) \tag{IV-96}$$

$$\text{div}\, D = 4\pi\rho. \tag{IV-97}$$

لأنه استناداً الى المعادلة (IV-74) يمكن أن نكتب

$$\overline{\rho u} = \rho u - u\, \text{div}\, P'. \tag{IV-98}$$

لنحدد الآن الكثافتين P و M في هيكل إسناد المُشاهد بالصيغ التالية

$$M' - M = -\left[\frac{P' \wedge u}{c}\right] \tag{IV-99}$$

$$P' - P = \left[\frac{M' \wedge u}{c}\right] \tag{IV-100}$$

فنستطيع أن نحدد المجال المغنطيسي H_1 الذي يرتبط بالمجال B وكثافة التمغنط

M وأن نحدد مجال التحـريض الكهربـائي D_1 الذي يـرتبط بالمجـال الكهربـائي E وكثافة الإستقطاب P بالعلاقتين المعروفتين

$$B = H_1 + 4\pi M \qquad \text{(IV-101)}$$

$$D_1 = E + 4\pi P \qquad \text{(IV-102)}$$

فتأخذ المعادلتان (IV-83) و (IV-84) الصيغة التالية

$$\text{curl}\, H_1 - \frac{1}{c}\ \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{4\,\pi}{c}\ (I + \rho u) \qquad \text{(IV-103)}$$

$$\text{div}\, D = 4\pi\rho. \qquad \text{(IV-104)}$$

لقد حصل مينكوفسكي Minkowski على هاتين المعـادلتين بطـريقة مختلفـة. لكن المجال H_1 والكثافة P' يمثلان المجال المغنطيسي وكثافة الإستقطاب بالنسبة للمُشاهد الثابت في نظرية مينكوفسكي ويلعب هـذا الدور المجـال H وكثافـة الإستقطاب P في نظرية لورنتز ولكن الفرق بين H_1 و H مثلاً هو

$$H_1 - H = 4\pi\,(M' - M) = -\ \frac{4\,\pi}{c}\ [P' \wedge u] \qquad \text{(IV-105)}$$

وهي كميـة صغيرة بـالنسبة الى المجـال ذاته إذا كـانت السرعة u أقـل بكثير من سرعة الضوء c ‏$u \ll c$.

قوة لورنتز: تُكتب قوة لورنتز تبعاً للمجالين المجهريين e و h بالصيغة

$$\boxed{f = q\left(e + \frac{1}{c}\ [v \wedge h]\right)} \qquad \text{(IV-106)}$$

فإذا استعملنا القيم الوسطية ثم المجالين E و B استناداً الى المعادلتين (IV-76) نجد

$$f = q\left(E + \frac{1}{c}\ [v \wedge B]\right) \qquad \text{(IV-107)}$$

وإذا استعملنا قاعدة جمع السرع (IV-86) نجد

$$f = q\left(E + \frac{1}{c}\ [u \wedge B] + \frac{1}{c}\ [v' \wedge B]\right). \qquad \text{(IV-108) (IV-108)}$$

لنفترض أن الشحنة q تجرها المـادة بحركتهـا ($v' = 0$) فتظهر كـأنها في مجـال كهربائي E' مرتبط بهيكل الاسناد المتحرك بقيمة محددة بالمعادلة

$$f = q\,E' = q\left(E + \frac{1}{c}\,(u \wedge B]\right). \qquad \text{(IV-109)}$$

مما يعني أن

$$E' = E + \frac{1}{c}\,[u \wedge B]. \qquad \text{(IV-110)}$$

ولكننا نستطيع دائماً أن نكتب في هيكل الإسناد المتحرك

$$D' = \epsilon E' = E' + 4\pi P' \qquad \text{(IV-111)}$$

أي:

$$P' = \frac{\epsilon - 1}{4\,\pi}\,E'. \qquad \text{(IV-112)}$$

وباستعمال (IV-110) نجد

$$P' = \frac{\epsilon - 1}{4\,\pi}\left[E + \frac{1}{c}\,[u \wedge B]\right]. \qquad \text{(IV-113)}$$

لننظر في الحالة الخاصة لجسم غير مغنطيسي. إستناداً إلى العلاقة (IV-100) مع $M' = 0$ نجد $P' = P$. ومن معادلات لورنتز (IV-94) و (IV-96) نستنتج أن

$$\text{curl } B = \frac{1}{c}\,\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{4\,\pi}{c}\left(I + \rho u + \frac{\partial P}{\partial t} + \text{curl}\,[P \wedge u]\right) \qquad \text{(IV-114)}$$

وتكون كثافة التيار الإجمالية النـاتجة عن حركة الجسم الكهرنافذ المشحون (باستعمال المعادلتين (IV-91) و (IV-114)).

$$I + \rho u + \frac{\delta p}{\delta t} + \text{curl}\,[P \wedge u] = u\,(\rho - \text{div}\,P) + \frac{dP}{dt} + I. \qquad \text{(IV-115)}$$

وإذا حصرنا اهتمامنا بالحالات الدائمة كما هي الحال في تجارب رونتغن وإيشنوالد تصبح كثافة تيار الحمل في التجربة الأولى التي يتحرك بها الجسم الكهرنافذ مع اللوحتين المعدنيتين

$$u\,(\rho - \text{div}\,P) \qquad \text{(IV-116)}$$

أما في التجربة الثانية التي يكون فيها الجهاز بكـامله سـاكناً مـع تيار تـوصيل، تكون كثافة التيار I. فـإذا عملنا لجعـل هذين التيـارين متساويـين (بتغيير مقـاومة الدائرة الخارجية) نجد:

$$i = \int_S u\,(\rho - \operatorname{div} P)\,dS. \qquad \text{(IV-117)}$$

وإذا استعملنـا المعادلـة (III-108) ومعطيات الـرسم 11 يكـون التيـار الإجمـالي $i = \int IdS$ مجموع تيار الحمل

$$i_1 = \int u\rho\, dS_1 = u\rho \cdot ad = au\sigma_\rho = au\,\frac{\epsilon E}{4\pi} \qquad \text{(IV-118)}$$

وتيار رونتغن

$$i_2 = -\int u \operatorname{div} P.\, dS_2 = -\int u \operatorname{div} P\, adx \qquad \text{(IV-119)}$$

$$= -\,au\int \frac{\partial P}{\partial x}\, dx = -\,au\,|P|$$

حيث P متوازية مـع محور الـدوران في معادلـة إيشنوالـد. فنجد إذاً بـاستعمال (IV-112)

$$i_2 = -\,au\,\frac{(\epsilon - 1)}{4\,\pi}\,E. \qquad \text{(IV-120)}$$

ويكون التيار الإجمالي بشدة:

$$i = i_1 + i_2 = au\frac{E}{4\pi} = au\,\frac{V}{4\,\pi\,d}\,. \qquad \text{(IV-121)}$$

وهي مطابقة لنتيجة تجربة إيشنوالد. إن كثافـة التيار النـاتجة عن حـركة جسم كهرنافذ مستقطب هي

$$I = -\,u \operatorname{div} P = -\,u\,\frac{(\epsilon - 1)}{4\,\pi}\,E. \qquad \text{(IV-122)}$$

ويسمى أيضاً هذا التيار تيار رونتغن. يجب إذاً أن نستبدل تيار الحمل $i = -\,u\,\frac{a\,\epsilon}{4\,\pi}\,E$ بتيـار رونتغن $i' = -\,ua\,\frac{\epsilon - 1}{4\,\pi}\,E$ في جميع التجـارب التي يتحرك فيهـا جسم كهرنافـذ بسرعة قليلـة $\left(\frac{u}{c} \ll 1\right)$. ويعني هذا أن نستبـدل المجال E بـالمجال

$E' = \left(1 - \frac{1}{\epsilon}\right) E$ وهذا ما أثبتته تجارب رونتغن وايشنوالد وولسون.

إن استبدال المجال E بالمجال E′ قد يعني الانسحاب الجزئي للمجالات (أي جر الأثير الكهرمغنطيسي) مع المادة المتحركة، فتلتقي هكذا استنتاجات لورنتز مع فرضية فرينل عن الانسحاب الجزئي للأثير. في الواقع أن التفسير الذي تقترحه نظرية لورنتز يختلف عن ذلك تماماً. فإدخال المجال E′ ما هو إلا طريقة ملائمة لتفسير المعادلة (IV-122) وتيار رونتغن يرتبط باستقطاب الجسم الكهرنافذ حسب نظرية لورنتز. فالكثافتان P و M اللتان تميزان الأجسام الكهرنافذة والأجسام المغنطيسية هما اللتان يجرهما الجسم مع حركته بينما الأثير يبقى ساكناً تماماً. وسنعود الى هذه النتيجة في دراستنا للنسبية الخاصة (المقطع الخامس من الفصل الخامس).

لقد نجحت نظرية ماكسويل ـ لورنتز باعطاء تفسير صحيح لتجارب كهرتحريكية الأجسام المتحركة بسرعة قليلة أي تلك التي يمكن فيها أن نهمل u^2/c^2 فإذا أخذنا بعين الاعتبار فقط الكميات المتناسبة مع u/c (الدرجة الأولى) يمكن أن نبقي على صيغة معادلات ماكسويل وجعلها متفقة مع فرضيات لورنتز في ما يتعلق بخصائص مصادر المجالات الكهرمغنطيسية.

ومن جهة ثانية تقود دراسة تركيب هذه المصادر الى مفهوم الكتلة المتغيرة مع السرعة. هذا المفهوم المثبت تجريبياً يوحي بأن للكتلة جذوراً كهرمغنطيسية إذا استعملنا مفاهيم ما قبل النسبية، كأن تتحول خصائص المصادر الى معطيات كهرمغنطيسية بحتة.

لقد نجحت نظرية ماكسويل ـ لورنتز عند اكمالها بالإبقاء على فكرة التفاعل المحلي والإنتشار بسرعة محدودة وبربط النظرية الكلاسيكية للمجالات بوجود المصادر. ومن جهة ثانية تبدو خصائص هذه المصادر كأنها معطيات ليست غريبة تماماً عن المجال. فتبدو كل الظواهر (ما عدا الجاذبية) كأنها تقتصر على تأثيرات كهرمغنطيسية حسب نظرية ماكسويل. والتوليف synthesis الذي حاولت عبثاً تحقيقه نظريات التفاعل عن بعد يجب أن يتمحور الآن حول مفهوم المجال. ومعادلات ماكسويل ـ لورنتز ذات الصيغة النسبية (قبل اكتشافات النسبية الخاصة) هي أساس نظرية كلاسيكية للمجال رغم بعض التأويلات التي تستند الى مفاهيم ما قبل النسبية.

تمارين

1 ـ يتحرك إلكترون في مجال مغنطيسي متسق H باتجاه oz:

أ ـ إثبت أن المسار حلزوني spiral محوره باتجاه oz.

ب ـ إسقاط هذا المسار على السطح المستوي xoy هو دائرة. إحسب شعاعها تبعاً لقيمة e/m والسرعة الابتدائية v والمجال H.

ج ـ إفترض أن السرعة الإبتدائية هي باتجاه ox. إحسب الإنحراف deviation الحاصل على شاشة عمودية على ox وموضوعة على مسافة ℓ من مصدر الإلكترون.

الحل:

أ ـ استعمل صيغة لورنتز

$$f = e\left[\frac{v}{c} \wedge H\right]\left(m\ddot{x} = \frac{e}{c}\ \dot{y}H,\ m\ddot{y} = -\frac{e}{c}\ \dot{x}H,\ \ddot{z} = 0\right)$$

استعمل المتغيرة $\xi = x + iy$ لكتابة المعادلة $\ddot{\xi} = -i\omega\dot{\xi}$

مع $\omega = \dfrac{eH}{mc}$ إثبت أن الحل هو

$$\dot{\xi} = \dot{\xi}\, e^{-i\omega t},\ \xi = \xi_0 + \frac{\dot{\xi}_0}{i\omega}\left(1 - e^{-i\omega t}\right).$$

ب ـ إسقاط المسار على السطح المستوي xoy هو دائرة

$$x = x_0 + \frac{1}{\omega}\ \left(\dot{y}_0\left[1 - \cos\omega t\right] + \dot{x}_0 \sin\omega t\right),$$

$$y = y_0 - \frac{\dot{x}_0}{\omega}(1 - \cos\omega t) + \frac{\dot{y}_0}{\omega}\sin\omega t$$

شعاع الدائرة هو:

$$R = \frac{\nu}{\omega} = \frac{\nu mc}{eH} \quad \text{أو} \quad R^2 = \frac{\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2}{\omega^2}$$

ج - من الصيغة $(\dot{x} + i\dot{y}) = (\dot{x}_0 + i\dot{y}_0)e^{-i\omega t}$ إستنتج أن

$$\dot{x} = \dot{x}_0 \cos \omega t + \dot{y}_0 \sin \omega t \qquad \dot{y} = \dot{y}_0 \cos \omega t - \dot{x}_0 \sin \omega t$$

في حالة السرعة الابتدائية باتجاه ox $(\dot{x}_0 = v, \ \dot{y}_0 = 0)$ تقود معادلات الحركة $(m \dfrac{d^2 y}{d t^2} = 0, m \dfrac{d^2 x}{d t^2} = 0)$ للإلكترون بعد خروجه من المجال المغنطيسي إلى

$$\frac{d x}{d t} = v \cos \omega t \simeq v, \quad و \quad \frac{d y}{d t} = v \sin \omega t \simeq v\omega t$$

أي:

$$x \simeq vt \quad y = -\frac{v\omega t^2}{2} = \frac{v\omega}{2}\left(\frac{\ell}{v}\right)^2 = \frac{1}{2}\ \frac{e}{mc}\ \frac{H\ell^2}{v}$$

2 - أدرس مسار إلكترون في مجال كهربائي ومجال مغنطيسي متوازيين وعموديين على سرعته الابتدائية

$$(H = H_z, E = E_z, v = v_x).$$

3 - أدرس مسار الكترون في مجال كهربائي ومجال مغنطيسي متعامدين $(E = E_x, H = H_y)$. إثبت أن المسار هو دحروجي cycloidal اذا انطلق الالكترون من أصل المحاور في الوقت $t = 0$ بدون سرعة ابتدائية. (الدحروج هو خط منحنٍ ترسمه نقطة في دائرة تتدحرج على سطحٍ مستوٍ).

4 - يكوِّن سيكلوترون cyclotron مجالاً مغنطيسياً بشدة 20 000 غاوس. ما هي السرعة الزاوية لدوران بروتون في هذا المجال؟

الجزء الثاني

مبادىء ونتائج النسبية الخاصة

مبدأ النسبية

أ ـ مبدأ النسبية قبل أينشتاين

1 ـ مبدأ النسبية في الميكانيك الكلاسيكي

يفترض علم تحريك (ديناميكا) نيوتن وجـود فضاء مطلق «مستقـل عن الأجسام الموجودة فيه» ووقت (زمن) مطلق universal يجري بطـريقة متسقـة Uniform. كون هذا الزمن مطلقاً يعني أن حركة هيكل الإسناد الفضائي لا تؤثر على المجرى الزمني للأحداث التي تحدث فيه. ومن الناحية العملية نعبر عن فرضية الزمن المطلق بكتابة تحويل الإحداثيات من هيكل إسناد الى آخر بالصيغة

$$x_p = x'_p (x_q, t) \quad t' = t \qquad p, q = 1, 2, 3.$$

أمـا مفهوم الفضـاء المطلق فيبدو غـامضاً. فـإذا رجعنا الى مبـادىء الحركيـات الكـلاسيكية يمكن أن نـدرس حركـة جسم صلب بالنسبـة الى هيكل إسنـاد يحدده جسم صلب آخر. ويمكن تبادل دور هذه الأجسام. فتكون معادلـة الحركـة النسبية واحـدة إذا اخترنـا أياً من هـذه الأجسام الصلبـة كهيكل إسنـاد. ففي الحركيـات الكـلاسيكية تبـادلية reciprocity كـاملة في وصف حـركة الأجسـام وتخضع لمبـدأ النسبية بأوسع معانيها. أما مفهوم الفضاء المطلق فيبدو بكل بساطة حاجة فكـرية. فالفضاء المطلق هو الإطار الجامد الـذي تجري فيـه حركـة الأجسام. ولكن لا يمكن تحديده عملياً بأي هيكل مميز. فهو ذو أهمية ما ورائية أو نفسيـة ولكنه لا يلعب أي دور في الحركيات الكلاسيكية.

ولا يتخذ مفهوم الفضاء المطلق معنى فيزيائياً إلا في علم التحريك إذ يحد من صلاحية مبدأ النسبية. ويرتبط هذا المفهوم بإمكانية تحديد فئة مميزة من هياكل الإسناد وهي تلك التي تتحرك فيها الأجسام النقطية الحرة على خط مستقيم بسرعة ثابتة. هذه الهياكل تسمى «هياكل الإسناد العطالية» وإمكانية تحديد هذه الهياكل هي أساس مبدأ العطالة. فمفهوم الفضاء المطلق هو ضمانة لصحة مبدأ العطالة كما يقول أولر Euler.

عملياً ليس هناك الا هياكل إسناد عطالية بصورة تقريبية: فجدران المختبر هي هيكل إسناد عطالي للظواهر التي تجري فيه. وهيكل الإسناد الذي يكون أصل محاوره في مركز الكرة الأرضية وتكون محاوره باتجاه نجوم ثابتة هو هيكل إسناد عطالي (يُسمى هيكل إسناد غاليليو Galilean) للظواهر الأرضية. وباستعمال هذه الهياكل الإسنادية العطالية الخاصة والتقريبية تكونت قبل نيوتن الفكرة القائلة بوجود هيكل إسناد مثالي يكون فيه مبدأ العطالة صحيحاً بصورة دقيقة ومطلقة.

وإنطلاقاً من هيكل إسناد عطالي معين يمكن أن نحدد عدداً لا متناهياً من الهياكل العطالية. إذ إن كل هيكل إسناد يتحرك بالنسبة الى الهيكل الأول بسرعة ثابتة v هو هيكل إسناد عطالي. وترتبط الإحداثيات في هذه الهياكل بقاعدة تحويل غاليليو Galileo.

$$x' = x - vt \qquad t' = t. \tag{V-1}$$

يتيح هذا التحويل حصر مبدأ النسبية في هياكل إسناد غاليليو (أي العطالية) فقط. فإذا كان جسم يتحرك على خط مستقيم وسرعة ثابتة بالنسبة الى المشاهد يمكن دائماً، بتحويل غاليلي مناسب، إيجاد هيكل إسناد عطالي يكون فيه الجسم ثابتاً. «يمكن أن يعتبر الجسم ذاته متحركاً أو ثابتاً وفقاً لطريقة تحديد موقعه» كما يقول ديكارت Descartes.

يتيح مبدأ العطالة إذاً أن نحدد في الميكانيك تكافؤ هياكل الإسناد العطالية المميزة أو بتعبير آخر نسبية السرعة. لكن مفاهيم هياكل الإسناد العطالية والحركة المتسقة ترتبط بحالة خاصة لا يتضح معناها الحقيقي إلا إذا اندمجت في علم تحريك نيوتن بشكل واضح.

يستند علم تحريك نيوتن الى تحديد القوة

$$f = m \frac{dv}{dt} = m\gamma \qquad \text{(V-2)}$$

أو القانون الأشمل

$$f = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}(mv) \qquad \text{(V-3)}$$

إذا كانت الكتلة m من الخواص الذاتية للجسيم النقطي المتحرك. حسب نيوتن يفسَّر دائماً ظهور التسريع بوجود حركة مطلقة: حركة مطلقة للمادة إذا كانت القوة حقيقية، أو حركة مطلقة لهيكل الاسناد إذا كانت القوة وهمية fictive مثل قوة العطالة أو قوة كوريوليس Coriolis.

وتعني «صفة الوهمية» أن القوة يمكن إلغاؤها باختيار مناسب لهيكل الاسناد وأن تبديل الهيكل يعيد من جديد صلاحية قانون العطالة. في الواقع أن تطبيق قانون العطالة في الميكانيك ليس عملية سهلة كما يظن. فإذا لم يكن مطبقاً يمكن أن يعود ذلك الى اختيار سيء للهيكل وربما أيضاً الى وجود قوى نجهلها. يفترض ميكانيك نيوتن أنه يمكن دائماً تحديد الجسيم الحر أو بمعنى آخر تمييز القوى الحقيقية عن القوى الوهمية، وقد أظهر تحليل نظرية النسبية العامة عدم صحة هذه الفرضية.

إذا نجحنا بتعيين هيكل إسناد عطالي واحد يمكن أن نحصل على عدد لا متناه من هياكل الاسناد العطالية الأخرى حسب مبدأ النسبية. ويبقى القانون الأساسي لعلم التحريك على ما هو عليه إذا أجرينا تحويل غاليليو، ويحافظ على صيغته ذاتها في كل هياكل الاسناد العطالية.

2 ـ مبدأ النسبية في الكهرمغنطيسية

تشمل صلاحية مبدأ النسبية الميكانيك. ويمكن أن نتساءل إذا كان صالحاً في الأجزاء الأخرى من الفيزياء.

فقد طُرح هذا السؤال في البصريات كما يلي: لقد كان من البديهي حتى صياغة مبدأ النسبية الخاصة أن الموجة الكهرمغنطيسية المتناحية isotropic في جميع الجهات في هيكل إسناد معين لا يمكن أن تحافظ على هذا التناحي في هيكل ثان يتحرك بسرعة ثابتة v بالنسبة الى الهيكل الأول. ويعود ذلك الى قاعدة جمع السرعة في الميكانيك الكلاسيكي. فإذا كانت سرعة الموجة c في الهيكل الأول تصبح $c \pm v$ في الهيكل الثاني إذا كانت تنتشر في إتجاه السرعة v أو في الإتجاه المعاكس. فالتناظر الكروي في جميع هياكل الاسناد يخالف إذاً مبدأ النسبية كما يصاغ في الميكانيك

الكلاسيكي. ويصبح من الممكن أن نستعمل تجربة ضوئية لتحديد الحركة الإجمالية لمصدر ومستقبل receiver الضوء بالنسبة الى الأثير المفترض أنه ثابت. وإمكانية مخالفة الكهرمغنطيسية لمبدأ النسبية الكلاسيكية يعود مباشرة الى كون معادلات ماكسويل لا تحافظ على صيغتها لدى استعمال تحويل غاليليو.

3 ـ الإمكانيات التجريبية للكشف عن الحركة المطلقة بوسائل ضوئية

نقول إن انتقال جسم بالنسبة الى الأثير بسرعة v يولد ظاهرة من الدرجة الأولى إذا كانت هذه الظاهرة تتغير مع السرعة المتناسبة مع $\beta = \frac{v}{c}$ وتكون الظاهرة من الدرجة الثانية إذا كانت متناسبة فقط مع β^2. تتيح الوسائل التجريبية الضوئية بسهولة الكشف عن الظواهر من الدرجة الأولى ولا تتيح الكشف عن الظواهر من الدرجة الثانية إلا بصعوبة أكبر وفي بعض الحالات الخاصة فقط. إن سرعة الأرض على مسارها حول الشمس هي 30 كيلومتراً في الثانية. وخلال وقت قصير بالنسبة الى مدة الدوران الكامل (أي سنة) يمكن أن نعتبر أن هذه الحركة على خط مستقيم وبسرعة ثابتة مع $\beta = 1/10\ 000$

ونأمل أن نستطيع الكشف بوسائل ضوئية عن «ريح الأثير» المتحرك في السطح المستوي لهذا المسار، وبالتالي أن نحدد هيكل الاسناد المطلق الذي يكون فيه الأثير ساكناً. ولكن نشير الى أن التجارب المعروفة إجمالاً التي تدرس الخصائص الضوئية للأجسام المتحركة لا تكشف عن ريح الأثير بظواهر من الدرجة الأولى.

1 ـ قياس مدة الذهاب والإياب للأشعة الضوئية: قد يبدو أنه يمكن بسهولة الكشف عن ريح الأثير بقياس سرعة الضوء $c \pm v$ المنتشر باتجاه مسطرة صلبة متحركة بسرعة v. ولكن ليس هناك طريقة عملية لذلك، لأن كل الطرق التجريبية تفترض مزامنة synchronisation آلات ضبط الوقت على طول المسار الضوئي. وتستند عملياً على قياس مدة الذهاب والاياب للضوء[1] وهذا القياس يلغي تلقائياً كل

(1) لقد اقترحت بعض الطُرق لقياس مدة إنتشار الضوء باتجاه واحد للكشف عن لا تناحٍ محتمل في السُرعة حسب إتجاه الضوء. لكن اكثر هذه الطُرق غير صحيحة لأنها تفترض ضِمنيًا التناحي (أو اللاتناحي) الذي تحاول التجربة الكشف عنه. أما الطُرق الصحيحة نظريًا فليست دقيقة لدرجة التأكد من النتيجة. ويمكن الرجوع في هذا الموضوع إلى

O. COSTA DE BEAUREGARD: De la mesure de la vitesse de la lumière sur un parcours aller simple (Bull. Astron. XV, Fasc 2, 1950, 159).
H. ARZELIES: Cinématique relativiste (p.64).

الظواهر من الدرجة الأولى(2).

2 ـ ظاهرتـا دوبلر Doppler والـزَّيْغ الفلكي aberration: من الظـواهر المعـروفة أكثر من غيرها نتيجة لحركة مصادر الضوء ظاهرتا دوبلر والزيغ الفلكي.

الظاهرة الأولى اكتشفها دوبلر عام 1842 وهي تغيُّر تردد الموجات الضوئية نتيجة لحركة المصادر(3).

---

(2) إذا كانت ℓ المسافة التي قطعها الضوء، يكون الزمن الذي يستغرقه الضوء للذهاب والإياب

$$t = \frac{\ell}{c+\nu} + \frac{\ell}{c-\nu} = \frac{2\ell c}{c^2-\nu^2}$$

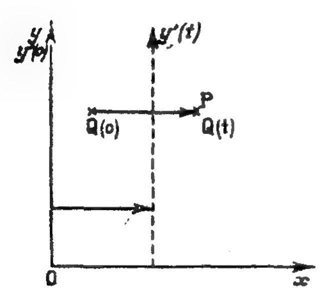
حيث ν هي سرعة المصدر أو المشاهد التي نحاول أن نقيسها. فتكون السُرعة الوسطيّة المقيسة للضوء

$$c' = \frac{2\ell}{t} = \frac{c^2-v^2}{c} = c(1-\beta^2)$$

ولا تختلف هذه عن c إلّا بكمية من الدرجة الثانية $\beta^2 c$.

(3) Ch. Döppler - Abhand. Kgl. Bochmischen Gesell Wiss. (5) 2, 1841-42, 465-482.

تفسَّر ظاهرة دوبلر كما يلي:



الشكل 13 ـ ظاهرة دوبلر

لنفترض أن موجة مستوية تنتشر باتجاه Ox إنطلاقا من O في الوقت الابتدائي. يكون عدد الموجات التي وصلت إلى النقطة P(x) المرتبطة بهيكل الاسناد S هو $\nu\left(t-\frac{x}{c}\right)$ في الوقت t. لنفترض أن هيكـلاً إسناديا 'S كان مطابقا للهيكل S في الوقت الابتدائي t=0 وانفصل عنه كي يسير بسرعة ν باتجاه Ox. يكون عدد الموجات التي وصلت إلى النقطة Q(x') في هيكل الاسناد 'S.

$$\nu'\left(t-\frac{x'}{c}\right)$$

حيث ν و ν' هما تردد المـوجة إذا قيس في الهيكلـين الاسناديـين S و 'S. فإذا كـانت النقطتان P و Q متطابقتين في الوقت t يجب أن يتطابق عدد الموجات أي:

$$\nu\left(t-\frac{x}{c}\right) = \nu'\left(t-\frac{x'}{c}\right).$$

أما ظاهرة الزيغ الفلكي فقد اكتشفها برادلي Bradley عـام 1728 وهي التغيير في اتجـاه الأشعة الضـوئية نتيجـة للحركـة النسبيـة (أي حـركـة المصـدر بـالنسبـة

= ولكن إحداثيات P و Q المتلاصقتين ترتبط بتحويل غاليليو أي:

$$x' = x - vt \qquad x = x' + vt$$

نجد إذا:

$$\nu\left(t - \frac{x' + v\,t}{c}\right) = \nu'\ \left(t - \frac{\dot{x}'}{c}\right).$$

وبشكل خاص إذا كانت x' منعدمة نجد $\nu(1 - \beta) = \nu'$. ليكن ν_0 التردد الذاتي لمصْدر الضوء (أي في هيكل الاسناد S المرتبط بالمصدر).

1 ـ في الحالة السابقة أي حالة مشـاهد مـرتبط بهيكل إسنـاد متحرك S' يكـون التردد $\nu{=}\nu_0$ في S والتردد المقيس $\nu'{=}\nu_0\,(1 - \beta_{obs})$.

2 ـ إذا كان المصدر المرتبط بهيكل إسناد S' هو المتحرك والمشاهد ثابتـا يكون التـردد في S' $\nu'{=}\nu_0$ ويكون التردد المقيس:

$$\nu = \frac{\nu_0}{1 - \beta_{source}}$$

فليس هناك إذا عكوسية في التردد المقيس بين حركة المشاهد $\nu_1 = \nu_0\,(1 - \beta)$ وحركة المصْدر بالسرعة ذاتها ولكن بالإتجاه المعاكس:

$$\left(\nu_2 = \frac{\nu_0}{1 + \beta}\right)$$

ولكن الفرق بين هاتين الكميتين هو فقط من الـدرجة الثـانية أي متنـاسب مع β^2. ولا يمكن استعمـاله عملياً للكشف عن الحركة المطلقة:

$$\nu_2 - \nu_1 = \nu_0 \left\{ \frac{1}{1 + \beta} - (1 - \beta) \right\} = \nu_0\ \frac{\beta^2}{1 + \beta}$$

3 ـ في الحالة العامة التي يتحرك فيها المصْدر والمشاهد نجد:

$$\nu = \nu_0\left(\frac{1 - \beta_{obs}}{1 - \beta_{source}}\right) \qquad \nu - \nu_0 = \nu_0\left(\frac{\beta_{source} - \beta_{obs}}{1 - \beta_{source}}\right).$$

فإذا كان المصْدر والمشاهد يتحركان بسرعة واحدة $(\beta_s = \beta_{obs})$ تختفي ظاهـرة دوبلر. ولا تحـدث هذه إلا إذا اختلفت السرعتـان. ويكون عنـدئذ الفـرق $\nu - \nu_0$ بالـدرجة الأولى بـالنسبـة للسرعـة النسبيـة $(\beta_s - \beta_{obs})$ (أيّ سرعـة المصدر بـالنسبة للمشـاهد). أمـا السرع المطلقـة للمصـدر والمشـاهـد (أي سرعتاهما بالنسبة إلى الوسط الذي تنتشر فيه الموجة) فلا تدخل في حساب ظاهـرة دوبلر إلّا في الـدرجة الثانية.

للمشـاهد[4]). عمليـاً يلاحظ مثـلاً تغير في مـوقع صـورة نجم ثابت لـدى مـراقبتهـا المستمرة طيلة عام كامل بواسطـة مقراب telescope، إذ تسبب حـركة الأرض عـلى مدارها تغيراً متواصلاً في موقع الصورة فتتحرك على مسار بيضوي.

إن ظاهرتي دوبلـر والزيـغ الفلكي تسبّبان تغـيرات من الدرجـة الأولى في حركـة المصـدر بالنسبـة للمشاهـد. أما الحـركة المطلقـة (بالنسبـة للأثـير) فلا تسبب الا تغييرات من الدرجة الثانيـة. وهذه التغيـيرات صغيرة لـدرجة أنهـا بقيت بعيداً عن متنـاول أدق التجارب حتى الفتـرة الأخيرة. إذ تمكن ستـارك Stark[5] من مشاهـدة ظاهرة دوبلـر لمصادر أرضيـة باستعمـال أشعة قنـوية أو مـوجبة canal rays ولكن قياس التأثيرات من الدرجة الثانية بواسطة ظاهرة دوبلر لم يتحقق إلا بتجـارب إيفز Ives وستيلول Stillwell[6].

ونشير هنا الى تجارب تستند الى تصور مسبق لظاهرتي دوبلر والزيغ الفلكي قـام بها رومر Römer[7] عام 1676 وبرادلي عام 1728 وبقيت مشهورة. وقد قيست في هذه

---

(4) ليس لإنحراف الأشعة الضوئية هذا علاقة بوجـود جسم كاسر لـلاشعة (إذا مـلىء المنظار الفلكي مـاء مثلاً).

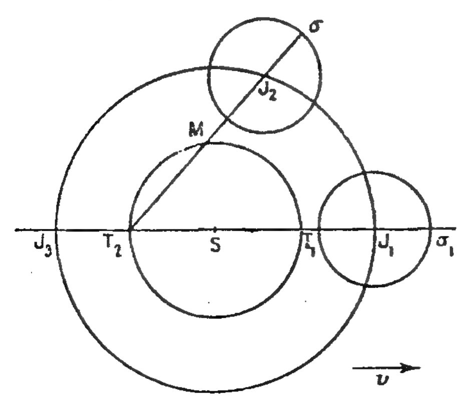
J. BRADLEY. Phil. Trans. 35, 1728, 637.

G.B. AIRY. Proc. Roy. Soc. London A 20. 1871, 35; 21 1873, 121; Phil. Mag. 43, 1872, 310.

(5) S. Stark-Ann. d. Phys. 21, 1906, 40; J. Stark and K.Siegel Ann. d. Phys. 21, 1906, 457; S. Stark, W. Hermann, and. S. Kinoshita Ann. d. Phys. 21, 1906, 462.

(6) H.E. Ives and G.R. Stillwell Journ. of the optical Soc. of. America 28, 1938, 215.

(7) موضوع تجارب رومر كان نوعاً من ظاهرة دوبلر. يستبـدل فيها تـردد موجـات الضوء بتكـرار خسوف أقمار الكوكب جوبيتر. يراقِب هذا الخسوف أولاً عندما تكون الشمس والأرض وجوبيتر وقمره على خط مستقيم في المواقع S و T_1، و J_1، و σ_1 (كما في الرسم 14) ثم بعد نصف عام في المـواقع S، و T_2، و J_2، و =



الشكل 14 ـ قياسات رومر

التجارب سرعة الضوء في انتشاره بـاتجاه واحـد. إن اختفاء التـأثيرات من الـدرجة الأولى لريح الأثـير يجعل هـذه التجارب قيـاساً لسرعـة الضوء دون تـدخل محتمـل لسرعة ريح الأثير.

4 ـ الظواهر من الدرجة الأولى
فرضية الانسحاب (الجر) الجزئي للضوء مع حركة الأجسام الشفافة

لتبيان الظواهر من الدرجة الأولى للحركة المطلقة يجب أن نعود الى التجارب التي يدخل فيها انسحاب محتمل للأثير والموجات الضوئية التي تنتشر فيه داخل الأجسام الشفافة[8]. وسواء أكان هذا الانسحاب كاملاً أو جزئياً فإن ريح الأثير تسبب ظواهر

= و σ_2. الموقع الثاني J_2 لجوبيتر قريب من الموقع الأول J_1 لأن دورة جـوبيتر حـول الشمس تستغرق 12 عاماً. فتكون المسافة الإضافيـة التي اجتازهـا الضوء في الخسـوف الثاني قـريبة جـداً من قطر مـدار الأرض حول الشمس $T_1T_2 = \ell$. فإذا افترضنا أن النظام الشمسي بكامله ثابت في الأثير ينتج عن ذلك تأخير موعد الخسـوف بقيمة $t_1 = \ell/c$. أمـا إذا كان النظـام الشمسي متحركـا بسرعة v بـاتجاه T_2T_1 بالنسبة إلى الأثير يكون التأخير $t_2 = \dfrac{\ell}{c+v}$ فيكون الفرق بين التأخيرين:

$$t_1 - t_2 = \ell\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{c+v}\right) = \frac{\ell v}{c(c+v)} = \frac{\ell\beta^2}{v(1+\beta)} \simeq \frac{\ell\beta^2}{v}$$

أي أنه من الدرجة الثانية (متناسب مع β^2).

كذلك إذا قيس وقت خسوفين بعد ست سنوات أي عندما يكون جوبيتـر في النقطة J_2 يكـون تأخـير الخسوف الثاني $t_3 = \dfrac{\ell}{c+v}$ إذا كان النظام الشمسي متحركا بسرعة v. فنجد ايضا الفرق بين التأخير في الموقعين J_1 و J_3:

$$t_3 - t_2 = \ell\left(\frac{1}{c-v} - \frac{1}{c+v}\right) = \frac{2\ell v}{c^2 - v^2} = \frac{2\ell}{v} \quad \frac{\beta^2}{1-\beta^2}\ .$$

وقد أشار ماكسويل في ما بعد إلى أن مراقبة حالات الخسوف المتتالية لأقمار جوبيتر تتيح مبدئيا سرعة النظام الشمسي بالنسبة إلى الأثير. لذلك تعتبر تجربة رومر قيـاسا تقـريبيا لسرعـة الضوء إلى الـدرجة الأولى بالكمية β فتكون سرعة الضوء $c = \ell/t_1$.

(8) لقد اقترح ستوكس عام 1845 فـرضية اكثـر جذريـة تنص على أن الأجسـام تسحب الأثير تمـاما مـع حركتها. فإذا كانت الأجسام تسحب الأثير بداخلها وبقربها المباشر انسحابا كاملاً مع حـركتها تجـري الظواهر البصرية كأن الأثير ساكن تماما. مما يعني استحالة كشف أي تأثير لريح الأثير من أيـة درجة كان هذا التأثير. لكن صعوبات كبيرة اعترضت هذه الفرضية لتعليل ثبـات اتجاه الأشعـة الصادرة من النجوم وعدم تغيُّر سرعتها لـدى الانتقال من الأثـير الثابت بـين النجوم إلى الأثـير المتحرك قـرب سطح الأرض.

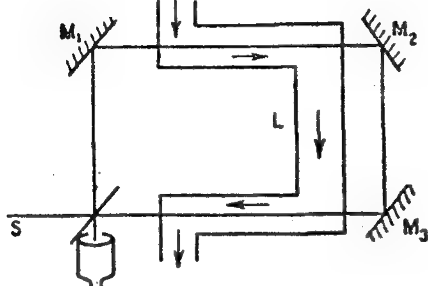
G.G. STOKES. Phil. Mag. 27, 1845, 9; Mathem. and Physical papers 1, 1880, 134.

من الدرجة الأولى. من الممكن إذاً قياس الحركة المطلقة بتجارب على انتشار الضوء داخل الأجسام الشفافة. وقد أجريت تجارب عديدة منها تجارب أراغو Arago ثم فيزو وهوك Hoek ومسكارت Mascart وميكلسون وأخيراً زيمان 1914 وأعطت كلها نتائج سلبية[9].

وقد كانت تجربة أراغو[10] عام 1818 الأولى من هذا النوع مستعملة انكسار الأشعة خلال تشكيل من العدسات. وأعطى فرينل في العام ذاته تفسيراً للنتيجة السلبية لهذه التجربة بافتراض الانسحاب الجزئي للأثير. فإذا كان الجسم الشفاف يتحرك بسرعة v ينسحب معه الأثير الذي في داخله بسرعة α v حيث معامل الانسحاب α يرتبط بقرينة الإنكسار n بالعلاقة

$$\alpha = 1 - \frac{1}{n^2} \qquad \text{(V-4)}$$

وقد استخلص فرينل هذه القاعدة نظرياً من فرضيات حول التكوين الميكانيكي للأثير. ولم تكن هذه الاعتبارات مقنعة تماماً ولكنها كانت تعطي تفسيراً للنتيجة السلبية لتجربة أراغو وأيدتها بقوة نتيجة تجربة فيزو[11] عام 1851 حول انسحاب الموجات الضوئية مع الماء المتحرك بسرعة داخل أنبوب L (انظر الرسم 15). فقد استنتج فيزو من قياس انتقال هدب fringe التداخل بين الموجتين الضوئيتين المنتشرتين في اتجاه حركة الماء والإتجاه المعاكس، أن الماء المتحرك يسحب الأثير جزئياً وفق قاعدة فرينل.



الشكل 15 ـ تجربة فيزو

(9) نذكر هنا تجربة قام بها فيزو على دوران اتجاه استقطاب الأشعة الضوئيّة لدى مرورها في كدسة من ألواح الزجاج. فقد ظن أولاً انها تعطي نتائج ايجابية ولكن النتائج كانت سلبية تماماً عندما اعادها براس Brace عام (1905) وستراسر Strasser عام (1907).

(10) D. F. ARAGO. C.R. Acad.. Sc. 8, 1839; 36, 1853, 38.

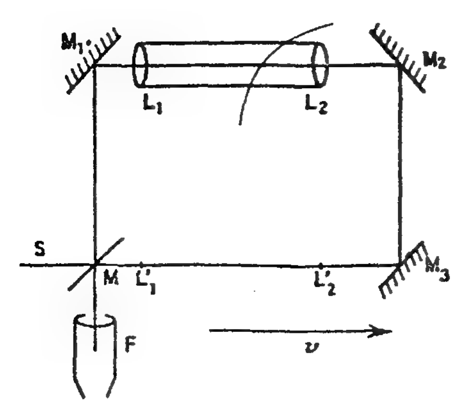
(11) H. FIZEAU. C.R. 33, 1851, 349; Ann. d. Phys. und. Chem. Erg. 3. 1853, 457.

A.A. MICHELSON et E.W. MORLEY. Amer. Journ. of. Science 31, 1886, 377.

وقد لقيت فرضية فرينل تأييداً أكثر دقة من تجربة زيمان[12] حول سرعة الضوء في مسطرة من بلورة الكوارتز quartz المتحركة بسرعة كبيرة وقد كانت هذه التجربة دقيقة لدرجة أن التشتت dispersion الضوئي كان يؤخذ بعين الإعتبار (انظر المقطع العاشر من الفصل السابع).

سوف نبين بدراستنا لتجربة هوك[13] المعادلة لتجربة فيزو كيف أن الانسحاب الجزئي للموجات الضوئية وفقاً لقاعدة فرينل يخفي تماماً أية ظاهرة من الدرجة الأولى لريح الأثير.

في هذه التجربة (انظر الرسم 16) تسقط الأشعة المنبعثة عن s على مرآة نصف شفافة M تحت زاوية 45°. فتنقسم الموجة الضوئية الساقطة الى موجتين تسلك الأولى المسار $M_3 M_2 M_1$ والثانية المسار المعاكس. وتنعكس على هذه المرايا تحت 45° لتتداخل عند وصولها الى المنظار F.



الشكل 16 ـ تجربة هوك

يتحرك هذا الجهاز بكامله مع حركة الأرض على مدارها حول الشمس بسرعة v. فإذا وضعنا في L_1L_2 أنبوب ماء لتنتشر فيه الموجتان الضوئيتان، نسبِّب فَرْقاً في وقت مسار الموجتين تتغير قيمته تبعاً للإنسحاب المحتمل للأثير المائي مع تحرك الأنبوب L_1L_2 بتحرك الأرض.

فإذا كان الأثير المائي لا يتحرك أبداً مع حركة الماء تبقى الموجتان المنتشرتان في هذا الأثير تتحركان بسرعة ثابتة c_1 بالنسبة للأثير الكوني وبسرعة $c_1 \pm v$ بالنسبة للأرض. وعكس ذلك إذا كان الأثير المائي ينسحب انسحاباً كاملاً مع حركة الأرض

P. ZEEMAN. Amst. Versl. 23, 1914, 245; 24, 1915, 18. (12)

M. HOEK. Archives néerlandaises des Sciences exactes et naturelles 3, 1868, 180. (13)

تصبح سرعة الموجتين $c_1 \pm \nu$ بالنسبة إلى الأثير الكوني الثابت ولكن بسرعة c_1 بالنسبة إلى الأرض. وفي الحالة بين الحالتين لانسحاب الأثير سحبا جزئيًا تكون سرعة الضوء بالنسبة إلى الأثير الكوني الثابت بين c_1 و $c_1 \pm \nu$ وبالنسبة إلى الأرض بين $c_1 + \nu$ و c_1. فيمكن كتابتها كما يلي:

$c_1 + \varphi$ بالنسبة إلى الأثير الثابت

$c_1 + \varphi - \nu$ بالنسبة إلى الأرض

حيث $\varphi = \alpha\,\nu$ وقيمة مُعامِل الانسحاب α تتراوح بين الصفر (إذا لم يكن هناك انسحاب) وواحد (إذا كان الانسحاب كاملًا).

تجتاز الموجة الأولى المسار $MM_1\,M_2\,M_3\,M$ فيكون الوقت اللازم لعبور الماء بطول $L_1L_2 = \ell$ والهواء في الجزء المقابل $L_2'\,L_1'$.

$$t_1 = \frac{\ell}{c_1 + \varphi - \nu} + \frac{\ell}{c + \nu} \qquad \text{(V-5)}$$

وتجتاز الموجة الثانية المسار المعاكس $MM_3\,M_2\,M_1\,M$ فيكون الوقت اللازم لعبور الهواء في الجزء $L_1'L_2'$ والماء في الجزء $L_2\,L_1$.

$$t_2 = \frac{\ell}{c + \nu} + \frac{\ell}{c_1 + \varphi + \nu} \qquad \text{(V-6)}$$

والفرق بين الوقتين هو:

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \ell \left\{ \frac{1}{c_1 + \varphi - \nu} + \frac{1}{c + \nu} - \frac{1}{c - \nu} - \frac{1}{c_1 - \varphi + \nu} \right\} \qquad \text{(V-7)}$$

$$= 21 \left\{ \frac{-\varphi + \nu}{c_1^2 - (\varphi - \nu)^2} - \frac{\nu}{c^2 - \nu^2} \right\} =$$

$$= \frac{21\,(\nu\varphi^2 - \nu^2\varphi - c^2\varphi + c^2 v - \nu c_1^2)}{(c^2 - \nu^2)\,[c_1^2 - (\varphi - \nu)^2]}$$

$$= \frac{21 \left(\frac{\varphi^2}{c^2} - \beta\,\frac{\varphi}{c} - \frac{\varphi}{\nu} + 1 - \frac{1}{n^2} \right)}{\nu\,(1 - \beta^2) \left[\left(\frac{c_1^2}{\nu} \right) - \left(1 - \frac{\varphi}{\nu}\right)^2 \right]}$$

حيث حدَّدنا قرينة الإنكسار بالقاعدة العادية:

$$n = \frac{c}{c_1} \quad . \tag{V-8}$$

يمكن أن نكتب إذاً الصيغة التقريبية:

$$\Delta t \simeq \frac{2\ell}{\nu}\left(-\frac{\varphi}{\nu} - \frac{1}{n^2} + 1\right) n^2 \beta^2 \tag{V-9}$$

مما يعنى فرْقاً في طور الموجتين[14]

$$\Delta\varphi = \nu\,\Delta t = \frac{c}{\lambda}\;\frac{2\ell}{\nu}\, n^2 \beta^2 \left(1 - \frac{1}{n^2} - \frac{\varphi}{\nu}\right)$$
$$= \frac{2\ell n^2}{\lambda}\left(1 - \frac{1}{n^2} - \frac{\varphi}{\nu}\right)\beta.$$

فإذا قبلنا بنظرية فرينل حول الانسحاب الجزئي[14]

$$\varphi = \nu\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \tag{V-10}$$

تكون قيمة مُعامِل الانسحاب

$$\alpha = 1 - \frac{1}{n^2} \tag{V-4}$$

فنجد وفقاً للمعادلة (V-9) أن $\Delta t = 0$ وبالتالي لا انتقال لهُدب التداخل. لذلك ليس هناك إمكانية لقياس أي تأثير لريح الأثير من الدرجة الأولى (ومن الدرجة الأولى فقط) في تجارب من النوع السابق. مما يعني أن قاعدة فرينل[15] والتجارب العديدة التي أكدتها تقطع الأمل بقياس أي أثر من الدرجة الأولى لريح الأثير. مما يعني أن الانسحاب الجزئي للأثير يعوِّض تلقائيًّا عن أي أثر من هذا النوع. وقد خلصت أعمال مسكارت[16] وفلتمان[17] Veltmann وبوتيه Potier[18] عام 1874 إلى تعميم هذه

---

(14) نشير إلى أن Δt هي من درجة β^2 بينما الكمية التي تقاس أي انتقال هدب التداخل هي من درجة $c\Delta t$ أي الدرجة الأولى β. اما في تجربة رومر مثلاً فالكمية المقيسة هي Δt أي الدرجة β^2. ولكن في تجربة فيزو كما في تجربة ميكلسون تُقاس كميات $\Delta\ell = c\Delta t$ حيث Δt هي من درجة β^2/c فتكون الظاهرة من درجة β^2 أي الدرجة الثانية.

(15) A.J. FRESNEL. Ann. de Chim. et de Phys. 9, 1818, 57.

(16) E. Mascart. Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. (2) 1, 1872, 157; 3, 1874, 363.
Traité d'optique (paris, 1893) Chap. XV p.38.

(17) W. VELTMANN. Astr. Nachr. 75, 1810, 145; 76, 1870, 129; Ann. d. ph. u. ch. 150, 1873, 491.

(18) A. Potier. Journ. Phys. 3, 1874, 201.

النتيجة (أي الفشل الأكيد لكل محاولة لقياس الحركة المُطلقة بالنسبة إلى الأثير بوسائل ضوئية). والواقع أن هذا الرأي لا يعني إلّا الظواهر من الدرجة الأولى ولكن مَسْكارت أشار إلى أنه من غير المكن تمييز أي هيكل إسناد غاليلي خاص بإجراء تجارب ضوئية كما هو الحال بالنسبة إلى التجارب الميكانيكية.

5 ـ نظرية لورنتز في الإلكترونات والظواهر من الدرجة الأولى

فَرضية الأثير الثابت

إن النتائج السلبية للتجارب حول انتشار الضوء في الأجسام الشفافة يُمكن تفسيرها بفرضية الانسحاب الجزئي للأثير بمعامل انسحاب وفق قاعدة فرينل. وقد جاءت صياغة نظرية ماكسويل لتحافظ على هذه الفرضية. ورغم محاولة هرتز توسيع فرضية ستوكس في الانسحاب الكامل للأثير مع المادة المتحركة لتشمل النظرية الكهرمغنطيسية، فقد أثبتت التجارب[19] أنه يجب المحافظة على فرضية الانسحاب الجزئي للأثير مع المادة المتحركة وفقاً لقاعدة فرينل.

ولكن نظرية لورنتز في الإلكترونات أعطت تفسيراً مجهريًّا لنظرية ماكسويل ونجحت بتوقع اختفاء كل أثر من الدرجة الأولى لريح الأثير بالافتراض أن هذا الأثير ثابت تماماً[20]. وذلك لأن استخلاص معادلات ماكسويل من نظرية لورنتز صحيح ليس فقط في حالة الأجسام الثابتة بل أيضاً في حالة الأجسام المتحركة شرط أن تكون سرعتها صغيرة بالمقارنة مع سرعة الضوء بحيث يمكن إهمال الدرجة الثانية من $\frac{v}{c} = \beta$. لكن معادلات ماكسويل صيغت في حالة الأجسام الساكنة أي في حالة مُشاهد ساكن بالنسبة إلى الجسم وبالتالي متحرك بسرعة ثابتة بالنسبة إلى الأثير. وعكس ذلك تفترض معادلات لورنتز المجهرية أن الأثير ثابت وأن المشاهد ثابت في هذا الأثير بينما المادة (أي الإلكترونات) متحركة بالنسبة إليه. وتطابق النظريتين يعني أنه من المستحيل حتى الدرجة الثانية أن نكشف على أية حركة لها مسرعة ثابتة بالنسبة إلى الأثير بواسطة تجربة كهرمغنطيسية. فالتجارب على الزيغ الفلكي بإدخال جسم كاسر للضوء (منظار فلكي يملأ ماء) مثلاً لا يمكن إلّا أن تكون سلبية دون الحاجة إلى الإفتراض أن الأثير يسحب جزئيًّا قرب المادة المتحركة. فتظهر تجربة فيزو إذاً النتيجة التالية: رغم أن الأثير ساكن تماماً هناك انسحاب

(19) هذه التجارب هي دراسة تحرك الأجسام الكهرنافذة (العازلة) في المجال الكهربائي (رونتغن 1885 وايشنوالد 1903) أو في مجال مغنطيسي (ويلسون).

(20) H. A. LORENTZ. The Theory of Electrons. Leipzig. 1916.

جزئي للموجات الكهرمغنطيسية[21] المنتشرة داخل الجسم المتحرك بمعامل انسحاب α حسب قاعدة فرينل[22].

---

(21) بتعبير ادق يبقى المجال الكهرمغنطيسي ساكناً مع الأثير ولكن كثافات الاستقطاب P والتمغنط M تسحب مع المادة. مما يسبب تغيُّراً في سرعة الانتشار وقرائن الانكسار في الأجسام المتحركة. انظر الصفحة 389 و 456 من [2] L.Bloch.

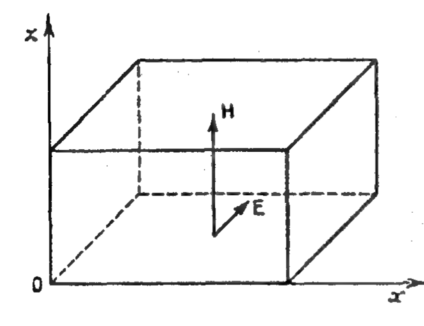
(22) يمكن اثبات ذلك بالمثل التالي الذي أعطاه ماكس بورن في الصفحة 200 من المرجع [10]:
M. Born (La théorie de la relativité et ses bases physiques).

لنفترض أن جسما عازلاً يتحرك باتجاه Ox بسرعة ν وأن موجة كهرمغنطيسية تنتشر فيه بالاتجاه ذاته. يكون المجال الكهربي $[E_y]$ والمجال المغنطيسي (H_z) المميزان لهذه الموجة متعامدين على هذا الاتجاه (انظر الرسم 17). ينتج عن تحرك المجال المغنطيسي مجال انتقاء كهربائي إضافي ناتج عن كثافة الاستقطاب P الذي تسحبه المادة معها. ويكون مجال الانتقال الكهربائي هذا باتجاه Oy وكما بيّنت تجربة ولسون بقيمة:

$$D = \epsilon E' = (\epsilon - 1) \nu H. \quad (1)$$

فيكون هناك مجال كهربائي إضافي

$$E' = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \nu H \quad (2)$$



الشكل 17 ـ سحب موجة مستوية مع جسم كهرنافذ متحرك

وليس $E' = \nu H$ كما لو أن الأثير داخل الجسم الكهرنافذ يسحب تماماً مع حركة الجسم وتؤكد تجربة ويلسون صحة العلاقة (2) في حال جسم كهرنافذ دائرة.

والقيمة $\frac{\epsilon-1}{\epsilon}$ لمُعامل انسحاب الأثير مع المادة المتحركة التي تعطيها نظرية ماكسويل تتفق تماماً مع القيمة التي اقترحها فرينل لأسباب أقل أقناعاً. لأن نظرية ماكسويل تعطي $\epsilon = n^2$ (انظر III.72) فنجد:

$$\frac{\epsilon - 1}{\epsilon} = \frac{n^2 - 1}{n^2} = 1 - \frac{1}{n^2} = \alpha.$$

وهي صيغة فرينل. ولكن في نظرية لورنتز لا ينسحب الأثير جـزئيًا بـل الإلكترونـات الموجـودة في صلب المادة. للحسابات المفصلة إرجع إلى الصفحة 290 من:

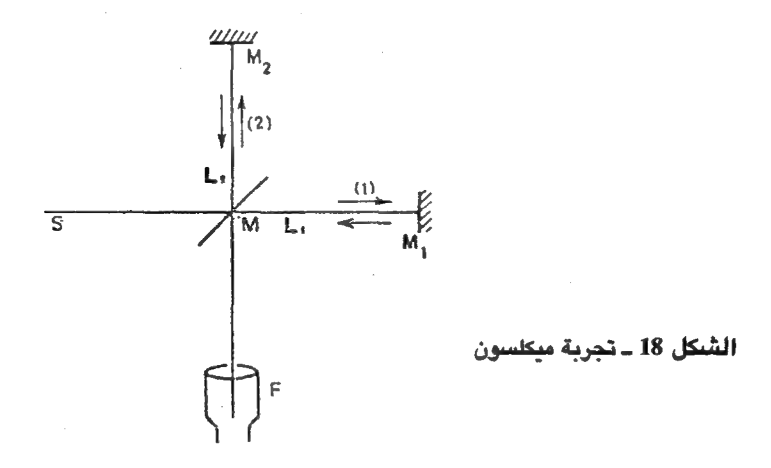
R. Becker. Théorie des électrons [1]

6 ـ الظواهر من الدرجة الثانية

بعد صياغة نظرية لورنتز أصبح الأمل بكشف ريح الأثير مرتبطاً بإمكانية قياس ظواهر من الدرجة الثانية[23]. وهذا كان هدف تجربة ميكلسون[24] عام 1881 ثم تجربة ميكلسون Michelson وموري Morley[25].

تجربة ميكلسون

إستعمل ميكلسون جهاز تداخل كما في الرسم 18: الضوء المنبعث من S ينقسم إلى موجتين بواسطة مرآة نصف شفافة، الشعاع الأول يخترق المرآة M وينعكس على المرآة M_1 ثم على المرآة M فيتبع إذاً المسار SMM_1MF. أما الشعاع الثاني فينعكس على المرآة M ثم على المرآة M_2 ثم يخترق M فيكون مساره SMM_2MF. تتداخل الموجتان وتُراقب هدب التداخل بواسطة منظار F. ويوضع الجهاز بأكمله على قاعدة عائمة على الزئبق مما يتيح توجيهها بسهولة.



الشكل 18 ـ تجربة ميكلسون

1 ـ يوجَّه الجهاز بحيث يكون الذراع L_1 الذي طوله ℓ_1 في اتجاه حركة الأرض بالنسبة إلى الأثير. فيكون الوقت اللازم كي يجتاز الشعاع الأول المسار MM_1M.

---

(23) يعود ذلك إلى أن استنتاج معادلات ماكسويل من نظرية لورنتز صحيح فقط حتى الدرجة الأولى ضمنا استناداً إلى التحريك الكهربائي للأجسام المتحركة. (المقطع السادس من الفصل الرابع).

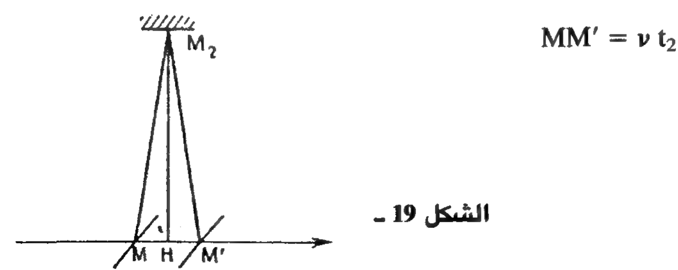
(24) A. A. Michelson. Amer: Journ. of. Science 22, 1881, 20.

(25) A.A. Michelson et E.W. Morley 34, 1887, 333.

$$t_1 = \frac{\ell_1}{c+\nu} + \frac{\ell_1}{c-\nu} = \frac{2\,\ell_1}{c}\frac{1}{1-\beta^2} \tag{V-11}$$

أما الشعاع الثاني فيتبع حقيقة المسار MM_2M' (انظر الرسم 19) لأن الجهاز بكامله يتحرك مع الأرض. M' هو موقع المرآة M تماماً بعد الوقت t_2 اللازم للشعاع الثاني كي ينتشر من المرآة M إلى المرآة M_2 ثم يعود إلى المرآة M، فتكون المسافة بين الموقعين:

$$MM' = \nu\, t_2$$



الشكل 19 ـ

فيكون طول المسار الفعلي للضوء:

$$MM_2 + M_3M' = 2\sqrt{\ell_2^2 + \left(\frac{\nu\, t_2}{2}\right)^2} = \sqrt{4\ell + \nu^2 t_2^2}$$

ويكون الوقت الذي يستغرقه الشعاع الثاني:

$$t_2 = \frac{MM_2 + M_2M'}{c} = \sqrt{\frac{4\ell_2^2}{c^2} + \beta^2\, t_2^2} \tag{V-12}$$

لأن سرعة الضوء بالاتجاهين MM^2 و M^2M' لا تختلف كثيراً عن السرعة c في اتجاه الذراع L^2 العمودي على اتجاه انتقال الجهاز مع حركة الأرض. نستخلص إذاً من العلاقة (V-12) أن:

$$t_2^2\,(1-\beta^2) = \frac{4\ell_2^2}{c^2} \tag{V-13}$$

أو:

$$t_2 = \frac{2\,\ell_2}{c}\,\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{V-14}$$

فيكون الفرق في الوقت الذي يستغرقه الشعاعان:

$$\Delta_1\, t = t_2 - t_1 = \frac{2}{c}\left(\frac{\ell_2}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{\ell_2}{1-\beta^2}\right). \tag{V-15}$$

2 ـ يُدار الجهاز 90° كي تتبادل أدوار الذراعين L_1 و L_2[26] فيصبح الذراع L_2 باتجاه حركة الأرض ويستغرق الآن الشعاعان الوقتين:

$$t_2' = \frac{2\ell_2}{c}\ \frac{1}{1-\beta^2} \qquad t_1' = \frac{2\ell_1}{c}\ \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{V-16}$$

ويكون الفرق بينهما:

$$\Delta_2 t = t_2' - t_1' = \frac{2}{c}\left(\frac{\ell_2}{1-\beta^2} - \frac{\ell_1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) \tag{V-17}$$

ينتج عن ذلك الدوران انتقال في موقع هُدب التداخل متناسب مع:

$$\Delta t = \Delta_2 t - \Delta_1 t = \frac{2}{c}\ (\ell_1 + \ell_2)\left(\frac{1}{1-\beta^2} - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right). \tag{V-18}$$

أي تقريباً:

$$\Delta t \simeq \frac{2}{c}\ (\ell_1 + \ell_2)\left[\ (1+\beta^2) - \left(1 + \frac{\beta^2}{2}\right)\right] = \frac{(\ell_1 + \ell_2)}{c}\ \beta^2 \tag{V-19}$$

كل فرق في الوقت يساوي دورة كاملة $\tau = \frac{\lambda}{c}$ يُحدث انتقالاً في موقع الهدب مساوياً المسافة بين هُدبين متتالين. ويحدث ذلك إذاً:

$$\ell_1 + \ell_2 \simeq \frac{\lambda}{\beta^2} \qquad \text{أي:} \qquad \Delta t \simeq \tau \tag{V-20}$$

أيّ:

$$\ell_1 + \ell_2 \neq 5.10^2\ \text{cm} = 50\ \text{m} \tag{V-21}$$

إذا استعملنا موجة طولها $\lambda \neq 5.10^{-5}$ سنتيمتر إذ إن سرعة الأرض هي $v \neq 30$ سنتيمتر (أي أن $\beta \neq \frac{1}{10000}$). ومن الممكن تحقيق ذلك باستعمال الانعكاسات المتكررة على المرايا. ويمكن تطوير دقة هذه القياسات للتوصل إلى قياس سرعة محتملة لا تتعدى 1.5 كلم/ثانية لريح الأثير كما فعل كندي Kennedy[27] عام 1926

(26) ترمي عملية التبادل هذه إلى إلغاء تأثير الفرق المحتمل بين طول الذراعين.

(27) R. J. KENNEDY. Proc. Nat. Acad., 12, 1926, 621.

والينغـزوورث Illingsworth[28] عام 1927 وبيكـارد Piccard وستاهـل Stahel[29] عـام 1928 وجوس Joos[30] عام 1930.

لقد كانت نتيجة تجارب ميكلسون سلبية تماماً وكذلك نتائج جميـع التجارب التي أعادت تجربة ميكلسون مع تحسين كبير في دقتها[31]. وقد أكدت هذه النتائج السلبية تجـارب مختلفة قـام بها تـروتون Trouton ونـوبل Noble[32] عـام 1903، وتـروتـون Trouton ورانْكـين Rankine[33] عـام 1908 وشـاز Chase[34] عـام 1927 وتـومـاشـك Tomashek[35] عام 1927 بدقة تصل إلى إمكانية قياس 4 أو 5 كيلومتر/ ثانية.

هكذا تبدو فرضية الأثير الثابت التي هي أساس نظرية لورنتز صحيحة في ظواهر الـدرجة الأولى وخـاطئة في ظـواهر الـدرجة الثـانية. ويمكن تفسـير نتيجة تجـربـة ميكلسون السلبيّة بفرضية الانسحـاب الكامـل للأثـير مع الـوسط المتحرك (هـرتز) وبفرضـية تغيير سرعة الضوء نتيجة لحـركة المصـدر[36] (ريتز Ritz) ولكن الفـرضية الأولى الصعبة القبول نظريًا تتنـاقض مع ظـاهرة الـزَّيْغ الفلكي وتجـربة فيـزو. أما الثانية فتنقضـها نتائج دراسة النجوم المزدوجة وتجربة توماشك. فسرعة الضوء تبدو عكس ذلـك ثابتـة لا تتغير مـع سرعة مصـدرها (دوسيتـر de Siter[37] عام 1912) أو حركة الأجسام القريبة منه (لودج Lodge[38] عام 1892).

---

(28) K.K. ILLINGSWORTH. Phys. Rev. 30, 1927, 692.

(29) A. PICCARD et E.STAHEL. Naturwiss., 14, 1926, 935; 15, 1928, 25.

(30) G. Joos. Ann. d. Phys., 7, 1930, 385.

(31) مع ذلك نشير إلى نتيجة إيجابية نوعا ما (ومخالفة للتوقعات) أشار إليها ميلر ولكن نتائج التجارب التي تلتها أسقطت تماما هذه النتيجة الإيجابية.
D.C. Miller. Rev. Mod. Phys. 5, 1933, 203.

(32) كانت ترمي هذه التجربة لتبيان دوران مكثّف كهربائي مؤلّف من لوحتين معلقتين تحت تأثير ريح الأثير.
F.T. TROUTON et H.R. NOBLE. Proc. Roy. Soc. 72, 1903, 132.

(33) F.T. TROUTON et A. RANKINE. Proc. Roy. Soc. 80, 1908, 420.

(34) C.T. CHASE. Phys. Rev., 30, 1927, 516.

(35) R. TOMASHEK. Ann. d. Phys., 73, 1924, 105; 78, 1925, 743; 80, 1926, 509; 84, 1927, 161.

(36) W. RITZ. Ann. de Chimie et de physique., 13, 1908, 145.

(37) W. de SITTER. Phys. Z. 14, 1913, 429 et 1267.

(38) O. LODGE. London Transaction. A. 184, 1909, 826.

7 ـ فرضية فيتز جيرالد ولورنتز

لقد نجح فيتزجيرالد Fitzgerald[39] ولورنتـز[40] بانقـاذ نظريـة الاثير الثـابت شرط القبـول بظاهـرة جديـدة وهي أن «الأجسام المتحـركة بسرعـة ثابتـة تتقلص بنسبة $\sqrt{1 - \beta^2}$ باتجاه حركتها».

وتفسر هذه الفرضية نتيجة تجربة ميكلسون السلبية، لأنه يجب استبدال ℓ_1 وهو طول الذراع باتجاه الحركة بالطول $\ell_1 \sqrt{1 - \beta^2}$ في حساب t_1. فنجد:

$$t_1 = \frac{2\ell_1}{c} \; \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta^2} = \frac{\ell_1}{\ell_2} \, t_2 \qquad \text{(V-22)}$$

مما يعطي:

$$\Delta_1 t = \frac{2}{c} \; (\ell_2 - \ell_1) \; \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \Delta_2 t \qquad \text{(V-23)}$$

إن فرضية التقلص بنسبة $\sqrt{1 - \beta^2}$ تنطبق أيضا على أجهزة القياس مما يجعل أيّة تجربة للكشف عن ريح الأثير تعطي نتيجة سلبية ليس فقط في الدرجة الأولى بل في كل الدرجات تلقائيًا.

من الممكن الظن أن هذا التقلص هو بدوره ظاهرة يمكن قياسهـا وتصور تجـارب للكشف عنها، فقرينة انكسار جسم صلب مثلاً تتغير نتيجـة لحركتـه. لكن المحاولات التجـريبية حـول هذا المـوضوع التي قـام بها رَايْـلي Rayleigh[41] وبراس Brace[42] كانت سلبية بدورها. وكذلك كانت تجارب تروتون ورانكين[43] حول المقاومة الكهربائيـة للأسلاك الناقلة وتجارب وود Wood وتومليسون Tomlison وإيسكس Essex[44] حول

---

(39) Cf. O. LODGE. London Transaction. A. 184, 1893, 727.

(40) H. A. LORENTZ. Amest. Verh. Akad. v. wer. 1, 1892, 74.

(41) Lord RAYLEIGH. - Does motion through the ether cause double refraction (Phil. Mag. 4, 1902, 678).

(42) D.B. BRACE. - On double refraction in matter moving through the ether (Phil. Mag. 1904, 317).

(43) F.T. TROUTON et A.O.RANKINE. - On the electrical resistance of moving matter (Proc. Roy. Soc., 80, 1908, 420).

(44) A.B. WOOD, G.A. TOMLISON et L. ESSEX. - The effect of the Fitzgerald- lorentz contraction on the frequency of longitudinal vibration of a rod (Proc. Roy. Soc., 158, 1937, 606).

قياس تردد ارتجاج مسطرة من الكوارتز.

لذلك وجب الإفتراض أن تأثيرات هذا التقلص يحجبها تأثيرٌ آخر للحركة وهو زيادة في كتلة الجسم. تماماً كما كانت تحجب تأثيرات ريح الأثير ظواهر أخرى. وفي الواقع أن تغيراً متلازماً للطول والكتلة حسب القواعد:

$$\ell = \ell_0 \sqrt{1 - \beta^2} \qquad \text{(V-24)}$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \qquad \text{(V-25)}$$

يقود إلى استحالة الكشف عن تأثيرات الحركة المستقيمة بسرعة ثابتة في أيّة ظاهرة ضوئية.

ولكن الصيغة (V-25) التي يمكن استخلاصها طبيعيًّا من علم التحريك النسبي (التي صاغها لاحقاً أينشتاين) يمكن استخلاصها أيضاً من فرضية تقلص الطول إذا طبقت على الالكترون ذاته. لذلك يمكن التساؤل ما إذا كان الشرط (V-24) الضروري لتعليل النتيجة السلبية لتجربة ميكلسون كافيا أيضاً كي تكون كل الظواهر الكهرمغنطيسية مستقلة تماماً عن الحركة المستقيمة بسرعة ثابتة للهياكل الإسنادية المستعملة لدراستها.

وقد أثبت لورنتز وبصورة مستقلة بوانكاريه Poincaré أنه يجب أيضاً أن نحدِّد الوقت في كل هيكل اسناد غاليلي[45]. فإذا كان الهيكل الأول يتحرك بسرعة ν مستقيمة وثابتة باتجاه Ox بالنسبة إلى الهيكل الثاني يجب التحويل من هيكل إلى آخر حسب القاعدة:

$$x' = \frac{x - \nu t}{\sqrt{1 - \beta^2}} \qquad t' = \frac{t - \frac{\beta}{c}\, x}{\sqrt{1 - \beta^2}} \qquad \text{(V-26)}$$

كي تكون معادلات ماكسويل مستقلة تماماً عن هيكل الاسناد الذي تُصاغ فيه. وتحدِّد العلاقات (V-26) قاعدة لتحويل الإحداثيات يُسمى تحويل لورنتز ويستخلص أيضاً من فرضيات أينشتاين التي سندرسها في ما يلي.

---

(45) نعني بالهياكل الاسنادية الغاليلية أنظمة المحاور المستقيمة (الأنظمة الديكارتية) المتحركة الواحدة بالنسبة للأخرى بحركة مستقيمة وبسرعة ثابتة (وطبعاً ليس الهياكل المرتبطة بقواعد تحويل غاليليو). ولا يتفق هذان التحديدان إلّا في حالة الميكانيك الكلاسيكي (التقليدي).

إذا قبلنا بنظريـة لورَنتـز في الإلكترونـات والمعادلـة (V-25) التي تستخلص منها نستنتج من قاعدة التحويل (V-26) أن معادلات ماكسويل تحافظ على صيغتها في كل هيـاكل الاسنـاد الغاليليـة وبالتـالي أنه من المستحيـل الكشف عن الحركـة المطلقة بالنسبة إلى الأثير بواسطة أيَّة تجـربة كهـرمغنطيسية. فتكـرِّس إذاً نظريـة لورنتـز نظرية الأثير الثابت. وبالوقت ذاته تحكم بالإخفاق كل تجربة كهـرمغنطيسية تهـدف إلى الكشف عن الأثير تجريبيًّا.

ب ـ مبدأ النسبية الخاصة

8 ـ فرْضية إينشتاين الأساسية

يُبنى الميكانيك الكلاسيكي على الفرضية التالية:

1 ـ تتكافأ جميع هياكل الإسناد الغاليلية في وصف الحركة.

فإذا قبلنا أيضا صلاحية قانون تحويل غاليليـو ينتج عن هـذه الفرضيـة قانـون جمع السُرع في الميكانيك الكلاسيكي. ولهذا القانون اللازمة corollary التالية:

I ـ **تنتشر سرعة الضوء من هيكل إسناد إلى آخر.**
ولكن التجارب التي أجريت في دراسة التحريك الكهربـائي الكلاسيكي قـادت إلى النتيجة التالية[46].

II ـ **ينتشر الضوء في الفراغ بـالتناحي في كـل الاتجاهـات مهما كـانت حركـة المصدر، وسرعته هي ثابت مطلق c في جميع الهياكل الاسنادية الغاليلية.**

لقد حاولت النظريات الأولى للأثير أن تـزيل التنـاقض بين الفـرضيات (I) و (II)

---

(46) نشير هنا مع O. Costa de Beauregard إلى ان التجارب لا تستبعد الإمكانيات التالية:
أ ـ أن تتغير سرعة الضوء تبعا لسرعة ريح الأثير (ولكن ليس تبعا لإتجاهها)
ب ـ أن تتغير سرعة الضوء تبعاً لإتجاه سرعة ريح الأثير وذلك في حال انتشاره باتجاه واحد.
الإمكانية الأولى رغم انها قليلة الإحتمال لا تتعارض مع مبدأ النسبية الخاصة. أما الثانية فلا يمكن التأكد من صحتها انظر الصفحة 15 من المرجع [II]:
O. Costa de Beauregard. La Relativité Restreinte [II]
وبذلك تكون فرضية النسبية الخاصة والتي تنص على أن انتشار الضوء بالتناحي في كل الاتجاهات في حال انتشاره في اتجاه واحد وباستقلال عن حـركة المصـدر غير مفـروضة حصراً بـالتجربـة، ولكنها الفرضية الأبسط التي تعطي تفسيراً للتجارب وتسمح ببناء نظرية متماسكة تتفق كل توقعاتها ونتائجها مع التجربة.

وذلك بتجزىء سرعة الضوء بالنسبة إلى الأثير إلى جزءين:

- سرعة الأثير الذي هو داخل الأجسام الشفافة أو الأجسام الكهرنافذة بالنسبة إلى الأثير الكوني.
- سرعة الضوء بالنسبة إلى الأثير الذي هو داخل الأجسام الشفافة.

الجزء الأول من سرعة الضوء أدى إلى تحديد معامل انسحاب مناسب، أما الجزء الثاني فهو ثابت. ومجموع الجزءين يجعل الهياكل الاسنادية الغاليلية متكافئة ولكن حتى الدرجة الأولى فقط (ضمناً) من التقارب.

أما فرضية تقلص الأجسام وتمدُّد الفترات الزمنية التي اقترحها لورنتز فتقود عكس ذلك إلى تكافؤ الهياكل في كل درجات التقارب. ولكن ذلك يعود إلى نوع من التشوه distortion المناسب في قياسات الأجسام المتحركة. وكما قال بورن يعود هذا التكافؤ إلى نوع من «الخداع البصري».

في الواقع ليس هناك خلاف بين الفرضيات I وII بل بين I′ وII. لأن قانون جمع السرع في الميكانيك الكلاسيكي يفترض صحة تحويل غاليليو الذي يؤمن صلاحية القانون الأساسي لعلم التحريك في كل هياكل الاسناد الغاليلية. أما فرضية تناحي انتشار الضوء في كل الاتجاهات وثبات سرعته فيفترض صحة تحويل لورنتز الذي يؤمن صلاحية معادلات ماكسويل في كل الهياكل الاسنادية الغاليلية.

لذلك يتحتم الاختيار بين هذين التحويلين أي:

1 - قبول الصلاحية المطلقة لقوانين نيوتن وتحويل غاليليو الذي يحافظ على صيغتها في جميع الهياكل الإسنادية الغاليلية. عندئذ يجب افتراض وجود ظواهر جديدة في التحريك الكهربائي تقود إلى معادلات لورنتز وبوانكاريه (V-24) و(V-25) وتؤمّن بنوع من التوازن صلاحية معادلات ماكسويل في كل الهياكل وعدم إمكانية الكشف عن الأثير.

2 - أو قبول صلاحية معادلات لورنتز وبوانكاريه وبشكل عام تحويل لورنتز الذي يقود إلى صلاحية معادلات ماكسويل في كل الهياكل. ولكن ذلك يفرض إعادة صياغة للحركيات وعلم التحريك.

لحسم هذا الصراع بين الحركيات والبصريات، اختارت النسبية الخاصة البصريات لتتخذ منها نموذجاً لصياغة الميكانيك النسبي[47]. وكان هذا بصياغة

(47) لقد كان هذا الاختيار طبيعيًا لأن البصريات هي الأكثر دقة «والأكثر هندسية بين العلوم الفيزيائية» كما =

مبدأي النسبية الخاصة اللذين ظهرا أولاً وشكليًّا في نظريات لورنتز وبوانكاريه.

I ـ **هناك تكافؤ بين جميع هياكل الإسناد الغاليلية، وهذا التكافؤ ليس فقط لصياغة قوانين الميكانيك بل كل الفيزياء.**

II ـ **ينتشر الضوء في الفراغ بتناحٍ في جميع الإتجاهات وسرعته ثابت مطلق c.**

يُستخلص هذان المبدآن من قواعد لورنتز وبوانكاريه. ولكن أصالة نظرية أينشتاين كانت بالإثبات أنهما يرتبطان بتحليل صحيح لمفاهيم المكان والزمان وأنهما يقودان إلى الصلاحية المطلقة لقانون تحويل لورنتز الذي يعبِّر ليس عن الظواهر بل عن خصائص أساسية للمكان والزمان.

فقد أثبت أينشتاين(48) عام 1905 أن تقلص الطول وفق قاعدة لورنتز ليس اصطناعيًّا بل هو نتيجة لتحليل دقيق لمفهوم التطابق الزمني أجراه على ضوء المبدأ الثاني أيّ مبدأ انتشار الضوء في الفراغ بسرعة ثابتة ومطلقة (أي مستقلة عن هيكل الاسناد الغاليلي المستعمل).

9 ـ انتقاد مفهوم التطابق الزمني

لقد كانت الفيزياء قبل أينشتاين تعتبر أن مفهوم التطابق الزمني عن بعد ذا معنى بديهي. ولكن التأكد العملي من التطابق الزمني في موقعين مختلفين A و B تفصل بينهما مسافة ℓ يفترض وجود آلتين لضبط الوقت متزامنتين synchronised في هاتين النقطتين. ولكن ضبط التزامن أو التأكد منه لا يتم إلّا باستعمال إشارة. وبما أن الإشارات الكهرمغنطيسية هي الأسرع يكون التصحيح الناتج عن وقت الانتشار هو الأقل باستعمالها.

1 ـ إذا كانت النقطتان A و B في هيكل الاسناد ذاته (الذي نفترضه ساكنا) لا يمكن أن نحدّد تطابقاً زمنيًّا مطلقاً بل نسبيًّا وذلك كما يلي: يكون حدثان في النقطتين A و B متطابقين زمنيًّا إذا كانت إشارتان قد انطلقتا من A و B مع

= يقول كوستا دو بورغارد في الصفحة 15 من المرجع [11]، نشير ايضا إلى أن الحركية وعلم التحريك هما من العلوم الفيزيائية ويجب أن يتأثرا بتقدمها. فصياغتهما بطريقة جامدة لا تتفق مع المنهجية العلمية.

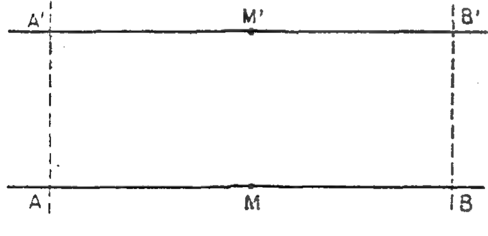
(48) A. EINSTEIN. Ann. d. phys., 17, 1905, 891. Jahrb. d. Radioaktivitat und Elektronik, 4, 1907, 411.

الحدثين تصلان في الوقت ذاته إلى مُشاهد في M التي هي منتصف AB[49].

أما إذا كانت A و B متحركتين بالسرعة الثابتة ذاتها يبقى التحديد السابق صحيحاً ولا يأخذ المُشاهد في هذا الهيكل المتحرك هذه الحركة بعين الاعتبار. وهذا ما يجري عمليًا في حالة تبادل الإشارات الضوئية بين المُشاهدَيْن في هيكل إسناد معين لأن الحركة المطلقة لهذا الهيكل بالنسبة إلى الأثير لا يمكن الكشف عنها أو قياسها بأيّة طريقة.

2 ـ إذا استعملنا الاصطلاح السابق لتحديد التطابق الزمني في هيكل اسناد غاليلي معين من السهل أن نثبت أن هذا التطابق ليس صحيحاً في هيكل إسناد غاليلي ثانٍ. لذلك نتخذ المثل الذي أعطاه أينشتاين عن خط حديدي AB يتحرك قطار A′B′ بسرعة v. يتطابق منتصف القطار M′ مع منتصف الخط M لدى وصول الإشارتين المنبعثتين من طرفي القطار إلى النقطة M. فيعتبر المشاهد الواقف على الأرض أن الحدثين في A و B متطابقين زمنيًا. أما المُشاهد على متن القطار الموجود في M′ فإنه يتحرك مع القطار نحو B فيلتقط إشارة B قبل إشارة A. وبما أن التطابق الزمني للإشارتين إلى منتصف A′B′ هو المعيار الوحيد للتطابق الزمن نستنتج أن التطابق حسب المشاهد M لا يعني التطابق حسب المشاهد M′. وذلك لأن كلًا من المشاهدين يمكن أن يؤكد عن صواب أن هيكل إسناده الذاتي ثابت بينما هيكله الثاني يتحرك وذلك لأنه ليس من تجربة تكشف عن حركة هيكل اسناد بالنسبة إلى آخر.

إذاً ليس هناك تطابق زمني مطلق[50]. هذه النتيجة تستبعد فرضية الزمن المطلق وبالتالي صحة قاعدة تحويل غاليليو.



الشكل 20

(49) يشير اينشتاين إلى أن القول بأن الضوء الذي يستغرق الوقت ذاته لقطع المسافتين AM و BM هو اصطلاح لا يوضح شيئاً من خصائص الضوء. أما تحديد التطابق الزمني المُطلق فيفرض التأكد من ان الضوء يستغرق الوقت ذاته لقطع المسافتين BM و AM أي أن نملك وسيلة لقياس الوقت (أينشتاين).

(50) لقد توصل بوانكاريه إلى هذه النتيجة. لكنه لم يذهب بعيداً إلى حد الاستبعاد النظري للإشارات المتطابقة زمنيًا أو استخلاص النتائج المنطقية لتحديد التطابق الزمني بطريقة فيزيائية بحتة.
H. POINCARE. La valeur de la Science, p. 35. La mesure du temps. Rev. Meta. et Morale VI, 1.28. p.1

10 ـ تحويل لورنتز

يمكن أن نستخلص تحويل لورنتز من المبدأ الثاني للنسبية الخاصة أيّ أن سرعة الضوء متناحية في كل الاتجاهات وتساوي c في كل هياكل الاسناد الغاليلية.

لنتفحص عن قرب كيف يبدو الانتشار الكهرمغنطيسي في هيكلين إسناديين غاليليين S (oxyz) و S′ (o′x′y′z′) وفق نظرة أينشتاين. فإذا كانت سرعة الضوء تساوي c في الهيكلين تكون الصيغ

(V-27) $$ds^2 = -dx^2 - dy^2 - dz^2 + c^2 dt^2$$

(V-28) $$ds'^2 = -dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 + c^2 dt'^2$$

إيجابية في حالة حركة جسم مادي بسرعة $v < c$ ومنعدمة في حالة انتشار موجة ضوئية. يمكن إذاً أن نكتب:

(V-29) $$ds'^2 = f\,(xyzt)\, ds^2$$

ويمكن أن نثبت[51] استناداً إلى تبادلية الهيكلين الاسناديين أن:

(V-30) $$f\,(xyzt) = k = 1$$

فتعود المسألة إذاً إلى إيجاد صيغة تحويل الإحداثيات بحيث ان:

(V-31) $$ds'^2 = ds^2$$

أي تلك التي تحول الفضاء الإقليدي ذا الأبعاد الأربعة إلى نفسه. وحل هذه المسألة معروف جيداً وهو بالتحويلات الخطية linear والمتعامدة orthogonal في الفضاء الرباعي[52].

لتبسيط المسألة ندرس الحالة الخاصة التي تكون v سرعة S′ (o′ x′ y′ z′) بالنسبة S(oxyz) والمحاور ox و o′x′ متوازية وباتجاه واحد. بسبب التناظر حول

(51) إرجع مثلاً إلى الصفحة 8 من [19] Vol. II:
J. CHAZY. La théorie de la Relativité et la Mécanique Céleste.

(52) إن اقتراح الفضاء الرباعي للمكان والزمان يعود إلى بوانكاريه:
H. POINCARE. Rend. Pal., 12, 1906, 129.
H. MINKOWSKI. Raum und Zeit. Phys. Zs. 10, 1909, 104.

Ox يكون التحويل الخطي والمتعامد بالصيغة التالية:

(V-32) $$x' = g(\nu)\,(x - \nu t) \;,\; y' = y \;,\; z' = z \;,\; t' = h(v)t - \ell(\nu)\,x$$

أما المُعادلة التطابقية (V-31) فتعطي العلاقات التالية:

(V-33) $$\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)^2 - c^2\left(\frac{\partial t'}{\partial x}\right)^2 = 1$$

(V-34) $$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial t'}{\partial t}\right)^2 = -1$$

(V-35) $$\frac{\partial x'}{\partial x}\,\frac{\partial x'}{\partial t} - c^2\,\frac{\partial t'}{\partial x}\,\frac{\partial t'}{\partial t} = 0.$$

وإذا أحللنا في هذه المعادلات المشتقات الجزئية المستخلصة من (V-32) نجد أن:

(V-36) $$g(\nu) = h(\nu) = \frac{\pm 1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

(V-37) $$\ell(\nu) = g(v)\frac{\nu}{c^2}$$

وعلينا أن نختار الإشارة (+) في هذه الصيغ كي تتطابق المحاور الثلاثة في الوقت الابتدائي.

فتكون قواعد التحويل (وهي تلك التي توصل إليها لورنتز انطلاقاً من فرضيات مختلفة تماما) كما يلي:

(V-38) $$\begin{cases} x' = \dfrac{x - \nu t}{\sqrt{1-\beta^2}} & (1) \\ y' = y & (2) \\ z' = z & (3) \\ t' = \dfrac{t - \dfrac{\beta}{c}\,x}{\sqrt{1-\beta^2}} & (4) \end{cases}$$

أو القواعد العكسية

$$(V\text{-}39)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{x' + vt'}{\sqrt{1-\beta^2}} & (1)\\ y = y' & (2)\\ z = z' & (3)\\ t = \dfrac{t' + \dfrac{\beta}{c}x'}{\sqrt{1-\beta^2}} & (4) \end{cases}$$

التحويلات (V-38) و (V-39) في الحالة الخاصة التي تكون فيها السرعة النسبية للهياكل النسبية v باتجاه أحد المحاور تُسمى تحويلات لورنتز الخاصة. إن النتائج التي حصل عليها لورنتز وبوانكاريه تُستخلص بسهولة من قواعد التحويل هذه. سوف نطلق عبارة هياكل لورنتز الاسنادية على الهياكل المرتبطة بقواعد تحويل من نوع (V-38) و (V-39) أو تعميماتها.

11 ـ نتائج قواعد التحويل

1 ـ تقلص الطول

لنفترض أن مسطرة ساكنة في الهيكل الاسنادي S′ ومتوازية مع المحور o′x′ يكون طولها في هذا الهيكل

$$(V\text{-}40)\qquad \ell'_0 = x'_1 - x'_2$$

أما في الهيكل الاسنادي S فنحصل على طولها بتحديد إحداثيات طرفيها x_1 و x_2 في الوقت ذاته في الهيكل S. فنجد استناداً إلى المعادلة $(V\text{-}38)_1$ إذا أخذنا $\Delta t = t_1 - t_2 = 0$ أن طول هذه المسطرة ℓ كما يقيسه المشاهد في S هو:

$$(V\text{-}41)\qquad \ell = x_1 - x_2 = (x'_1 - x'_2)\sqrt{1-\beta^2} = \ell'_0\sqrt{1-\beta^2} < \ell'_0$$

فتبدو المسطرة المتحركة مع الهيكل الاسنادي S′ أقصر إذا شوهدت من الهيكل S.

وعكس ذلك إذا كانت مسطرة طولها ℓ_0 ساكنة في S يكون طولها في هذا الهيكل الاسنادي الذاتي

$$\ell_0 = x_1 - x_2 \qquad \text{(V-42)}$$

يـرى مشاهـد في S' أن احداثيـات طرفيهـا في الـوقت ذاتـه $(\Delta t' = 0)$ هي x'_1 و x'_2 وإستناداً إلى $(V\text{-}39)_1$ يكون طول المسطرة:

$$\ell' = x'_1 - x'_2 = (x_1 - x_2)\sqrt{1-\beta^2} = \ell_0 \sqrt{1-\beta^2} < \ell_0 \qquad \text{(V-43)}$$

فيجد المشاهد S' أيضاً أن المسطرة الثابتة في S تبدو أقصر.

يعني هـذا أن طول مسطـرة يكون أكبـر في الهيكل الاسنـادي المـرتبط بهـا (أي هيكلها الاسنادي الذاتي). أما إذا قيست في هيكل آخر فتبدو كأنها متقلصة بنسبـة $\sqrt{1-\beta^2}$. وهـذا التقلص لا يمكن تفسيره كتـأثير لـريح الأثـير أي نتيجة للحـركة الحقيقية بالنسبة إلى هيكل اسناد مُطلق. فهي ظاهرة متبادلة بين الهياكل الاسنادية: إذا كان مشاهدان يحملان مسطرتين متساويتين ثم يحرك واحد منهمـا بالنسبـة إلى الآخـر فإن كـلا منهما يـرى أن مسطـرة الآخـر أقصر من المسطـرة التي يحملهـا. فتقلص الطول هو إذاً نتيجة للحركة النسبية. ويستخلص مباشرة من تحويل لورنتـز ولا يحتاج إلى أيّة فَرْضية إضافية حول تكوين المادة(53).

2 ـ تمدد الفترات الزمنية

كـذلـك لنفتـرض أن حـدثـين وقعـا في الـزمنـين t'_1 و t'_2 في المـوقـع ذاتـه في $(\Delta x' = x'_1 - x'_2 = 0)$ فتكون الفترة الزمنية $t'_1 - t'_2$ في S'. أمـا في S فنجد استنـاداً إلى المعادلة $(V\text{-}39)_4$

$$t_1 - t_2 = \frac{t'_1 - t'_2}{\sqrt{1-\beta^2}} > t'_1 - t'_2 \qquad \text{(V-44)}$$

---

(53) لقد كانت فرضية التقلص في أعمال فيتز جيرالد نتيجة لقوى تأثير الأثير على الأجسـام المتحركـة. فكان منَ المفترض أنها تحدث تشوهات مطلقة أي مستقلة عن الهيكل الاسنـادي المستعمل. أمـا لورنتـز فقد حاول أن يربط بين هذه القوى وتفاعلات عامة بين الجزيئيات. ولا يمكن كشف عدم تناحي هذا التقلص تجريبيًّا بسبب تغيرات الفترات الزمنية والكتلة الملازمة لها. فهي نوعا ما ذات طابع مطلق.

وبعد انتقادات إينشتـاين لم يعد التقلص يعتبـر نتيجة لقـوى معينة. فهـو مرتبط مـوضوعيًّـا (أي باستقلالية عن المشاهد) بالهيكل الاسنادي المستعمل. وهو ليس ظاهرياً لأنه لا يمكن مقـابلته بحقيقـة اخرى مميزة لكونه ظاهرة قـابلة للتبـادل بين الهيـاكل الاسنـادية. فمفـاهيم الطول أو الابعـاد هي إذاً نسبية بطبيعتها. وتنتج بموضوعية مباشرةً من نسبيـة التطابق الـزمني عن بعد في هيكلـين إسناديـين غاليليين. لمزيد من المعلومات حول هذا الموضوع يرجع إلى الهياكل الاسنادية المتعددة المذكورة في كتاب H. Arzeliés [8] الصفحة 105.

أي أن كل الظواهر في المرجع S' تبدو للمشاهد في الهيكل الاسنادي S متباطئة بالنسبة $\sqrt{1-\beta^2}$.

وعكس ذلك إن الفترة الزمنية $t_1 - t_2$ المقاسة في المكان ذاته في S $(x = 0)$ تبدو في S' كأنها استناداً إلى المعادلة $(V\text{-}38)_4$

$$t'_1 - t'_2 = \frac{t_1 - t_2}{\sqrt{1-\beta^2}} > t_1 - t_2 \qquad \text{(V-45)}$$

أي أن الظواهر في الهيكل الاسنادي S تبدو للمشاهد في الهيكل S' أبطأ بنسبة $\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ (54).

(54) يمكن هنا أن ندخل تحليلاً مفيداً للترتيب الزمني للحوادث وإمكانية ارتباطها سببيًّا (ارجع إلى الصفحة 99 من [8] H. Arzeliés).

أ ـ لا يمكن لحدثين متطابقين زمنيا في موقعين مختلفين A و B في $S' \equiv S_0$ وتفصل بينهما مسافة ℓ_0 أن يرتبطا بعلاقة سببية (لأن هذه العلاقة تفترض أن يكون الفاصل الزمني بين الحدثين $t_0 \geqslant \frac{\ell_0}{c}$). ويكون الحال كذلك إذا شوهد الحدثان في هيكل إسناد S، لأن حدثين متطابقين في $S' \equiv S_0$ (أي $t' = t_0 = 0$) يبدوان في S (استناداً إلى (V - 39)) مفصولين بمسافة وفترة زمنية.

$$\ell = \frac{\ell_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad t = \frac{\beta\,\ell_0}{c\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \frac{\ell}{t} = \frac{c}{\beta} > c.$$

ب ـ يمكن لحدثين $A(t'_A)$ و $B(t'_B)$ في نقطتين مختلفتين في $S' = S_0$ على مسافة $AB = \ell_0$ وفترة زمنية $t_0 = t'_B - t'_A$ أن يرتبطا بعلاقة سببية إذا $u_0 = \frac{\ell_0}{t_0} \leqslant c$ فنجد أيضا في الهيكل الاسنادي اللورنتزي S:

$$\mu = \frac{\ell}{t} = \frac{\ell_0 + \nu t}{t_0 + \frac{\nu}{c^2}\ell_0} = \frac{\mu_0 + \nu}{1 + \frac{\nu\mu_0}{c^2}} \leqslant c \quad \text{إذا} \quad \mu_0 \leqslant c$$

عندئذ يتتابع الحدثان A و B بالترتيب الزمني ذاته في الهيكلين ويمكن أن يرتبطا بعلاقة سببية.

ج ـ لا يمكن لحدثين $A(t'_A)$ و $B(t'_B)$ في نقطتين مختلفتين من $S' \equiv S_0$ على مسافة $AB = \ell_0$ وفترة زمنية $t_0 = t'_B - t'_A > 0$ أن يرتبطا بعلاقة سببية إذا $\mu_0 = \frac{\ell_0}{t_0} > c$ فنجد في الهيكل الإسنادي اللورنتزي S استنادا إلى (V - 39)

$$t = t_B - t_A = \frac{t_0 + \frac{\nu}{c^2}\ell_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = t_0\,\frac{1 + \frac{\nu}{c^2}u_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

=

3 ـ لازمة لتقلص الطول: تغيُّر الزوايا والأحجام

لنفترض أن خطاً مستقيماً OM يرتبط بالهيكل الاسنادي S ذي الأصل $O(x_0, y_0)$ بحيث إن OM هو في السطح المستقيم xOy ويشكل مع Ox زاوية $\widehat{Ox, OM} = \alpha$.

تخضع كل نقطة من هذا الخط إذا أُخذت في الوقت ذاته $(\Delta t = 0)$ إلى المعادلة:

$$y - y_0 = (x - x_0)\, tg\alpha. \qquad \text{(V-46)}$$

لتحديد انحدار هذا الخط في الهيكل الاسنادي اللورنتزي S' يقيس مشاهد ثابت في هذا الهيكل إحداثيات النقطتين $M(x, y)$ و $O(x_0, y_0)$ في الوقت ذاته t' في S' (أي $\Delta t' = 0$) ويعني هذا طبعاً أوقاتاً مختلفة في S[55]. فنجد استناداً إلى التحويل (V-39) مع $\Delta t' = 0$

$$x - x_0 = \frac{x' - x'_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}\ , \quad y - y_0 = y' - y'_0 \qquad \text{(V-47)}$$

مما يعني أن انحدار الخط في الهيكل الاسنادي S' هو:

$$(tg\,\alpha')\,\Delta t' = 0 = \frac{y' - y'_0}{x' - x'_0} = \frac{tg\,\alpha\,\Delta\, t = 0}{\sqrt{1 - \beta^2}} > (tg\,\alpha)\,\Delta t = 0 \qquad \text{(V-48)}$$

وأقل قيمة له هي في الهيكل الاسنادي الذاتي.

= ومن الممكن مثلاً عكس الترتيب الزمني أي جعل $t < 0$ رغم أن $t_0 > 0$ والشرط لذلك هو:

$$\frac{1 + \frac{v}{c^2}\,\mu_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} < 0 \quad \text{أي} \quad u_0(-v) > c^2$$

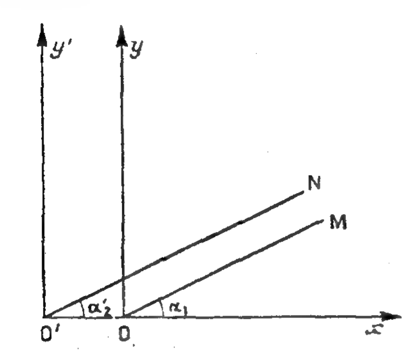
حيث v هي سرعة S بالنسبة $S' \equiv S_0$. وهذا الشرط ممكن تحقيقه لأن الحدثين لا يرتبطان بعلاقة سببية في الهيكل الإسنادي الذاتي (يمكن أن $u_0 > 0$) انظر في الصفحة 101 من المرجع [8] لمثل على هذه الامكانية أعطاه إيسكلانغون Esclangon.

(55) نستخلص من ذلك أن مقارنة القياسات التي ترمي إلى تحديد انحدار خط في الفضاء ليس له المعنى المطلق الذي كان في النظريات ما قبل النسبية. إذ إننا نقابل في الحقيقة معطيات لا يمكن أن تكون متطابقة زمنيًا في الهياكل الاسنادية S و S'. بشكل عام لا يمكن أن نحافظ على المفهوم الكلاسيكي للجسم الصلب. فتظهر نتائج كل عملية قياس كرسوم تخطيطية diagrams في المكان والزمان في كل هيكل إسناد لورنتزي. ونكتفي هنا بمقارنة «لقطات خاطفة» في المقاطع $t = c^{te}$ أو $t' = c^{te}$ من المكان والزمان. إرجع إلى الصفحة 120 من [18] J.L. Synge.

كذلك لنحسب الزاوية بين الخط OM المرتبط بـالهيكل الاسنـادي S والخط O'N المرتبط بالهيكل الاسنادي S' كما في الرسم 21. فإذا افترضنا أن هذين الخطين هما في السطح xOy يمكن أن نكتب معادلتيهما كما يلي:

$$y_1 = x_1 \,tg\, \alpha_1 \quad (\Delta t = 0) \quad S \quad \text{في} \quad OM \qquad (V\text{-}49)$$

$$y'_2 = x'_2 \,tg\, \alpha'_2 \quad (\Delta t' = 0) \quad S' \quad \text{في} \quad O'N \qquad (V\text{-}50)$$



الشكل 21 ـ التغييرات في الزوايا

واستناداً إلى المعادلة (V-48) يجد المشاهد في الهيكل S' أن انحدار OM هو:

$$(tg\, \alpha'_1)\, \Delta t' = 0 = \frac{(tg\, \alpha_1)\, \Delta t = 0}{\sqrt{1-\beta^2}} \,. \qquad (V\text{-}51)$$

وإذا كان انحدار هـذين الخطين متسـاوياً في هيكليهمـا الاسناديـين الذاتيـين أي $(\alpha'_2)_{\Delta t'=0} = (\alpha_1)_{\Delta t=0}$ نجد:

$$\frac{y'_2}{x'_2} = (tg\, \alpha'_2)\, \Delta t' = 0 = (tg\, x_1)\, \Delta t \qquad (V\text{-}52)$$

$$= 0 < \frac{tg\, x_1\, \Delta t = 0}{\sqrt{1-\beta^2}} = (tg\, \alpha'_1)\, \Delta t = 0 = \frac{y'_1}{x'_1}$$

وبطريقة مشابهة نجد في الهيكل الاسنادي S

$$\frac{y_1}{x_1} = (tg\, \alpha_1)\, 't = 0 = (tg\, \alpha'_2)\, \Delta t' \qquad (V\text{-}53)$$

$$= 0 < \frac{(tg\, x'_2)\, \Delta t' = 0}{\sqrt{1-\beta^2}} = (tg\, \alpha_2)\, \Delta t = 0 = \frac{y_2}{x_2}$$

وذلك يعني أن الخطين OM و O'N اللذين يشكّلان في هيكليهما الاسناديين الذاتيين الزاوية ذاتها α مع المحور Ox ليسا متوازيين في أيّ من الهيكلين S و S'.

وينتج مباشرة مما سبق أن شكل جسم معين يختلف من هيكل إسناد لورنتزي إلى آخر. فإذا كان شكله كرويًّا بشعاع R في S_0 أي:

$$x_0^2 + y_0^2 - z_0^2 = R^2 \qquad \text{(V-54)}$$

يظهر بشكل بيضوي في هيكل إسناد لورنتزي آخر متحرك بسرعة v. إذ نجد استناداً إلى (V-39) المعادلة التالية:

$$\frac{x^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + y^2 + z^2 = R^2 \qquad \text{(V-55)}$$

بشكل عام يكون حجم جسم أكبر ما يكون إذا قيس في هيكله الاسنادي الذاتي.

12 ـ الوقت الذاتي

الوقت الذاتي τ هو الوقت المقيس بساعة ثابتة في الهيكل الاسنادي. فتكون الفترة التفاضلية من الوقت الذاتي للهيكل الإسنادي S مرتبطة بالفترة dt في الهيكل S بالعلاقة

$$\boxed{d\tau = dt\,\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \text{(V-56)}$$

أي $d\tau < dt$. مما يعني أن:

$$d\tau^2 = dt^2 \left\{ 1 - \frac{1}{c^2} \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \right] \right\} \qquad \text{(V-57)}$$

$$= \frac{1}{c^2}\,[c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2] = \frac{1}{c^2}\, ds^2$$

وبما أن الصيغة

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 \qquad \text{(V-58)}$$

لا تتغير في تحويلات لورنتز نستنتج أن الوقت الذاتي $d\tau = \frac{1}{c}\, ds$ لا يتغير أيضاً.

13 ـ التمثيل الهندسي لتحويل لورنتز

يمكن تبيان التشابه بين إحاثيات المكان والزمان في تحويل لورنتز باستعمال التمثيل الهندسي التالي:

نكتفي هنا بتمثيل الاحداثيات x^1 و x'^1 على المحاور المتوازية مع سرعة التحويل. فإذا طبقنا القواعد (V-38) و (V-39) على $x=x^1$ و $ct=x^0$ نجد

$$x'^1 = \frac{x^1 - \beta x^0}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad x^1 = \frac{x'^1 + \beta x'^0}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \text{(V-59)}$$

$$x'^0 = \frac{-\beta x^1 + x^0}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad x^0 = \frac{\beta x'^1 + x'^0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

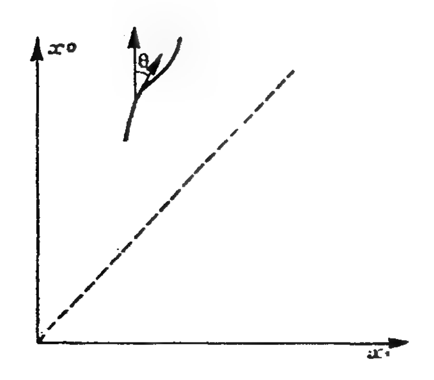
تمثّل حركة جسيم نقطي بخط الكون $x^0 = f(x^1)$ (انظر الرسم 22) ويشكل الخط المستقيم المماس tangent على هذا الخط مع محور الوقت زاوية θ.

$$\text{(V-60)} \qquad tg\,\theta = \frac{d\,x^1}{d\,x^0} = \frac{1}{c}\,\frac{d\,x}{d\,t} = \beta \leqslant 1.$$

مما يعني أن:

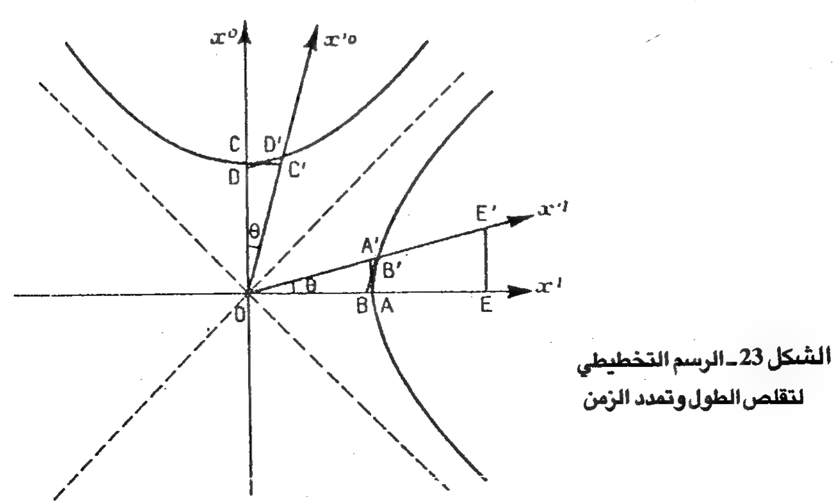
$$\theta \leqslant 45.$$

وفي الحدود نجد خطاً مستقيماً بانحدار 450 أي $\beta = 1$ ويمثل هذا الخط مساراً محتملاً للأشعة الضوئية.



الشكل 22ـ اتجاه مسار جسيم نقطي

وإذا استعملنا القواعد (V-59) يمكن أن نحدِّد وضع المحورين (x'^1, x'^0) للهيكل الاسنادي S' بالنسبة إلى المحورين (x^1 , x^0) للهيكل S. ونشير إلى أن لهذين المحورين أصلاً واحداً، وأن المحور Ox'^0 يحدَّد بالمعادلة $x'^1 = 0$ أيّ $x^1 = \beta x^0$ استناداً إلى التحويل. ويعني هذا أن المحور Ox'^0 يشكل مع Ox^0 زاوية θ تحدَّد قيمتها بالمعادلة $\tan \theta = \beta$ وأن المحور Ox'^1 يشكل الزاوية ذاتها مع المحور Ox^1 (انظر الرسم 23).



الشكل 23ـ الرسم التخطيطي لتقلص الطول وتمدد الزمن

1 ـ نسبية التطابق الزمني

في الهيكل الاسنادي $S(x^0 , x^1)$ جميع الأحداث على المحور Ox متطابقة زمنيًّا ولكنها متتابعة في الهيكل $S'\ (x'^0, x^1)$ لأن إسقاطاتها على المحور Ox'^0 مختلفة.

وعكس ذلك ان الاحداثيات المتطابقة زمنياً في S' أي الموجودة على المحور Ox'^1 ليست كذلك بالنسبة إلى مشاهد في S لأن إسقاطاتها على المحور Ox^0 مختلفة وبشكل خاص أن الحدث E' الذي يقع في الوقت $t' = 0$ (أي $x'^0 = 0$) يقع في النقطة E في S أي في الوقت $t = \dfrac{EE'}{c}$.

2 ـ تقلص الطول

لنرسم القطعين الزائدين المترافقين:

$$(x^1)^2 - (x^0)^2 = 1 \qquad (x^1)^2 - (x^0)^2 = -1. \tag{V-61}$$

الأول يقطع المحور Ox^1 في النقطتين A وA_1 $(x^1 = \pm 1)$ والمحور Ox'^1 في النقطتين B' و B'_1 $(x'^0 = 0; x'^1 = \pm 1)$ لأن إحداثيات هاتين النقطتين $x^1 = \dfrac{\pm 1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ و $x^0 = \dfrac{\pm\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$ تخضع للمعادلة $(x^1)^2 - (x^0)^2 = 1$.

أما الخط الثاني فيقطع المحور Ox^0 في النقطتين C و $C_1(x^0 = \pm 1)$ والمحور Ox'^0 في النقطتين D' و D'_1 $(x'^1 = 0, x'^0 = \pm 1)$ وإحداثيات هاتين النقطتين هي $x^1 = \dfrac{\pm\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$ و $x^0 = \dfrac{\pm 1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ تخضع للمعادلة $(x^1)^2 - (x^0)^2 = -1$.

لنفترض أن مسطرة بوحدة الطول متمثلة بالمقطع $OA = 1$ وثابتة في الهيكل الإسنادي الأول. يسلك الطرف O خط الكون Ox^0 والطرف A خط الكون AA' المتوازي مع Ox^0. ويسجل مشاهد في الهيكل الإسنادي الثاني المواقع للطرفين في الوقت نفسه في هذا الهيكل، فيجد الطول:

$$OA' < OB' = 1$$

ويجد أن معيار الطول المتحرك أقصر من معيار الطول الثابت في هيكله الاسنادي.

وعكس ذلك إذا كان معيار الطول $OB' = 1$ ثابتاً في الهيكل الاسنادي الثاني $S'(x'^0\ x'^1)$ يسلك طرفاه خطي الكون المتوازيين Ox'^0 و $B'B$. فإذا سجل مشاهد في الهيكل S المواقع للطرفين في الوقت ذاته في S أي $x^0 = 0$ يجد الطول:

$$OB < OA = 1$$

أيّ أنه يجد أن طول المعيار المتحرك أقل من طول المعيار الثابت في هيكله الإسنادي.

3 ـ تمدد الفترات الزمنية

تمثل ساعة ثابتة في الموقع $x^1 = 0$ من الهيكل الاسنادي S بنقطة تسلك المحور Ox^0 مع مرور الوقت. فإذا كانت دورة عقرب الساعة تمثل وحدة الوقت تنتقل النقطة التي تمثل الساعة من O إلى C $(OC = 1)$. أما الساعة الثانية في الهيكل الاسنادي S' والتي تلاصق الساعة الأولى في الوقت $x^0 = OC = 1$ فإنها تمثل في الهيكل الاسنادي S' بالنقطة C' من المحور Ox'_0 $(x'^1 = x^1 = 0)$ والتي يحددها الخط CC' المتوازي مع Ox^1 (لأن الخط CC' يمثل الوقت $x^0 = 1$ في S). فيمثل OC' مدة زمنية

$$OC' < OD' = 1$$

مما يعني أن مُشاهد S يستنتج أن ساعة S' الملاصقة لساعته في المكان لم تَدُرْ عقاربها بعد دورة كاملة بينما ساعته دارت دورة كاملة. أي أن ساعة S' تتباطأ.

وعكس ذلك تمثل ساعة ثابتة في الهيكل الاسنادي S' بنقطة تسلك المحور Ox'^0 ويكون عقربها قد دار دورة كاملة (وحدة الوقت) عندما تكون في النقطة D' التي تلاصق النقطة D من الهيكل S $(x^1 = x'^1 = 0)$ بحيث إن DD' متوازية مع Ox'_1 الذي يمثل الزمن $x'^0 = 1$ في S'. ولكن:

$$OD < OC = 1.$$

مما يعني أن عقرب ساعة S عندما تمثل بالنقطة C لم يُكمل بعد دورته. فيستنتج أيضاً المشاهد المرتبط بالهيكل S' أن ساعة S تتباطأ.

بتعبير آخر، إن الساعة المتحركة تبدو أبطأ من الساعة الثابتة مما يعني أن الحركة تُسبب تمدد الفترات الزمنية. وقد أوضح لانجفان P.Langevin توسُّع هذه النتيجة التي بدت متناقضة وقتئذٍ.

في الواقع أن التقلص المتبادل للطول والتمدّد المتبادل للفترات الزمنية يصبحان طبيعيين عند التخلي عن فكرة التطابق الزمني المطلق. أما إذا قبلنا ضمنيًّا بهذه الفكرة فإننا نُقاد إلى تحولات غير متبادلة للمكان والزمان في الهياكل الاسنادية الغاليلية أي إلى رفض مبدأ النسبية.

14 ـ صيغ أخرى لتحويل لورنتز الخاص

1 ـ الإحداثيات الحقيقية:

يمكن أن نكتب التحويل (V-59) بصيغة تظهر التناظر بين الإحداثيات x^1 وx^0. لذلك نحدده كما يلي:

$$\boxed{\beta = \text{th}\,\varphi}$$

أي:

$$\text{ch}\,\varphi = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \quad \text{sh}\,\varphi = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \text{(V-63)}$$

فيكتب التحويل (V-59) بالصيغة التالية:

(V-64)
$$x'^1 = x^1 \operatorname{ch} \varphi - x^0 \operatorname{sh} \varphi \qquad x^1 = x'^1 \operatorname{ch} \varphi + x'^0 \operatorname{sh}$$
$$x'^0 = - x^1 \operatorname{sh} \varphi + x^0 \operatorname{ch} \varphi \qquad x^0 = x'^1 \operatorname{sh} \varphi + x'^0 \operatorname{ch} \varphi$$

2 ـ الاحداثيات التخيلية:

لنحدد الإحداثية الرابعة حسب منكوفسكي Minkowski

(V-65) $x^4 = ict$

والزاوية التخيلية ψ بحيث إن:

$$i\beta = \operatorname{th} \psi$$

أي:

(V-66)
$$\cos \psi = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad , \quad \sin \psi = \frac{i\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

فيكتب التحويل (V-59) بالصيغة التالية:

(V-68)
$$x'^1 = x^1 \cos \psi + x^4 \sin \psi \qquad x^1 = x'^1 \cos \psi - x'^4 \sin \psi$$
$$x'^4 = - x^1 \sin \psi + x^4 \cos \psi \qquad x^4 = x'^1 \sin \psi + x'^4 \cos \psi$$

وتمثل هذه الصيغة دورانا في السطح $(x^1 O x^4)$ للمحاور بزاوية تخيلية ψ. ونشير أنه استناداً إلى المعادلات (V-62) و (V-66).

(V-69) $\psi = i \varphi$

15 ـ تحويل لورنتز العام ـ طريقة مولر C. Moller

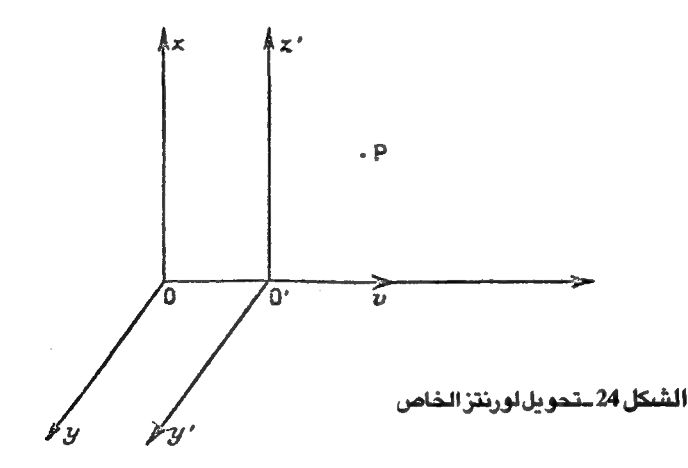
يرمي تحويل لورنتز (أنظر المقطع الثالث) إلى إيجاد العلاقة بين الإحداثيات في الهيكل الإسنادي S والهيكل الإسنادي S′ يتحرك بالنسبة إلى S بسرعة ثابتة (هياكل إسناد غاليلية). وذلك بالأفتراض أن سرعة الضوء في الفراغ متساوية في كل هياكل

الإسناد. وهذا يقود إلى مساواة الكمية ds^2 في كل هياكل الاسناد اللورنتزية.

لقد افترضنا حتى الآن أن السرعة النسبية للهياكل هي باتجاه المحور ox وأن محاور الهياكل متوازية. فيكون التحويل حسب القواعد (V-38) و (V-39) أو (V-64) و(V-68) (تحويل لورنتز الخاص).

1 ـ لنبقَ الآن في الحالة الخاصة لتحويل خاص بسرعة متوازية مع Ox (الرسم 24). من الممكن كتابة العلاقات الأربع (V-38) بعلاقتين اتجاهيتين لذلك نحدد موقع نقطة P في الهيكلين الاسناديين S و S′ بالمتجهين:

$$r = (x, y, z) \quad , \quad r' = (x', y', z') \tag{V-70}$$



الشكل 24 ـ تحويل لورنتز الخاص

ونحدد سرعة S′ بالنسبة إلى S بالمتجه $\nu\,(v_x, O, O)$ فنكتب القواعد (V-38) بالعلاقتين الاتجاهيتين:

$$(V\text{-}71)_1 \qquad r' = r + v\left[\left(\frac{r\ .\ v}{\nu}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right) - \frac{t}{\sqrt{1-\beta^2}}\right]$$

$$(V\text{-}71)_2 \qquad t' = \frac{t - \left(\frac{r\ .\ v}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

إذ إننا نحصل فعلاً على (V-38) بكتابة مركّبات $(V\text{-}71)_1$ على المحاور Ox و Oy و Oz أيّ باستبدال r بالمركبات (x, y, z) و ν بالمركّبات (ν_x, o, o).

وكذلك يمكن كتابة القواعد العكسية (V-39) بالعلاقتين الإتجاهيتين

$$\text{(V-72)}_1 \qquad r = r' + v'\left[\left(\frac{r' \cdot v'}{v^2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right) - \frac{t'}{\sqrt{1-\beta^2}}\right]$$

$$\text{(V-72)}_2 \qquad t = \frac{t' - \left(\frac{r' \cdot v'}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

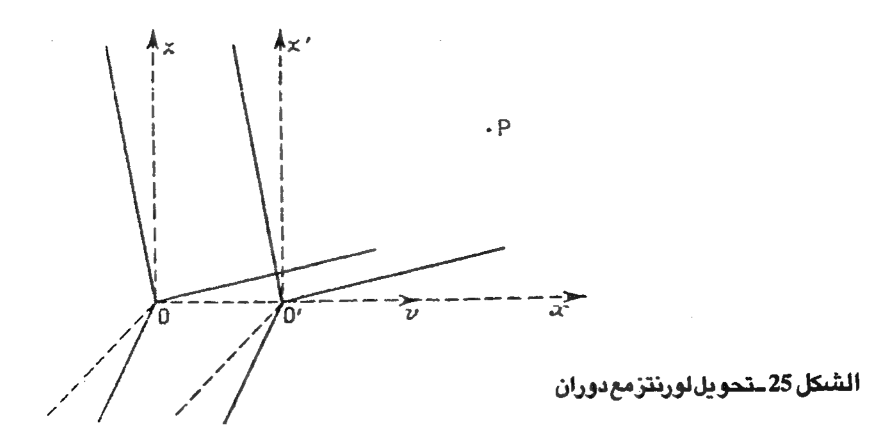
حيث $V' = -V$ تمثل سرعة S بالنسبة إلى S'. فإذا اعطينا r' المركبات x', y', z' و v' المركبات $-v_x, o, o$ نحصل على القواعد (V-39) للتحويل الخاص.

2 ـ لنحول الآن الهيكلين الاسناديين S وS' بدوران فضائي واحد (الرسم 25) في هذه الحالة تتحول المتجهات r و r' و v و v' بالطريقة ذاتها وتبقى العلاقات (V-71) و (V-72) صحيحة ولكن سرعة التحويل من S إلى S' هي الآن:

$$\text{(V-73)} \qquad V = (v_x, v_y, v_z)$$

ومن S' إلى S هي:

$$v' = (-v_x, -v_y, -v_z)$$



الشكل 25 ـ تحويل لورنتز مع دوران

نستخلص إذاً من العلاقات الإتجاهية (V-71) قواعد التحويل الأربع التالية الصالحة في الحالة العامة لسرعة تحويل v بأيّ اتجاه بالنسبة إلى المحاور:

$$(V\text{-}74)_1 \qquad x' = x + \frac{\alpha \nu_x}{\nu^2}\left[\nu_x x + \nu_y y + \nu_z z - c^2 t\,(1 + \sqrt{1-\beta^2}\,)\right]$$

$$(V\text{-}74)_2 \qquad y' = y + \frac{\alpha \nu_y}{\nu^2}\left[\nu_x x + \nu_y y + \nu_z z - c^2 t\,(1 + \sqrt{1-\beta^2}\,)\right]$$

$$(V\text{-}74)^3 \qquad z' = z + \frac{\alpha \nu_z}{\nu^2}\left[\nu_x x + \nu_y y + \nu_z z - c^2 t\,(1 + \sqrt{1-\beta^2}\,)\right]$$

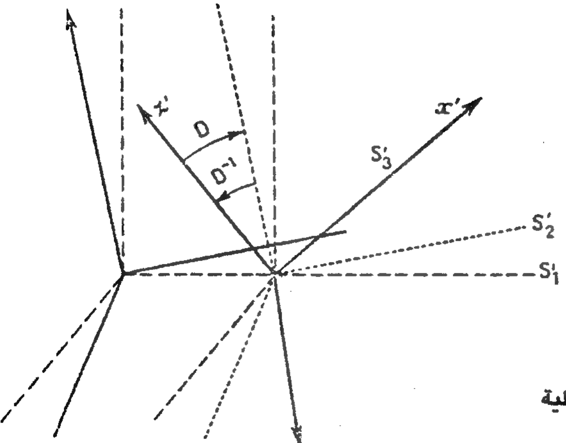
$$(V\text{-}74)_4 \qquad t' = t - \frac{1}{c^2\sqrt{1-\beta^2}}\left[\nu_x x + \nu_y y + \nu_z z - c^2 t\;(1 - \sqrt{1-\beta^2}\,)\right]$$

حيث وضعنا:

$$(V\text{-}75) \qquad \boxed{\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1.}$$

أما التحويل المعاكس فنحصل عليه من المعادلات (V-74) بتبادل x, y, z و x', y', z' والسرعة ν_x, ν_y, ν_z والسرعة $-\nu_x, -\nu_y, -\nu_z$.

3 ـ لنحول الآن الهيكلين الاسناديين S و S′ انطلاقاً من الوضع الأصلي (الرسم 24) بدوران فضائي مختلف لكل منهما. ويعادل هذا تحويل الهيكل S′ بمفرده بدوران فضائي D^{-1} انطلاقاً من وضع الرسم 25. فيصبح اتجاه المحاور كما في الرسم 26 (الخطوط المتواصلة).



الشكل 26ـ تبديل المراجع الغاليلية
التحويل العام

إن قـاعـدة التحـويـل الأخـيرة $(V\text{-}71)_2$ لا تتبـدل ولكن الصيغـة $(V\text{-}71)_1$ تبقى صحيحة شرط تحويـل المتجه الجـديد r' في S'_3 بـالدوران المعـاكس D (الذي يعيـد الهيكل الاسنادي S'_3 إلى وضعه الأصلي S'_2 في الرسم 25) فنجد:

$$Dr' = r + V\left[\frac{\alpha}{v^2} \quad (r.V) - \frac{t}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) \qquad (V\text{-}76)$$

ومن جهة أخرى السرعـة v' للهيكل S بـالنسبة إلى S' تصبـح Dv' في هذا الـدوران المعاكس. ولكنها (كما في الرسم 24) تساوي عندئذ $-v$ أي:

$$Dv' = -v \qquad (V\text{-}77)$$

فإذا حولنا جانبي المعادلة (V-76) بالدوران D^{-1} نجد قانون التحويل:

$$r' = D^{-1}\, r - v' \left[\frac{\alpha}{v^2} \;\; (r \cdot v) - \frac{t}{\sqrt{1-\beta^2}}\right] \qquad (V\text{-}78)_1$$

$$t' = \frac{t - \left(\frac{r\,.\,v}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (V\text{-}78)_2$$

حيث:

$$x = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad - 1 \qquad (V\text{-}75)$$

وبطريقة مشابهة نحصل على قواعد التحويل المعاكس انطلاقا من الرسم 25 بدوران D^{-1} يخضع له الهيكل الاسنادي S وليس الهيكل S'. فنجد:

$$r = D^{-1}\, r' - v \left[\frac{\alpha}{v^2} \;\; (r' \cdot v') - \frac{t'}{\sqrt{1-\beta^2}}\right] \qquad (V\text{-}79)_1$$

$$t = \frac{t' - \left(\frac{r'\,.\,v'}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (V\text{-}79)_2$$

4 ـ أخيراً إذا افترضنا أن أصول الهياكل الإسنادية S و S' لا تتطابق في الوقت $t = t' = 0$ يجب أن نستبدل r' و t' بالكميات:

$$r'_1 = r' + a' \quad , \quad t'_1 = t' + \theta' \qquad \text{(V-80)}$$

حيث a' و θ' ثوابت. ولكن:

$$\Delta r'_1 = \Delta r' \quad , \quad \Delta t'_1 = \Delta t' \qquad \text{(V-81)}$$

بحيث تكون جميع قواعد التحويل السابقة صالحة للفرق بين إحداثيات حدثين المحدد بالكميات Δr وΔt في S و $\Delta r'_1$ و $\Delta t'_1$ في S'.

هكذا يكون التحويل العام بين هياكل الاسناد حصيلة:

ـــ تحويل خاص للورنتز.
ـــ دوران فضائي.
ـــ انسحاب فضائي translation وتغيير في أصل الوقت.

ويُكتب هذا التحويل بالصيغة (V-79) و (V-80). ويمكن التأكد بأن هذا التحويل يحافظ على الكمية ds^2 أي:

$$ds^2 = c^2\, dt^2 - dr^2 = c^2\, dt'^2 - dr'^2 = ds'^2 \qquad \text{(V-82)}$$

تحدد الصيغ (V-78) و (V-79) تحويل لورنتز العام الذي يربط بين الهياكل الاسنادية اللورنتزية بشكل عام لأية سرعة مع أي دوران للمحاور.

سنعود لاحقاً (في الفصل VI المقطع 7) إلى صيغة الموتر لتحويل لورنتز العام.

16 ـ تغير الهيكل الإسنادي الذاتي لجسم متحرك محيرة الساعات أو المحيرة الميقاتية Clock paradox [56]

تتيح مبادىء النسبية الخاصة المعبر عنها بتحويل لورنتز مقارنة الظواهر الفيزيائية في هيكلين اسناديين غاليليين. ومن هذه الهياكل الهيكل الإسنادي الذاتي للجسم وهو الهيكل الذي يرتبط بالجسم ويتحرك معه باستمرار. ويتيح تحويل

(56) يمكن الرجوع إلى الصفحة 258 من [16] C. Moller.
Cf. P. Langevin. L'évolution de l'espace et du temps (Scientia. X. 1911. P. 31).

لورنتز مقارنة الظواهر في الهيكل الاسنادي الذاتي وأيّ هيكل آخر. كما يثبت هذا التحويل أن هناك عكوسية كاملة في وصف الظواهر. وتقود هذه العكوسية بالضبط إلى نسبية الحركة.

ولن يكون الحال كذلك إذا أردنا مقارنة الأطوال والفترات الزمنية بواسطة مساطر أو ساعات انتقلت واحدة منها على الأقل من هيكل إسنادي ذاتي غاليلي إلى آخر.

لنفترض مثلاً أن مسطرة طولها ℓ_0 في هيكلها الاسنادي الذاتي الغاليلي S تسرَّع لفترة قصيرة كي تنطلق بعد ذلك بسرعة v بالنسبة إلى S. فإذا كانت v ثابتة يكون الهيكل الذاتي الجديد S′ متحركاً بسرعة v بالنسبة إلى S ويكون طول المسطرة ℓ'_0 في S′ وطولها في S حسب قاعدة تقلص الطول $\ell = \ell'_0 \sqrt{1 - \beta^2}$. من الواضح أن ℓ (أو ℓ'_0) لا يمكن مقارنتها ب ℓ_0. وإذا أعيدت المسطرة للسكون في S (بإخضاعها لتسريع فجائي جديد مثلاً) يصبح طولها ℓ_{00} في S. وقد يكون الطول ℓ_{00} مختلفاً عن ℓ_0 لأن ℓ_{00} تنتج عن إخضاع المسطرة مرتين للتسريع مما يعني تغييراً لهيكلها الذاتي يمنع العكوسية بين الهياكل الاسنادية وبالتالي بين الكميات الفيزيائية المقيسة فيها[57].

وتقود مقارنة ساعات بدّلت واحدة منها على الأقل هيكلها الاسنادي الذاتي بواسطة تسريع معين إلى نتائج مشابهة.

لنفترض أن ساعة A مرتبطة بالهيكل S وأخرى A′ مرتبطة بالهيكل S′ تتباطأ الساعة A′ عن الساعة A إذا قرأت في الهيكل S حسب القاعدة:

$$(\text{V - 83}) \quad (\Delta t)_S - (\Delta t')_{S(\Delta x' = 0)} = (\Delta t)_s - (\Delta t)_S \sqrt{1 - \beta^2}$$

$$= (\Delta t)_S \left(1 - \sqrt{1 - \beta^2}\right)$$

وهذه الظاهرة قابلة للانعكاس بمعنى أن الساعة A تتباطأ أيضاً عن الساعة A′ إذا قرأت في الهيكل S′.

---

(57) يمكن أن نبحث في هذا المجال مسائل التوقف والانطلاق المفاجيء في الحركة. وتوجد بعض الأمثلة في:
The Fitzgerald - Lorentz contraction: some paradoxes and their resolution (W. H. Mac GREA, Proc. Roy Dublin Soc., 26, 1952, 27).

$$(V - 84) \quad (\Delta t')_S - (\Delta t)_{S'(\Delta x = 0)} = (\Delta t')_{S'} - (\Delta t')_{S'} \sqrt{1 - \beta^2}$$

$$= (\Delta t')_{S'} (1 - \sqrt{1 - \beta^2})$$

لنفترض الآن أن الساعتين A و 'A كانتا في الهيكل الاسنادي ذاته S. تسرَّع فجأة الساعة 'A لتنطلق بسرعة v. فتصبح 'A مرتبطة خلال وقت 'Δt إلى الهيكل الاسنادي 'S. ثم تخضع 'A لتبطيء مفاجيء لتعود إلى الهيكل الأصلي S. فإذا كانت مدة التسريع والتبطيء قصيرة جداً نستخلص لدى مقارنة 'A و A أن 'A متأخرة عن A كما نقرأ في المعادلة (83 - V) وليس العكس.

ولكن المقارنة بين A و 'A تتم بالنهاية في الهيكل الاسنادي الذاتي S ذاته. وثبت أن نتيجة التجربة لا يمكن انعكاسها، ففي الهيكل المرتبط باستمرار إلى الساعة 'A (المميز بالتالي 'S في بدء ونهاية التجربة) تكون النتيجة النهائية (83 - V) هي الصحيحة طبعاً (إذ إن 'S يطابق عندئذ S) وليست النتيجة (84 - V).

ولقد أشار أينشتاين نفسه إلى هذه «المحيِّرة» التي تبدو كأنها تتيح معرفة أي من الساعتين قد تحركت خلافاً لمبادىء النسبية. في الواقع أن هذه المحيِّرة تخرج من نطاق النسبية الخاصة إذ تُدخل تسريعاً يتيح معرفة أي من الساعتين أخضعت له فتغيِّر هيكلها الاسنادي الذاتي خلال التجربة.

وينطبق هذا التناقض أيضاً على التجربة المسماة «مسافر لانجفان»، إذ إن تباطؤ الساعة 'A يظهر بتقدم أقل في سن المسافر. فالتسريع والتبطيء اللذان يغيِّران الهيكل الاسنادي الذاتي في بدء ونهاية الرحلة هما اللذان يجعلان هذه الظاهرة غير قابلة للإنعكاس.

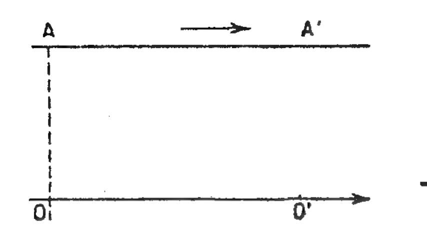
ويمكن توضيح هذه النتائج باستعمال ظاهرة دوبلر Döppler الطولية[58]. لنفترض أن A يرسل إشارات بتردد v_0 في هيكله الاسنادي الذاتي S وذلك في اتجاه Ox. تبدو هذه الإشارات لمسافر 'A متوجه بسرعة v من O إلى 'O كأنها بتردد[59].

---

(58) ترجع ظاهرة دوبلر الطولية إلى حصيلة ظاهرة دوبلر غير النسبية $v = v_0 (1 \pm \beta \cos \theta)$ التي تبلغ مداها الأعلى في الحالة الطولية $(\cos \theta = 1)$ فتكون $v = v_0 (1 \pm \beta)$ والتصحيحات النسبية. أما ظاهرة دوبلر المستعرضة فهي نسبية بحتة إذ إن الظاهرة غير النسبية تختفي تماماً عندئذ $(\cos \theta = 0)$. فهي إذاً نتيجة مباشرة لتأخر الساعات المتحركة (أنظر الفصل العاشر) وأيضاً المرجع [8] الصفحة 146.

(59) أنظر الفصل العاشر المقطع الأول وخصوصاً المعادلة (15 - X).

$$\nu_a = \nu_0 \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} > \nu_0 \qquad \text{(V - 85)}$$



الشكل 27-

في الهيكل الاسنادي الذاتي S'_a للمسافر A'. وفي العودة تصبح السرعة $-\nu$ فيصبح تردد الإشارات التي يلتقطها:

$$\nu_r = \nu_0 \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} > \nu_0 \qquad \text{(V - 86)}$$

إذ إن هيكل A' الذاتي S'_r هو هيكل إسناد غاليلي جديد.

فإذا كان N عدد الإشارات المرسلة و N_a و N_r عدد الإشارات الملتقطة نجد العلاقات:

$$N = N_a + N_r \quad , \quad \frac{N_a}{\nu_a} = \frac{N_r}{\nu_r} \qquad \text{(V - 87)}$$

مما يعطي إذاً:

$$N_a = \frac{N}{1 + \frac{\nu_r}{\nu_a}} \qquad N_r = \frac{N}{1 + \frac{\nu_a}{\nu_r}} \qquad \text{(V - 88)}$$

بمقارنة الوقت اللازم للمسافر A' كي يذهب من O إلى O' ثم للعودة إلى O (بعد تسريعين وتبطيئين) نجد في الهيكل الاسنادي S.

$$\Delta t = \frac{N}{\nu_0}$$

وفي الهيكل S'_a ثم الهيكل S'_r:

$$\Delta t' = \frac{N_a}{\nu_a} + \frac{N_r}{\nu_r} = \frac{2N}{\nu_a + \nu_r} \qquad \text{(V - 89)}$$

$$= \frac{N}{\nu_0} \sqrt{1-\beta^2} = \Delta t \sqrt{1-\beta^2}$$

وتتم المقارنة أخيراً في الهيكل الاسنـادي S المطابق للهيكـل S'_r بعد تـوقفه. فليس هناك إذاً عكوسية بل هناك نقص أكيد في مدة رحلة A' يساوي:

$$\Delta t - \Delta t' \left(1 - \sqrt{1 - \beta^2}\right) \quad \text{(V - 90)}$$ [60].

تدخل في هذه المسألة تسريعات تجعلها إذاً في نطاق النسبية العامـة. إن النسبية العـامة ليست فقط تعميمـاً رياضيـاً يجلب معه تكملـة اختياريـة نوعـاً ما لمبـادىء النسبيـة الخاصـة، بل امتـداداً لا غنى عنه لإيجـاد صياغـة لبعض المسائـل التي تطرحها الحركيات وعلم التحريك في النسبيـة الخاصـة دون إيجاد الحلـول الدقيقـة لها.

---

(60) نشـير إلى أننا نصـل إلى النتيجة ذاتهـا إذا افترضنـا أن مصدر الضـوء يرافق المسـافـر A. انظر في الصفحة 135 من المرجع [8] H. ARZELIES.

الصياغة الرباعية للنسبية الخاصة

1 ـ الفضاء الإقليدي غير الأصيل Improper في النسبية الخاصة

نعبّر عن القانون الأساسي للنسبية الخاصة (أي تساوي سرعة الضوء في جميع هياكل الإسناد الغاليلية) بثبات (لا تغيّر)[1] Invariance الصيغة التربيعية Quadratic الأساسية:

$$ds^2 = c^2\, dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \qquad \text{(VI-1)}$$

فتكون هذه الصيغة ثابتة في تحويلات لورنتز العامة.

وتميّز الصيغة (VI-1) الفاصل Interval التفاضلي لفضاء إقليدي ذي أربعة أبعاد مسنود إلى نظام محاور مستقيمة متعامدة ومنظّمة Orthonormalized. والحالة الخاصة $ds^2 = 0$ تميّز انتشار الموجة الضوئية المنطلقة من أصل المحاور في الزمن الابتدائي. غير أن الفضاء ذا الصيغة الأساسية (VI-1) هو فضاء إقليدي غير أصيل، بمعنى أن أيّ متّجه حقيقي غير صفري Non zero في هذا الفضاء ليس حتماً ذا نظيم إيجابي Positive norm (أيّ طول إيجابي).

إن جميع تحويلات الإحداثيات التي تسمح بتطبيق مبادىء النسبية الخاصة تتعلق بمحاور إحداثيات متعامدة ومنظّمة. وإذا استعملنا إحداثيات حقيقية في فضاء إقليدي غير أصيل فإن شروط التناظم normalization تختلف بالطبع عما هي عليه في فضاء إقليدي أصيل proper. ومن الممكن أن نستعمل شكليًا صياغة

(1) نطلق صفة الثبات (اللاتغيُّر) على الكميات التي لا تتغير في تحويلات المراجع.

إقليدية أصيلة باللجوء إلى الإحداثيات التخيُّلية (انظر الفصل الخامس المقطع السابع). والفائدة من هذه الوسيلة هي إعادة الصيغة الأساسية (VI-I) إلى صيغة إهليلجية Elliptic أي مجموع أربع أرقام مربعة وبذلك نتحاشى التمييز بين التغاير (التغيُّر الموافق) Covariance والتغاير المخالف Contravariance (انظر الفصل الرابع عشر). ولكن سيئة هذه الطريقة تنتج من إدخال إحداثيات تخيلية تبدو وكأنها بعيدة نوعاً ما عن الوسيلة الطبيعية لصياغة القوانين النسبية.

أما إذا أبقينا على الإحداثيات الحقيقية فتبقى الصيغة الأساسية (VI-1) زائدية القطع hyperbolic (+ − − −) مما يفرض شرط تناظم بالصيغة (VI-28) والتمييز بين التغاير والتغاير المخالف. وفي هذه الحالة يظهر أننا لا نربح كثيراً بالاستعمال الحصري للمحاور المتعامدة التي تخضع لشرط التناظم (VI-28)، إذ إن الشرط لا يبسِّط الصياغة كثيراً بل قد يبدو من المفيد أحياناً أن نستعمل محاور منحنية بشكل عام دون التمييز بين الصيغة الأساسية الإهليلجية أو الزائدية القطع لأن ذلك يرتبط بنظام الإحداثيات المعتمد. سوف نتوسع بدراسة هذه الطريقة في الفصل الرابع عشر الجزء A (ملحق في الرياضيات).

إن استعمال المحاور المنحنية واسع أكثر مما يجب كي ندرس تحويلات لورنتز (التي تنحصر فقط في المحاور المتعامدة والمنظَّمة) ولكنه يشملها كحالة خاصة. نحصل إذاً على تحويلات لورنتز باختبار مناسب لشروط التناظم حسب نوع الإحداثيات المستعملة. وهذه الشروط تحصر تحويلات المحاور المنحنية بالتحويلات بين هياكل الاسناد ذات المحاور المتعامدة والمنظَّمة وتقود إلى الصياغة الرباعية المناسبة لتحويل لورنتز.

أما حسنة استعمال المحاور المنحنية فإنها تتيح إدخال مختلف الحالات الخاصة المتعلقة بالإختيارات الممكنة للإحداثيات أي مختلف شروط التناظم. وتكون التقيدات المستخلصة منها واضحة في كل حالة.

ومن جهة أخرى من السهل تعميم استعمال المحاور المنحنية (الفصل الرابع عشر الجزء A) إلى نظام الاحداثيات المنحنية Curved (الفصل الرابع عشر الجزء B). وهذا يقودنا دون صعوبة إلى الفضاء غير الإقليدي بإحداثيات منحنية التي يصبح محتماً علينا استعمالها[2]. بذلك يمكن أن نكتب قوانين موافقة للتغيُّر Covariant في

(2) في الفضاء غير الإقليدي لا يمكن إلّا استعمال الإحداثيات المقوَّسة إذا كانت المنطقة واسعة (الفصل الخامس عشر) ولا يمكن استعمال المحاور المستقيمة إلا محلياً فقط.

أيّة تحويلات للإحداثيات وفق مبادىء النسبية المعممة.

ملاحظة: ليس هناك ما يفرض استعمال أنظمة المحاور المتعامدة والمنظّمة لدراسة الظواهر في فضاء إقليدي رُباعي، فمن الممكن استعمال المحاور المنحنية (الفصل الرابع عشر الجزء A) أو المقوسة (الفصل الرابع عشر الجزء B). وفي هذه الحالة يجب التمييز طبعاً بين التغاير والتغاير المخالف. وفي حالة استعمال الاحداثيات المنحنية يجب إدخال مفهوم الاشتقاق موافق التغيُّر Covariant derivative، بيد أن استعمال أنظمة الإحداثيات هذه (التي يمكن أن تكون مريحة أو حتى لا يمكن الاستغناء عنها لحل بعض المسائل) يبقى اختياريا في حالة الفضاء الإقليدي. بتعبير آخر ليس من مانع أبداً من استعمال نظام محاور متعامدة ومنظّمة في منطقة واسعة من هذا الفضاء الإقليدي.

2 ـ الاصطلاحات المستعملة

1 ـ المؤشرات

المؤشرات اليونانية (μ, ν, ρ, σ) تأخذ القيم $(1, 2, 3, 4)$ إذا كنا نستعمل الإحداثيات $x^1 = x$ و $x^2 = y$ و $x^3 = z$ و $x^4 = ict$ أو القيم $(1, 2, 3, 0)$ إذا كنا نستعمل الإحداثيات الحقيقية $x^1 = x$ و $x^2 = y$ و $x^3 = z$ و $x^0 = ct$، بينما المؤشرات اللاتينية p, q, r, s تأخذ فقط القيم $(1, 2, 3)$.

2 ـ اصطلاح الجمع

نعتمد الإصطلاح التالي للجمع: إذا تكرر مؤشّر معين مرتين في حاصل ضرب كميات فيزيائية، مرة مكتوب في الأعلى ومرة مكتوب في الأسفل يعني ذلك جمع حاصل الضرب هذا لجميع قيم المؤشر المذكور. فهذا المؤشر ليس له قيمة معينة بل يرمز إلى الجمع فقط ونسميه «مؤشراً صامتاً». لتخفيف كتابة الصيغ الرياضية نستغني تماماً عن العلامة العادية للجمع Σ. وكمثل عن ذلك نكتب في نظام الإحداثيات $x^\mu\ (x^1, x^2, x^3 x^0)$.

$$A_\mu B^\mu = A_1 B^1 + A_2 B^2 + A_3 B^3 + A_0 B^0$$

$$A_\rho B^\rho = A_1 B^1 + A_2 B^2 + A_3 B^3$$

3 ـ تمثيل المتَّجهات والموتِّرات

نستعمل الرمز A لتمثيل متجِه في الفضاء الثلاثي الأقليدي ومركِّبات هـذا المتَّجِه هي:

$$A_x = A_1 \quad , \quad A_y = A_2 \quad , \quad A_z = A_3$$

أي باختصار A_ρ مع $\rho = 1, 2, 3$.

أما في الفضاء الرباعي فنستعمل أيضاً الرمز A للمتجِه. ومركِّباته هي:

$$A_x = A_1 \ , \ A_y = A_2 \ , \ A_x = A_3 \ , \ A_{ct} = A_0 \ (\text{أو } A_{ict} = A_4)$$

أي باختصار A_μ مع $\mu = 1, 2, 3, 0$ (أو $\mu = 1, 2, 3, 4$)

نشير هنا إلى أن المركِّبات الثلاث لمتَّجِه في الفضاء الثلاثي ليست حتمـاً المركِّبـات الثلاث الأولى لمتَّجه في الفضاء الرباعي (أي مركِّبات الفضاء لهذا المتَّجِه الـرباعي). فهذا صحيح مثلاً في حالة الإحداثيات المتمثلة بالمتَّجِه الـرباعي $x^\mu = (x, x^0)$ ولكنـه ليس صحيحاً في حالة السرعة v.

3 ـ الصيغ المختصرة للفاصل التفاضلي ds^2 في النسبية الخاصة

1 ـ استعمال الإحداثيات التخيّلية

إذا حدَّدنا الإحداثيات الرباعية

$$x^1 = ix \quad x^2 = iy \quad x^3 = iz \quad x^4 = ct \tag{VI-2}$$

نكتب الصيغة الأساسية (VI-1) كما يلي:

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 + (dx^4)^2 = \sum_\mu (dx^\mu)^2 \tag{V - 3}$$

$$\mu = 1, 2, 3, 4$$

وهي الفـاصل التفـاضلي في الفضـاء الإقليدي الـرباعي ذو الإحـداثيات المتعـامدة والمنظَّمة.

فإذا حددّنا المحاور المستقيمة بواسطة أربعة متّجِهات رباعية أُحادية (e_1, e_2, e_3, e_4) e_μ يمكن أن نحدد المتّجه ds بأنه:

$$ds = e_1\, dx^1 + e_2\, dx^2 + e_3\, dx^3 + e_4\, dx^4 \qquad \text{(VI-4)}$$

فيكون الجداء العددي $ds.ds = ds^2$ متطابقا مع الصيغة (VI-3) شرط أن تكون للمتّجِهات e_μ الخاصّتان التاليتان:

ـــ التعامد:

$$e_\mu \cdot e_\nu = 0 \qquad \mu \neq \nu \quad \text{إذا} \qquad \text{(VI-5)}$$

ـــ التناظم:

$$e_\mu^2 = 1 \qquad \text{(VI-6)}$$

ويمكن أن نكتب الشرطين (VI-5) و (VI-6) بصيغة واحدة:

$$(e_\mu \cdot e_\nu) = \delta_{\mu\nu} \qquad \text{(VI-7)}$$

حيث تحدَّد رموز كرونكر Kronecker كما يلي:

$$\delta_{\mu\nu} = \begin{cases} 1 & \mu = \nu \quad \text{إذا} \\ 0 & \mu \neq \nu \quad \text{إذا} \end{cases} \qquad \text{(VI-8)}$$

باختيار الإحداثيات (VI-2) واستعمال المحاور المتعامدة والمنظَّمة حسب العلاقة (VI-7) يمكن استخلاص الصيغة الأساسية ds^2 من الصيغة العامة المماثلة لمحاور منحنية (انظر الفصل الرابع عشر المقطع A).

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu, \qquad \text{(VI-9)}$$

بوضع:

$$\boxed{g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}} \qquad \text{(VI-10)}$$

في هذه الحالة تكون المركّبات الموافقة للتغيُّر مساوية للمركّبات المخالفة للتغير لأي متجه رباعي.

(VI-11) $$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu = \delta_{\mu\nu} A^\nu = A^\mu$$

أخيراً تصبح الصيغ (XIV - 16) للجداء العددي للمتجهين A و B ولنظيم المتجه A (XIV - 18) كما يلي:

(VI-12) $$A \cdot B = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = \sum_\mu A^\mu B^\mu$$

(VI-13) $$|A|^2 = g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu = \sum_\mu (A^\mu)^2$$ (3)

تحدَّد أحياناً الاحداثيات الرباعية كما يلي:

(VI-14) $$\boxed{x^1 = x \quad x^2 = y \quad x^3 = z \quad x^4 = ict}$$

فتصبح الصيغة الأساسية:

(VI-15) $$ds^2 = -\sum_\mu (dx^\mu)^2 \quad , \quad \mu = 1, 2, 3, 4$$

ونحصل على هذه الصيغة إذا استعملنا محاور مستقيمة محددة بالمتَّجِهات الأُحادية e_μ المنظَّمة حسب القاعدة:

(VI-16) $$(e_\mu \cdot e_\nu) = -\delta_{\mu\nu}$$

بدلاً من (VI-7). والصيغة المختصرة للصيغة الأساسيـة ds^2 تستخلص من الصيغة العامة (VI-9) إذا أخذنا:

(VI-17) $$\boxed{g_{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu}}$$

عنـد استعمال نظـام المحاور هـذا، يجب التمييز بـين المركبـات الموافقـة للتغـير والمركبات المخالفة للتغير التي ترتبط بالعلاقة

$$A\mu = g_{\mu\nu} A^\mu = -\delta_{\mu\nu} = -A^\mu$$

وتكتب صيغ الجداء العددي للمتجِهين A و B ونظيم المتَّجه A بالصيغ:

(3) رغم المظهر لا تعني هذه الصيغة أن نظيم متَّجه غير صفري هو دائما إيجـابي كما هـو الحال في حـالة الفضاء الإقليدي الأصيل لأن المركبات ليست كلها حقيقية.

$$|A|^2 = \Sigma_p (A^p)^2 + (A^4)^2 = (A^4)^2 - (A_x)^2 - (A_y)^2 \gtreqless 0.$$

(VI-19) $$(A \cdot B) = g_{\mu\nu} A^{\mu} B^{\nu} = -\sum_{\mu} A^{\mu} B^{\mu}$$

(VI-20) $$|A|^2 = g_{\mu\nu} A^{\mu} A^{\nu} = -\sum_{\mu} (A^{\mu})^2$$

2 ـ استعمال الإحداثيات الحقيقية

لنحدّد الإحداثيات الرباعية كما يلي:

(VI-21) $$\boxed{x^1 = x \quad x^2 = y \quad x^3 = z \quad x^0 = ct}$$

فتكتب الصيغة الأساسية (VI-1):

(VI-22) $$ds^2 = (dx^0)^2 - \sum_{\rho} (dx^{\rho})^2 \qquad \rho = 1, 2, 3$$

أي أن الصيغة الأساسية زائدية القطع، ونحصل عليها باختيار نظام محاور مستقيمة ومحدّدة بالمتّجهات الأحادية (e_1, e_2, e_3, e_0) e_μ بحيث إن:

(VI-23) $$ds = e_1 dx^1 + e_2 dx^2 + e_3 dx^3 + e_0 dx^0$$

ويكون الجداء العددي $ds \cdot ds = ds^2$ مطابقاً للصيغة (VI-22) إذا كانت للمتّجهات e_μ الخاصتان التاليتان:

ـــ التعامد:

(VI-24) $$(e_\mu \cdot e_\nu) = 0 \qquad \mu \neq \nu$$ إذا

ـــ التناظم:

(VI-25) $$e_0^2 = 1 \quad , \quad e_\rho^2 = -1 \quad , \quad \rho = 1, 2, 3$$

ويمكن كتابة هذين الشرطين بالشكل التالي:

(VI-26) $$(e_\mu \cdot e_\nu) = \eta_{\mu\nu}$$ حيث

(VI-27) $$\eta_{\mu\nu} = \begin{vmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & +1 \end{vmatrix}$$

وتتيح الشروط (VI-26) أن نكتب الصيغة الأساسية ds^2 بالشكل المختصر (VI-22) أي بنظام إحداثيات حقيقية. وتستنتج الصيغة (VI-22) من الشكل العام (VI-9) إذا وضعنا:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \tag{VI-28}$$

مما يجعل المركّبات الموافقة للتغيُّر والمخالفة للتغيُّر مختلفة ومرتبطة بالعلاقة:

$$A_\mu = g_{\mu\nu}A^\nu = \eta_{\mu\nu}A^\nu \tag{VI-29}$$

أي:

$$A_\rho = \eta_{\rho\nu}A^\nu = -\delta_{\rho\nu}A^\nu = -A^\rho \tag{VI-30}$$

$$A_0 = \eta_{0\nu}A\nu = \delta_{0\nu}A^\nu = A^0 \tag{VI-31}$$

ويكتب الجداء السُّلَّمي لمتجِهين رباعيين A و B ونظيم المتَّجه A بالصيغ التالية:

$$A \cdot B = g_{\mu\nu}\, A^\mu\, B^\nu = A^0\, B^0 - \sum_\rho A^\rho B^\rho \qquad \rho = 1, 2, 3. \tag{VI-32}$$

$$|A|^2 = g_{\mu\nu}A^\mu A^\nu = (A^0)^2 - \sum_\rho (A^\rho)^2. \tag{VI-33}$$

ويمكن التأكد استناداً إلى الصيغ (VI-13) و (VI-20) و (VI-33) أن نظيم متجِه حقيقي غير صفري ليس حتماً إيجابياً فالفضاء الرباعي للنسبية الخاصة هو إقليدي غير أصيل.

4 ـ المتَّجِهات الرباعية المكانية أو الزمانية أو المنعدمة:

يكون المتَّجِه الرباعي A مكانياً أو زمانياً أو منعدماً إذا كان نظيمه إيجابياً أو سلبياً أو صفرياً على التوالي. لنختر نظام إحداثيات حقيقية مع نظيم وَفْق المعادلة (VI-28) فنجد النظيم التالي للمتَّجِه A استناداً إلى (VI-33):

$$|A|^2 = g_{\mu\nu}A^\mu A^\nu = (A^0)^2 - \sum_\rho (A^\rho)^2 \gtrless 0 \tag{VI-34}$$

فيكون المتجِه A:

زمانيًّا إذا: $|A|^2 > 0$ $\qquad (A^0)^2 > \sum_\rho (A^\rho)^2.$

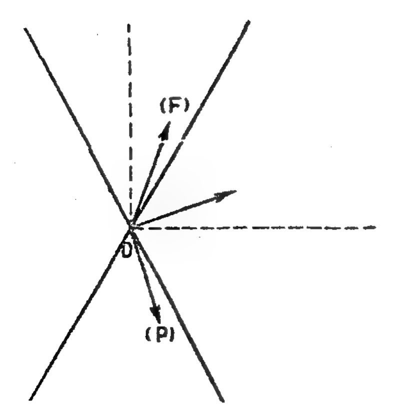
ومكانيًا إذا: $|A|^2 < 0$ $(A^0)^2 < \sum_\rho (A^\rho)^2.$

ومنعدماً إذا $|A|^2 = 0$ $\sum_\rho (A^\rho)^2 = (A^0)^2.$

وبشكل خاص نجد أن الفاصل ds^2 إيجابي في حالة جُسيم يتحرك بسرعة أقل من سرعة الضوء. مما يعني أن الخط المماس على مسار الجسيم يخضع للعلاقة $(dx^0)^2 - \sum_\rho (dx^\rho) > 0$ أي أن المتَّجه ds هو زماني. فهو إذاً داخل المخروط المحدَّد بالمعادلة $ds^2 = 0$ والمسمى مخروط الضوء. وترجع هذه التسمية إلى أن مسارات الإشارات الضوئية المنتشرة بسرعة $v = c$ تخضع بالضبط للمعادلة $ds^2 = 0$ أي أنها مرسومة على هذا المخروط.

يَقْسِم مخروط الضوء الفضاء الرباعي إلى منطقتين: الأولى هي داخل المخروط وتخضع للعلاقة $(ds^2 > 0)$، أي جميع المتجهات الرباعية هي زمانية. يكون رأس هذا المخروط أصل محاور الإحداثيات وتكون راسماته Generators أو Generatrix هي مسارات الإشارات الضوئية المنبعثة من أصل المحاور. وتقسم هذه المنطقة إلى قسمين (أنظر الرسم 28): الجزء الأعلى (F) والجزء الأدنى (P). يشمل الجزء الأعلى المتَّجهات الزمانية ذات المركَّبة A^0 الإيجابية، إنه منطقة المستقبل. أما الجزء الأدنى فيشمل المتجهات الزمانية ذات المركبة A^0 السلبية، انه منطقة الماضي.

أما المنطقة الثانية فهي التي تقع خارج مخروط الضوء وتتميز بالعلاقة $(ds^2 < 0)$ وتشمل المتجهات المكانية.



الشكل 28 ـ مخروط الضوء.

5 ـ ثبات الفاصل ds^2 ومجموعة الإزاحات في الفضاء الرباعي الاقليدي

سنبحث عن التحويلات التي تنقل من نظام محاور متعامد ومنظّم بالشروط (VI-10) أو (VI-17) أو (VI-28) إلى نظام آخر متعامد ومنظّم بالشروط ذاتها دون أي تغيير في وحدة الطول.

ـــ في حال استعمال إحداثيات تخيُّلية بمحاور متعامدة ومنظّمة حسب الشروط (VI-10) $(g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu})$ أو الشروط (VI-17) $(g_{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu})$ تكون الصيغة الاساسية حسب (VI-3) أو (VI-15). لذلك يجب تأمين الشرط:

$$\sum_\rho (dx^\rho)^2 = \sum_\rho (dx'^\rho)^2 \qquad \text{(VI-35)}$$

ـــ في حال استعمال إحداثيات حقيقية $(x^0 = ct)$ مع شروط التناظم (VI-28) أي $(g_{\mu\nu} = r_{\mu\nu})$ تكون الصيغة الأساسية حسب (VI-22) لذلك يجب تأمين الشرط:

$$\sum_\rho (dx^\rho)^2 + (dx^0)^2 = -\sum_\rho (dx'^\rho)^2 + (dx'^0)^2 \,. \qquad \text{(VI-36)}$$

وثبات هذه الصيغة للفاصل ds^2 يكون بواسطة التحويلات التي تشكل مجموعة الإزاحات displacements في الفضاء الإقليدي أو الإقليدي غير الأصيل. وتشمل هذه المجموعة:

1 ـ الانسحابات translations في المكان والزمان وتحدَّد بالتحويلات:

$$x'^\mu = x^\mu + a^\mu \qquad (a^\mu = c^{ie}) \qquad \text{(VI-37)}$$

وينتج عنها:

$$dx'^\mu = dx^\mu. \qquad \text{(VI-38)}$$

2 ـ الاستبدالات substitutions الخطية والمتعامدة للفضاء الرباعي الإقليدي أو الاقليدي غير الأصيل إستناداً إلى (XIV - 23) وتكون هذه الإستبدالات بالصيغ التالية:

$$e'_\mu = a^\nu{}_{\mu'} e_\nu \qquad e_\mu = a^{\nu'}{}_\mu e'_\nu \qquad \text{(VI-39)}_1$$

$$x'^\mu = a^{\mu'}_\nu x^\nu \qquad x^\mu = a^\mu_{\nu'} x'^\nu \qquad \text{(VI-39)}_2$$

حيث تخضع المعاملات a^{ρ}_{μ} و a^{ν}_{ρ} لعلاقات التعامد (ارجع إلى 28 - XIV).

$$a^{\rho}_{\mu} \cdot a^{\nu'}_{\rho} = a^{\rho'}_{\mu} \cdot a^{\nu'}_{\rho} = \delta^{\nu}_{\mu} \qquad \text{(VI-40)}$$

ويجب أيضاً أن نحافظ على علاقات التعامد للمحاور في التحويل. ومهما كان النظيم نستخلص قانون ثبات الجداء السُّلَّمي (رجوعاً إلى الفصل XIV).

$$g'_{\mu\nu} = (e'_{\mu} \cdot e'_{\nu}) = (e_{\mu} \cdot e_{\nu}) = g_{\mu\nu} \qquad \text{(VI-41)}$$

أي الشرط (70 - XIV):

$$a^{\rho}_{\mu'} g^{\lambda}_{\rho} = a^{\rho'}_{\lambda}\, g_{\mu\rho} \qquad \text{(VI-42)}$$

أ ـ إذا كانت المحاور متعامدة ومنظَّمة بالعلاقات $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ أو $g_{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu}'$ نجد استناداً إلى (VI-42):

$$a^{\lambda}_{\mu'} = a^{\mu'}_{\lambda} \qquad \text{(VI-43)}$$

إن التحويل (VI-39) يقود دائماً واستناداً إلى (VI-40) إلى العلاقة:

$$\sum_{\rho} a^{\rho}_{\mu'}\, a^{\rho}_{\nu'} = \delta_{\mu\nu}' \qquad \text{(VI-44)}$$

ب ـ إذا كانت المحاور متعامدة ومنظَّمة حسب $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ يعطي الشرط (VI-42) العلاقات التالية:

$$a^{q}_{p'} = a^{p'}_{q} \;,\; a^{o}_{o'} = a^{o'}_{o} \;,\; a^{o}_{p'} = -a^{p'}_{o} \;,\; a^{p}_{o'} = -a^{o'}_{p} \qquad \text{(VI-45)}$$

ملاحظة: إذا اخترنا الإحداثية الرابعة $x^4 = ict$ تكون المُعاملات $a^{q}_{p'}$ و $a^{4'}_{4}$ حقيقية و $a^{\rho}_{4'}$ و $a^{4}_{\rho'}$ تخيلية بحتة. فنجد استناداً إلى المعادلة (VI-40).

$$(a^{4}_{4'})^2 = 1 - \sum_{\rho} (a^{\rho}_{4'})^2 \geqslant 1 \qquad \text{(VI-46)}$$

أما إذا اخترنا الإحداثية الرابعة الحقيقية $x^0 = ct$ تكون كل المعاملات $a^{\rho}_{\mu'}$ و $a^{\rho'}_{\mu}$ حقيقية. فنجد استناداً إلى (VI-40) و (VI-45) أن:

$$(a^{0}_{0'})^2 = 1 + \sum_{\rho} (a^{\rho}_{0'})^2 \geqslant 1 \qquad \text{(VI-47)}$$

ومنها نستنتج أن:

$$a^{0}_{0'} \geqslant 1 \quad \text{أو} \quad a^{4}_{4'} \geqslant 1 \tag{VI-48}$$

وذلك إذا استبعدنا التحويلات من النوع $a^{0}_{0'} \leqslant -1$ ويعني الشرط (VI - 48) أن التحويلات (VI-39) تؤلف مجموعة group. لنكتب التحويلين من x إلى x′ ثم من x′ إلى x″.

$$x'^{\mu} = a^{\mu'}_{\nu} x^{\nu} \quad , \quad x''^{\mu} = a^{\mu''}_{\nu'} x'^{\nu} \tag{VI-49}$$

فيكون التحويل مباشرة من x إلى x″

$$x''^{\mu} = a^{\mu''}_{\nu'} a^{\nu'}_{\rho} x^{\rho} = a^{\mu}_{\rho} x^{\rho'} \tag{VI-50}$$

أحد تحويلات المجموعة بمعاملات:

$$a^{\mu''}_{\rho} = a^{\mu''}_{\nu'} a^{\nu'}_{\rho} \tag{VI-51}$$

وبالخصائص ذاتها التي للمعاملات $a^{\mu'}_{\rho}$ و $a^{\mu''}_{\rho'}$

لكي تشكل التحويلات (VI-49) مجموعة يجب أن تحتوي بشكل خاص على تحويل التطابق Identity transformation وهذا ما يجعل المعامل $a^{0'}_{0}$ يخضع للشرط (VI-48).

ويمكن أن نثبت انطلاقاً من الشرط (VI-48) أن المركّبة الرابعة A^0 لمتّجه رباعي زماني ($A^2 > 0$) تحافظ على إشارتها في الاستبدالات الخطية والمتعامدة من هذا النوع. مما يعني أن إشارة هذه المركّبة لا تتغير عند استبدال هيكل إسناد غاليلي بآخر. فيكون المتجه dx بشكل خاص متّجه زماني لأن $ds^2 > 0$ إذا كانت السرعة v أقل من سرعة الضوء c. فالمركّبة dx^0 الإيجابية في منطقة المستقبل تحافظ على إيجابيتها في أيّ تحويل من النوع السابق أي استبدال هيكل إسناد غاليلي بآخر. ويعني هذا أن الوقت يجري بالاتجاه ذاته في جميع الهياكل الاسنادية الغاليلية ذات المعنى الفيزيائي (أي $ds^2 > 0$ أو $v < c$).

هكذا يزيد الشرط $a^{0}_{0'} \geqslant 0$ فرضية جديدة إلى تعادل أدوار إحداثيات المكان والزمان المعبّر عنه بالعلاقات (VI-39)، وهي عدم قابلية الوقت للإنعكاس.

6 ـ تحويلات لورنتز العامة والخاصة

رأينا أن مجموعة الاستبدالات في الفضاء الإقليدي الرباعي تحافظ على قيمة الصيغة الأساسية ds^2، فتؤمّن تكافؤ هياكل الاسناد الغاليلية، إضافةً إلى أنها تحافظ على اتجاه جريان الوقت (بفضل المعادلة VI - 48). هذه هي مجموعة تحويلات لورنتز العامة.

ومن المهم أن نشير هنا إلى أن تحويلات لورنتز دون دوران لا تشكل وحدها مجموعة إذا كانت سرعة التحويل باتجاهات مختلفة[4] بالنسبة إلى المحاور. وذلك لأن حصيلة تحويلين للورنتز بدون دوران $S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow S_3$ هي تحويل للورنتز $S_1 \rightarrow S_3$ ولكن بدوران D لمحاور الفضاء. لإثبات ذلك يكفي أن نشير إلى أن حصيلة التحويلات $S_1 \rightarrow S_2$ و $S_2 \rightarrow S_3$ المعبَّر عنها بالقواعد من نوع $(V - 71)_1$ هو تحويل $S_1 \rightarrow S_3$ من نوع $(V - 78)_1$ ومن جهة ثانية إذا كانت $V_{(ij)}$ سرعة الهيكل الاسنادي S_i بالنسبة إلى الهيكل S_j نجد:

$V_{(12)} = - V_{(21)}$ $\quad V_{(23)} = - V_{(32)}$ $\quad$ ولكن $DV_{(31)} = -V_{13}$.

تشكل هذه الظاهرة المسماة مبادرة توماس[5] Thomas precession تعبيراً حركياً عن الخاصة التالية لتحويلات لورنتز: إذا كان أحد التحويلين السابقين ($S_2 \rightarrow S_3$ مثلاً) تحويلاً تفاضلياً يظهر الدوران D كمبادرة دائرية لمحاور S بالنسبة S_3 والسرعة الزاوية لهذه المبادرة متناسبة مع:

$$\frac{[V_{(12)} \wedge V_{(12)}]}{V^2_{(12)}}$$

اما تحويلات لورنتز الخاصة فهي حالة خاصة من التحويلات دون دوران تكون فيه محاور الهيكلين متوازية وسرعة التحويل باتجاه أحد المحاور.

أما تحويلات لورنتز العامة فيمكن دائما اعتبارها حصيلة التحويلات التالية:

1 ـ **انسحاب مكاني بحت**: يقود إلى ثبات الكمية:

$$d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \qquad \text{(VI-52)}$$

(4) V. Lalan, C.R.Ac. Sc., 203, 1936, 1491; Bull. soc. Math. Fr. 65, 1937, 98. — A METZ C.R. Ac. Sc., 237, 1953, 29.

(5) L.W. Thomas, Phil. Mag., 3, 1927, 1.

وتعني هذه التحركات تغييراً في أصل المحاور ودوراناً لهذه المحاور بشكل عام.

2 ـ **انسحاب زماني**: أي تبديل أصل الوقت.

3 ـ **تحويل خاص للورنتز**: أي تبديل هيكل اسناد بآخر بحيث تكون المحاور متوازية وباتجاه واحد وسرعة التحويل v باتجاه أحد المحاور (ox).

وفعلاً يمكن دائماً بواسطة انسحاب رباعي أن نجعل أصل الهيكلين الاسناديين S(xyz) و S′(x′y′z′) متطابقاً في الوقت الابتدائي $t = t' = 0$ في كلا الهيكلين. ويمكن أن نجعل محاورهما ox و ox′ باتجاه السرعة v بواسطة دوران مكاني في كل من الهيكلين. وكذلك يمكن بواسطة دوران الهيكل S′ حول ox′ أن نجعل المحاور oy′ و oz′ متوازية (وباتجاه واحد) مع المحاور oy و oz بالتوالي. فنجد أنفسنا أمام تحويل خاص للورنتز. ويمكن اعتبار هذا التحويل دوراناً للفضاء الرباعي لا يغير السطوح xoy و xoz (المطابقة للسطوح x′oy′ و x′oz′) بحيث إن:

$$y' = y \qquad z' = z$$

فهي إذاً دوران في السطح التخيُّلي (x^1ox^4) بالصيغة:

$$x'^1 = x^1 \cos\psi + x^4 \sin\psi \qquad \text{(V - 68)}$$
$$x'^4 = x^4 \cos\psi - x^1 \sin\psi$$

فتكون هذه التحويلات محدَّدة بالزاوية التخيلية ψ المرتبطة بدورها بسرعة التحويل β بالعلاقة $tg\,\psi = \beta i$.

بتعبير آخر يمكننا دائماً أن نستبدل أي تحويل عام للورنتز بتحويل خاص يضاف إليه تحرك مكاني بحت (أي إزاحة مكانية ودوران مكاني) يحافظ على الصيغة $d\sigma^2$ للفضاء الثلاثي وانسحاب اختياري للوقت (أي تبديل أصل الوقت).

ومن المفهوم أنه في حالة التحويلات الخاصة للورنتز (وفي هذه الحالة فقط) تكون حصيلة تحويلين $S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow S_3$ تحويلاً S من النوع ذاته.

7 ـ صيغة المُعاملات في تحويل لورنتز العام

يحدِّد تحويل لورنتز العام بالقواعد (VI-39) أي:

$$e_\mu = a^{\nu'}_{\mu}\, e'_\nu \qquad e'_\mu = a^{\nu}_{\mu'}\, e_\nu \qquad \text{(VI-39)}_1$$
$$x^\mu = a^{\mu}_{\nu'}\, x'^\nu \qquad x'^\mu = a^{\mu'}_{\nu}\, x^\nu \qquad \text{(VI-39)}_2$$

بحيث إن

(VI-40)
$$a^{\rho'}_{\mu} a^{\nu}_{\rho'} = a^{\rho}_{\mu'} a^{\nu'}_{\rho} = \delta^{\nu}_{\mu}$$

شرط أن تخضع هذه المعاملات لعلاقة المحافظة على $g_{\mu\nu}$ أي:

(VI-42)
$$a^{\rho}_{\mu'} g_{\rho\nu} = a^{\rho'}_{\nu} g_{\mu\rho}$$

لنظام محاور منظَّم حسب إحدى الطُرق السابقة.

أ ـ إذا $g_{\mu\nu} = \pm \delta_{\mu\nu}$ (حالة الإحداثيات التخيلية) يصبح الشرط (VI 42):

$(VI\text{-}42)_a$
$$a^{\nu}_{\mu'} = a^{\mu'}_{\nu}$$

ويأخذ الشرط (VI-40) الصيغة التالية:

$(VI\text{-}40)_a$
$$\sum_{\rho} a^{\rho'}_{\mu} a^{\rho'}_{\nu} = \sum_{\rho} a^{\rho}_{\nu'} a^{\rho}_{\nu'}$$

ب ـ إذا $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ (حالة الإحداثيات الحقيقيّة) يصبح الشرط (VI-42).

$$a^{\rho}_{\mu'} \eta_{\rho\nu} = a^{\rho'}_{\nu} \eta_{\mu\rho}$$

أي:

$(VI\text{-}42)_b$
$$a^{q}_{p'} = a^{p'}_{q} \quad , \quad a^{0}_{0'} = a^{0'}_{0} \quad , \quad a^{0}_{\rho} = - a^{\rho'}_{0} \quad , \quad a^{\rho}_{0'} = - a^{0'}_{\rho}$$

وتكتب (VI-40) بالصيغة:

$(VI\text{-}40)_b$
$$\sum_{r} a^{r'}_{\rho} a^{r'}_{q} - a^{0'}_{\rho} a^{0'}_{q} = \partial_{\rho q}$$

$$-\sum_{r} a^{r'}_{0} a^{r'}_{0} + (a^{0'}_{0})^2 = 1 \quad , \quad -\sum_{r} a^{r'}_{\rho} a^{r'}_{0} + a^{0'}_{\rho} a^{0'}_{0} = 0$$

سنكتفي في هذا المقطع باستعمال الإحداثيات الحقيقية فتكون التحويلات خاضعة للعلاقات $(VI\text{-}42)_b$ و $(VI\text{-}40)_b$.

لنرجع إلى الصيغة (78 - V) للتحويل العام للإحداثيات الذي اثبتناه في الفصل الخامس. فإذا كتبناه باستعمال المركّبات $(x = x^{\rho}, x^0 = ct)$ x^{μ} نجد:

$$x'^{\rho} = D^{-1} x^{\rho} + D^{-1} \nu^{\rho} \left\{ \frac{\alpha}{\nu^2} (x \cdot v) - \frac{x^0}{c\sqrt{1-\beta^2}} \right\} \qquad (V-78)_1$$

$$x'^{0} = \frac{x^0 - \left(\frac{x.v}{c}\right)}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (V-78)_2$$

مع:

$$v = (\nu^{\rho}) \ , \ v_{\rho} = -\nu^{\rho} \ , \ v^2 = \sum_{\rho} (\nu^{\rho}) \qquad (VI-53)$$

$$x \cdot v = \sum_{r} x^{\rho} \nu^{\rho} = -x^{r} \nu_{\rho} \qquad (VI-54)$$

وأيضاً:

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1} \qquad (V-75)$$

إن الكميات $\nu^{\rho} = \frac{dx^{\rho}}{dt}$ ليست المركبات الفضائية لمتَّجه رباعي لأن dt تتغير من هيكل إسناد إلى آخر. أما الكميات $u^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{ds}$ فهي مركِّبات متجِه رباعي لأن ds لا تتغير من هيكل إسناد إلى آخر. وترتبط هذه المركبات بالسرعة العادية v بالعلاقات:

$$\mu^{\rho} = \frac{dx^{\rho}}{ds} = \frac{dx^{\rho}}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{\nu^{\rho}}{c\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (VI-55)$$

$$u^0 = \frac{dx^0}{ds} = c\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

ويمكن أيضاً أن نكتب $(V - 78)_1$ و $(V - 78)_2$ كما يلي:

$$x'^{\rho} = D^{-1}x^{\rho} - D^{-1}u^{\rho} \left\{ a\left(\frac{1-\beta^2}{\beta^2}\right) x^{r}u_{r} + x^0 \right\} \qquad (VI-55)_1$$

$$x'^{0} = x^0 u_0 + x^{\rho} u_{\rho} \qquad (VI-55)_a$$

لنفترض أن معاملات الدوران الفضائي D^{-1} هي α_{ρ}^{q} بمعنى أن:

$$D^{-1}x^{\rho} = \alpha_{q}^{\rho} x^{\rho} \qquad (VI-56)$$

فإذا قارنا هذه الصيغة مع $(VI\text{-}39)_2$ التي تكتب أيضا:

$$(VI\text{-}56)_1 \qquad x'^{\rho} = a_{\nu}^{\rho'} x^{\nu} = a_{q}^{\rho'} x^{q} + a_{0}^{\rho'} x^{0}$$

$$(VI\text{-}56)_2 \qquad x'^{0} = a_{\nu}^{0'} x^{\nu} = a_{q}^{0'} x^{q} + a_{0}^{0'} x^{0}$$

ومع (VI-55) نحصل على:

$$(VI\text{-}57) \qquad a^{\rho\prime}_{q} = a^{q\prime}_{\rho} = \alpha^{\rho}_{q} - \alpha\left(\frac{1-\beta^2}{\beta^2}\right)\alpha^{\rho}_{r} u^{r} u_{q} = a^{\rho}_{q} - \frac{\alpha}{\nu^2}\ \alpha^{\rho}_{r} \nu^{r} \nu_{q}$$

$$(VI\text{-}58) \qquad a^{\rho\prime}_{0} = -a^{0\prime}_{\rho} = -\alpha^{\rho}_{r} u^{r} \ , \quad a^{0\prime}_{\rho} = -a^{\rho}_{0'} = u_{\rho}$$

وتختصر هذه النتيجة في الجدولين التاليين (بصيغة مصفوفات matrices).

$$(VI\text{-}59)_1 \qquad a^{\nu\prime}_{\mu} = \begin{vmatrix} \alpha^1_r \gamma^r_1 & \alpha^2_r \gamma^r_1 & \alpha^3_r \gamma^r_1 & -u^1 \\ \alpha^1_r \gamma^r_2 & \alpha^2_r \gamma^r_2 & \alpha^3_r \gamma^r_2 & -u^2 \\ \alpha^1_r \gamma^r_3 & \alpha^2_r \gamma^r_3 & \alpha^3_r \gamma^r_3 & -u_3 \\ -\alpha^1_r u^r & -\alpha^2_r u^r & -\alpha^3_r u^r & u^0 \end{vmatrix}$$

$$(VI\text{-}59)_2 \qquad a^{\nu}_{\mu}{}' = \begin{vmatrix} \alpha^1_r \gamma^r_1 & \alpha^1_r \gamma^r_2 & \alpha^1_r \gamma^r_3 & \alpha^1_r u^r \\ \alpha^2_r \gamma^r_1 & \alpha^2_r \gamma^r_2 & \alpha^2_r \gamma^r_3 & \alpha^2_r u^r \\ \alpha^3_r \gamma^r_1 & \alpha^3_r \gamma^r_2 & \alpha^3_r \gamma^r_3 & \alpha^3_r u^r \\ u^1 & u^2 & u^3 & u^0 \end{vmatrix}$$

حيث وضعنا:

(VI-60)

$$\gamma^r_\rho = \partial^r_\rho + \frac{\alpha}{\beta^2}\ (1-\beta^2)\, u^r u^\rho = \partial^r_\rho + \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta^2}\,(1-\sqrt{1-\beta^2}\,)\, u^r u^\rho$$

أو:

$$\gamma^r_\rho = \partial^r_\rho + \frac{\alpha}{\nu^2}\ \nu^r \nu^\rho$$

أو استناداً إلى (VI-57) و (VI-58) و (V - 75). نشير إلى أن المؤشر الأسفل للمعاملات $a^{\nu'}_{\mu}$ و $a^{\nu}_{\mu'}$ يدل على أسطر المصفوفات (VI-59) بينما المؤشر الأعلى يدل على الأعمدة.

ملاحظة: في حالة تحويل لورنتز دون دوران (انظر الفصل الخامس المقطع 15) نجد:

$$\alpha^{q}_{p} = \delta^{0}_{p} \qquad \text{(VI-61)}$$

وتكتب العلاقات (VI-57) و (VI-58) كما يلي:

$$a^{q'}_{p} = a^{q}_{p'} = \delta^{q}_{p} + \frac{a}{\nu^2}\ \nu^p \nu^q \quad , a^{0'}_{0} = a^{0'}_{0} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad = u_0 \qquad \text{(VI-62)}$$

$$\begin{aligned} a^{p'}_{0} &= -\,a^{0}_{p'} = -\,\frac{\nu^p}{c\sqrt{1-\beta^2}} \quad = -\,u^p \quad , \\ a^{0'}_{p} &= -\,a^{p}_{0'} = -\,\frac{\nu^p}{c\sqrt{1-\beta^2}} \quad = -u^p \end{aligned} \qquad \text{(VI-63)}$$

أي:

$$a^{\nu'}_{\mu} = \begin{vmatrix} \gamma^1_1 & \gamma^2_1 & \gamma^3_1 & -u^1 \\ \gamma^1_2 & \gamma^2_2 & \gamma^3_2 & -u^2 \\ \gamma^1_3 & \gamma^2_3 & \gamma^3_3 & -u^3 \\ -u^1 & -u^2 & -u^3 & u^0 \end{vmatrix} \qquad \text{(VI-64)}$$

$$a^{\nu}_{\mu'} = \begin{vmatrix} \gamma^1_1 & \gamma^2_1 & \gamma^3_1 & u^1 \\ \gamma^1_2 & \gamma^2_2 & \gamma^3_2 & u^2 \\ \gamma^1_3 & \gamma^2_3 & \gamma^3_3 & u^3 \\ u^1 & u^2 & u^3 & u^0 \end{vmatrix}$$

8 ـ تطبيق على تحويل لورنتز الخاص

في حالة تحويل لورنتز الخاص

$$v = \nu^1 \quad , \quad \nu^2 = \nu^3 = 0 \tag{VI-65}$$

تكون قيمة المعاملات (VI-62) و (VI-63) غير المنعدمة.

$$\begin{aligned}
& a_1^{1'} = a_{1'}^{1} = 1 + \alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \\
& a_2^{2'} = a_{2'}^{2} = a_3^{3'} = a_{3'}^{3} = 1 \\
& a_0^{1'} = a_{1'}^{0} = \frac{-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \quad a_1^{0'} = -a_{0'}^{1} = \frac{-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \\
& a_0^{0'} = a_{0'}^{0} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}
\end{aligned} \tag{VI-66}$$

وتتفق هذه القيم مع تلك التي يمكن استخلاصها مباشرة من التحـويل الخـاص إذا كتب بالصيغة (64 - V). فإذا وضعنا $th\varphi = \beta$ نجد:

$$a_{\mu}^{\nu'} = \begin{vmatrix} ch\varphi & 0 & 0 & -sh\varphi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -sh\varphi & 0 & 0 & ch\varphi \end{vmatrix} \tag{VI-67}$$

$$a_{\mu'}^{\nu} = \begin{vmatrix} ch\varphi & 0 & 0 & sh\varphi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ sh\varphi & 0 & 0 & ch\varphi \end{vmatrix}$$

ملاحظة: إذا اعتمدنا الإحداثيات التخيليـة (VI-14) مع $x^4 = ict$ وإذا وضعنـا $tg\psi = i\beta$ تعطينا الصيغ (68 - V) في حالة التحويل الخاص القيم التالية للمعاملات $a_{\mu'}^{\nu}$ و $a_{\mu}^{\nu'}$.

$$a^{\nu'}_{\mu} = \begin{vmatrix} \cos\psi & 0 & 0 & \sin\psi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin\psi & 0 & 0 & \cos\psi \end{vmatrix} \qquad \text{(VI-68)}$$

$$a^{\nu}_{\mu'} = \begin{vmatrix} \cos\psi & 0 & 0 & -\sin\psi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sin\psi & 0 & 0 & \cos\psi \end{vmatrix}$$

9 ـ أمثلة

1 ـ **تحويل متجِه A**: لنستعمل الإحداثيات الحقيقية فنجد:

$$A'^{\mu} = a^{\mu'}_{\nu} A^{\nu} \quad , \quad A'_{\mu} = a^{\nu}_{\mu'} A_{\nu} \qquad \text{(VI-69)}$$

أي قانون تحويل المركّبات الموافقة للتغيُّر

$$A'^{p} = a^{p'}_{q} A^{q} + a^{p'}_{0} A^{0} = \alpha^{p}_{r} \gamma^{r}_{q} A^{q} - \alpha^{p}_{r} u^{r} A^{0} \qquad \text{(VI-70)}_1$$

$$A'^{0} = a^{0'}_{p} A^{p} + A^{0'}_{0} A^{0} = -\sum_p u^p A^p + u^0 A^0 \qquad \text{(VI-70)}_2$$

وقانون تحويل المركّبات المخالفة للتغير:

$$A'_{p} = a^{q}_{p'} A_q + a^{0}_{p'} A_0 = \sum_p \alpha^{p}_{r} \gamma^{r}_{q} A_q + a^{p}_{r} u^r A^0 \qquad \text{(VI-71)}_1$$

$$A'_{0} = a^{p}_{0} A_p + a^{0'}_{0} A_0 = u^p A_q + u^0 A_0 \qquad \text{(VI-71)}_2$$

أ ـ في الحالة الخاصة لتحويل لورنتز دون دوران نجد استناداً إلى (VI-61):

$$A'^{p} = \left[\delta^{q}_{p} + \sum_q \frac{\alpha}{\beta^2} \ (1-\beta^2)\, u^p u^q \right] A^q - u^p A^0 \qquad \text{(VI-72)}_1$$

$$A'^{0} = -\sum_p u^p A^p + u^0 A^0 \quad \left(\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \ - 1\right) \qquad \text{(VI-72)}_2$$

$$A'_{p} = \left[\delta^{q}_{p} + \frac{\alpha}{\beta^2} \ (1-\beta^2)\, u^p u^q \right] A_q + u^p A_0 \qquad \text{(VI-73)}_1$$

$$A'_{0} = u^p A_p + u^0 A_0 \qquad \text{(VI-73)}_2$$

ب ـ وفي حالة تحويل لورنتز الخاص بحيث إن:

$$u = u^1 = \frac{\nu^1}{c\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \quad u^2 = u^3 = 0 \tag{VI-74}$$

$$u^0 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

نجد استناداً إلى (VI-72) و (VI-73):

$$A'^1 = \frac{A^1-\beta A^0}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \quad A'^2 = A^2 \quad , \quad A'^3 = A^3 \quad , \tag{VI-75}$$

$$A'^0 = \frac{A^0-\beta A^1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$A'_1 = \frac{A_1+\beta A_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \quad A'_2 = A_2 \quad , \tag{VI-76}$$

$$A'_3 = A_3 \quad , \quad A'_0 = \frac{A_0+\beta A_1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

نشير أيضاً إلى أن التحويل المعاكس هو:

$$A^1 = \frac{A'^1+\beta A'^0}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \quad A^2 = A'^2 \quad , \quad A^3 = A'^3 \quad , \tag{VI-77}$$

$$A^0 = \frac{A'^0+\beta A'^1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$A_1 = \frac{A'_1-\beta A'_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \quad A_2 = A'_2 \quad , \tag{VI-78}$$

$$A_3 = A'_3 \quad , \quad A_0 = \frac{A'_0-\beta A'_1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

ومن المفهوم أن (VI-75) و (VI-76) والتحويل المعاكس (VI-77) و (VI-78) يمكن استخلاصها من المعاملات (VI-66) و(VI-67) للتحويل الخاص.(6)

---

(6) نستنتج من (VI-68) قواعد التحويل في حالة الإحداثية الرابعة التخيُّلية ($x^4 = ict$) أن:

$$A'^1 = \frac{A^1+i\beta A^4}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \quad A'^2 = A^2 \quad , \quad A'^3 = A^3 \quad , \quad A'^4 = \frac{A^4-i\beta A^1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

=

2 ـ قانون تحويل موتر متخالف التناظر $A^{\mu\nu}$

نجد استناداً إلى قانون تحويل الموترات(7) أن:

$$A'^{\mu\nu} = a^{\mu'}_{p}\, a^{\nu'}_{\sigma}\, A^{p\sigma} \quad , \quad A'_{\mu\nu} = a^{p}_{\mu'}\, a^{q}_{\nu'}\, A^{p\sigma} \qquad \text{(VI-79)}$$

أي:

$$A'^{pq} = \frac{1}{2}\left(a^{p'}_{r}\, a^{q'}_{s} - a^{p'}_{s}\, a^{q'}_{r}\right) A^{rs} - \left(a^{p'}_{0}\, a^{q'}_{r} - a^{p'}_{r}\, a^{q'}_{0}\right) A^{r0} \qquad \text{(VI-80)}_1$$

$$A'^{p0} = \frac{1}{2}\left(a^{p'}_{r}\, a^{0'}_{s} - a^{p'}_{s}\, a^{0'}_{r}\right) A^{rs} + \left(a^{p'}_{s}\, a^{0'}_{0} - a^{p'}_{0}\, a^{0'}_{r}\right) A^{r0} \qquad \text{(VI-80)}_2$$

واستناداً إلى $(VI-59)_1$ و (VI-60) تكون:

$$A'^{pq} = \alpha^{p}_{m}\, \alpha^{q}_{n}\Big[A^{mn} - \frac{\alpha}{\beta^2}\,(1-\beta^2)\, u_r\,(u^n A^{mr} + u^m A^{rn}) + A^{n0}u^m - A^{mo}u^n\Big] \qquad \text{(VI-81)}_1$$

$$A'^{p0} = \alpha^{p}_{m}\Big[A^{ms}u_s + A^{m0}u_0 + u^m u_r A^{r0} - \frac{\alpha}{\beta^2}\,(1-\beta^2)\, u^m u_r u_0 A^{r0}\Big] \qquad \text{(VI-81)}_2$$

أما قانون تحويل المركِّبات الموافقة للتغيُّر فهو:

$$A'_{pq} = \frac{1}{2}\left(a^{r}_{p'}\, a^{s}_{q'} - a^{s'}_{p'}\, a^{r}_{q'}\right) A_{rs} + \left(a^{r}_{p'}\, a^{0}_{q'} - a^{r}_{p'}\, a^{r}_{q'}\right) A_{r0} \qquad \text{(VI-81)}_3$$

$$= \quad A'_1 = \frac{A_1+i\beta A_4}{\sqrt{1-\beta^2}} \;,\; A'_2 = A_2 \;,\; A'_3 = A_3 \;,\; A'_4 = \frac{A_4-i\beta A_1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

ومن القواعد المعاكسة:

$$A^1 = \frac{A'^1-i\beta A'^4}{\sqrt{1-\beta^2}} \;,\; A^2 = A'^2 \;,\; A^3 = A'^3 \;,\; A^4 = \frac{A'^4+i\beta A'^1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$A_1 = \frac{A'_1-i\beta A'_4}{\sqrt{1-\beta^2}} \;,\; A_2 = A'_2 \;,\; A_3 = A'_3 \;,\; A_4 = \frac{A'_4+i\beta A'_1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

(7) انظر المقطعين 4 و 5 من الفصل الرابع عشر.

$$(VI\text{-}81)_4 \qquad A'_{p0} = \frac{1}{2}\,(a^{r}_{p'}\,a^{s}_{0'} = a^{s}_{p'}\,a^{r}_{0'})\,A_{rs} + (a^{r}_{p'}\,a^{0}_{0'} - a^{0}_{p'}\,a^{r}_{0'})\,A_{r0}$$

أي استناداً إلى $(VI\text{-}59)_2$ و$(VI\text{-}60)$:

$$(VI\text{-}82)_1 \qquad A'_{pq} = \sum_{r} a^{p}_{r}\,a^{q}_{s}\Big[A_{rs} - \frac{\alpha}{\beta^2}\,(1-\beta^2)\,(A_{rn}u_s - A_{sn}u_r)\,u^n - (A_{r0}u_s - A_{s0}u_r)\Big]$$

$$(VI\text{-}82)_2 \qquad A'_{p0} = \sum_{r} a^{p}_{r}\Big[u^sA_{rs} + u^0A_{r0} + u^mu_rA_{m0} - \frac{\alpha}{\beta^2}\,(1-\beta^2)\,u_ru^mu^0A_{m0}\Big]$$

أ ـ في حالة تحويل دون دوران نجد:

$$(VI\text{-}83)_1 \qquad A'^{pq} = A^{pq} - \frac{\alpha}{\beta^2}\,(1-\beta^2)\,u_r\,(u^qA^{pr} - u^pA^{qr}) + A^{q0}u^p - A^{p0}u^q$$

$$(VI\text{-}83)_2 \qquad A'^{p0} = A^{ps}u_s + A^{p0}u_0 + \frac{\alpha}{\beta^2}\,(1-\beta^2)\,u^pu_rA^{r0}$$

$$(VI\text{-}84)_1 \qquad A'_{pq} = A_{pq} - \frac{\alpha}{\beta^2}\,(1-\beta^2)\,u^s\,(u_qA_{ps} - u_pA_{qs}) + (u_pA_{q0} - u_qA_{p0})$$

$$(VI\text{-}84)_2 \qquad A'_{p0} = A_{pr}u^r + A_{p0}u^0 + \frac{\alpha}{\beta^2}\,(1-\beta^2)\,u^ru_pA_{r0}.$$

ب ـ أما في حالة تحويل خاص بحيث إن:

$$(VI\text{-}85) \qquad u^1 = u = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\,, \quad u^2 = u^3 = 0$$

فنجد:

$$(VI\text{-}86) \qquad A'^{1q} = \frac{A^{1q}-\beta A^{0q}}{\sqrt{1-\beta^2}}\,, \quad A'^{23} = A^{23}$$

$$A'^{0p} = \frac{A^{0p}-\beta A^{1p}}{\sqrt{1-\beta^2}}\,, \quad A'^{10} = A^{10}\,, \quad p \neq 1$$

أما قانون تحويل المركّبات المخالفة للتغيير فهو:

$$(VI\text{-}87) \qquad A'_{1q} = \frac{A_{1q}+\beta A_{0q}}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \quad A'_{23} = A_{23}$$

$$A'_{0p} = \frac{A_{0p}+\beta A_{1p}}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \quad A'_{01} = A_{01} \quad , \quad p \neq 1$$

10 ـ قانون جمع السُّرع وتحويل لورنتز العام

لنفترض أن S و 'S هيكلان إسناديان غاليليان وأن جسيماً نقطياً يتحرك بسرعة $v = \frac{d\,x}{d\,t}$ بالنسبة إلى S و $v' = \frac{dx'}{dt'}$ بالنسبة إلى 'S. لتكن ω، اتقاء لأي التباس، سرعة 'S بالنسبة إلى S ولتكن:

$$(VI\text{-}88) \qquad \beta = \frac{\omega}{c}$$

إنطلاقاً من العلاقة الأساسية:

$$(VI\text{-}89) \qquad ds^2 = c^2\,dt^2 - \sum_p (dx^p)^2 = c^2\,dt'^2 - \sum_p (dx'^p)^2$$

نستنتج أن:

$$(VI\text{-}90) \qquad 1 - \frac{\nu^2}{c^2} = \left(\frac{dt'}{dt}\right)^2 \left(1 - \frac{\nu'^2}{c^2}\right)$$

مع:

$$(VI\text{-}91) \qquad \nu^p = \frac{dx^p}{dt} \quad , \quad \nu'^p = \frac{d\,x'^p}{d\,t^4} \quad , \quad \nu^2 = \sum_p (\nu^p)^2 \quad , \quad \nu'^2 = \sum_p (\nu'^p)^2.$$

ومنها إذاً:

$$(VI\text{-}92) \qquad \frac{dt'}{dt} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\nu^2}{c^2}}{1 - \frac{\nu'^2}{c^2}}}$$

ولكن تحويل الإحداثيات:

$$(VI\text{-}93) \qquad x'^\mu = a^{\mu'}_{\nu} x^\nu \quad , \quad x^\mu = a^{\mu}_{\nu'} x'^\nu$$

يكتب أيضا:

$$(VI\text{-}94)_1 \qquad x'^0 = a^{0'}_p x^p + a^{0'}_0 x^0 \quad , \quad x^0 = a^0_{p'} x'^p + a^0_0 x'^0$$

$$(VI\text{-}94)_2 \qquad x'^p = a^{p'}_q x^q + a^{p'}_0 x^0 \quad , \quad x^p = a^p_{q'} x'^q + a^p_{0'} x'^0$$

مما يعطينا:

$$(VI\text{-}95)_1 \qquad \frac{d\,x'^0}{d\,x^0} = \frac{dt'}{dt} = a^{0'}_p \frac{\nu^p}{c} + a^{0'}_0 \quad ,$$

$$\frac{d\,x^0}{d\,x'^0} = \frac{dt}{dt'} = a^0_{p'} \frac{\nu'^p}{c} + a^0_{0'}$$

$$(VI\text{-}95)_2 \qquad \frac{d\,x'^p}{d\,x^0} = a^p_{q'} \frac{\nu^q}{c} + a^p_{0'} \quad , \quad \frac{d\,x^p}{d\,x'^0} = a^p_{q'} \frac{\nu'^q}{c} + a^p_{0'}$$

فنجد إذا باستعمال (VI-92) و (VI-95) أن:

$$(VI\text{-}96) \qquad \frac{dt'}{dt} = a^{0'}_p \frac{\nu^p}{c} + a^{0'}_0 = \frac{1}{a^0_{p'} \frac{\nu'^p}{c} + a^0_{0'}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\nu^2}{c^2}}{1-\frac{\nu'^2}{c^2}}}$$

ومن جهة ثانية نستنتج من $(VI\text{-}95)_2$ أن:

$$(VI\text{-}97) \qquad \frac{\nu'^p}{c}\sqrt{\frac{1-\frac{\nu^2}{c^2}}{1-\frac{\nu'^2}{c^2}}} = a^{p'}_q \frac{\nu^q}{c} + a^{p'}_0 \quad ,$$

$$\frac{\nu^p}{c}\sqrt{\frac{1-\frac{\nu'^2}{c^2}}{1-\frac{\nu^2}{c^2}}} = a^p_{q'} \frac{\nu'^q}{c} + a^p_{0'} .$$

11 ـ تطبيق الحالة التي يكون فيها أحد الهياكل الإسنادية هيكلاً ذاتياً

أ ـ لنفترض الآن أن S' هو الهيكل الاسنادي الذاتي لجسيم نقطي مما يعني أن:

$$(VI\text{-}98) \qquad v^p_{(1)} = 0 \quad , \quad v_{(1)} = \omega$$

حيث ω هي سرعة S′ بالنسبة إلى S فنجد باستعمال (VI-96) أن:

$$a^0_{0'} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \quad a^{0'}_p \frac{\nu^p_{(1)}}{c} = -\frac{\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \text{(VI-99)}$$

ومنها نستخلص أن:

$$a^{0'}_p = \frac{-\nu^p_{(1)}}{c\sqrt{1-\beta^2}} = -u^p \qquad \text{(VI-100)}$$

وأيضاً استناداً إلى (VI-97) نجد

$$\frac{\nu^p_{(1)}}{c\sqrt{1-\beta^2}} = a^p_{0'} \qquad \text{(VI-101)}$$

$$a^{p'}_q \frac{\nu^q_{(1)}}{c} = -a^{p'}_0 . \qquad \text{(VI-102)}$$

ب ـ لنفترض الآن أن S هو الهيكل الاسنادي الذاتي للجسيم أي

$$V_{(2)} = 0 \ , \ v'_{(2)} = \omega' = -D^{-1}\omega = -D^{-1}v_{(1)} = -D^{-1}v \qquad \text{(VI-103)}$$

حيث ω′ هي سرعة الهيكل S بالنسبة إلى S′. فنجد إذاً انطلاقاً من (VI-96):

$$a^{0'}_0 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \qquad \text{(VI-104)}$$

$$a^0_{p'} = -\frac{\nu'^p_{(2)}}{c\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{D^{-1}\nu^p}{c\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\alpha^p_q\nu^q}{c\sqrt{1-\beta^2}} = \alpha^p_q u^q$$

وانطلاقاً من (VI-97):

$$a^{p'}_0 = \frac{\nu'^p_{(2)}}{c\sqrt{1-\beta^2}} = u'^p_{(2)} = -D^{-1}u^p = -\alpha^p_q u^q \qquad \text{(VI-105)}$$

$$a^p_{q'}\frac{\nu'^q}{c} = -a^p_{0'} \qquad \text{(VI-106)}$$

وإذا أحللنا قيمة $a^{p'}_{0}$ (VI-105) في المعادلة (VI-102) وأحللنـا قيمة $a^{p}_{0'}$ (VI-101) في المعادلة (VI-106) نجد:

$$a^{p'}_{q}\frac{\nu'^{1}}{c} = \alpha^{p}_{q}u^{q} \qquad \text{(VI-107)}$$

$$a^{p}_{q'}\frac{\nu'^{q}}{c} = -u^{p} \qquad \text{(VI-108)}$$

وحلول هذه المعادلات بالنسبة إلى $a^{p}_{q'}$ و $a^{p'}_{q}$ هي:

$$a^{p'}_{q} = \alpha^{p}_{q} + \frac{\alpha}{\nu^{2}}\;\alpha^{p}_{r}\,\nu^{r}\nu^{q} \qquad \text{(VI-109)}$$

$$a^{p}_{q'} = a^{p}_{q} + \frac{\alpha}{\nu^{2}}\;\alpha^{q}_{r}\nu^{r}\nu^{p} \qquad \text{(VI-110)}$$

للتأكد من ذلك نضع الصيغة (VI-109) في المعادلة (VI-107) فنجد:

$$a^{p'}_{q}\frac{\nu^{q}}{c} = a^{p}_{q}\frac{\nu^{q}}{c} + \frac{\alpha}{\nu^{2}}\;\alpha^{p}_{r}\,\nu^{r}\left(\frac{\nu^{2}}{c}\right) = (1+\alpha)\,\alpha^{p}_{q}\frac{\nu^{q}}{c} \qquad \text{(VI-111)}$$

$$= \frac{\alpha^{p}_{q}\,\nu^{q}}{c\sqrt{1-\beta^{2}}} = \alpha^{p}_{q}u^{q}$$

ونضع الصيغة (VI-110) في المعادلة (VI-108) فنجد:

$$a^{p}_{q'}\frac{\nu'^{q}}{c} = \sum_{q}\left(\alpha^{q}_{p}\frac{\nu'^{q}}{c} + \frac{\alpha}{\nu^{2}}\;\alpha^{q}_{r}\nu^{p}\nu^{r}\frac{\nu'^{q}}{c}\right) \qquad \text{(VI-112)}$$

$$= D^{-1}\frac{\nu'^{p}}{c} + \sum_{r}\frac{\alpha}{\nu^{2}}\;(D^{-1}\nu'^{r})\,\nu^{p}\frac{\nu^{r}}{c}$$

$$= -\frac{\nu p}{c} - \frac{\alpha}{\nu^{2}}\;\nu^{p}\left(\frac{\nu^{2}}{c}\right) = -\frac{\nu^{p}}{c}\;(1+\alpha)$$

$$= -\frac{\nu^{p}}{c\sqrt{1-\beta^{2}}} = -u^{p}$$

حيث:

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^{2}}} - 1 \qquad \text{(V - 75)}$$

فتكون المعادلات (VI-107) و (VI-108) صحيحة بالتطابق.

هكذا تكون لمعامِلات تحويل لورنتز العام القيم الواردة في المعادلة (VI-57) أي في المصفوفات (VI-59). وقد حصلنا سابقاً على هذه الصيغ باستعمال نتائج الفصل الخامس أي بتعميم التحويل الخاص حسب طريقة مولر. أما في هذا المقطع فقد حصلنا عليها (بالصيغ VI - 109 و VI - 110) بتطبيق قواعد التحويل في الحالة الخاصة التي يكون فيها الهيكلS (أو S′) هو الهيكل الاسنادي الذاتي. إن القواعد العامة لجمع السُّرع تقود حتماً إلى الحلول التي تدخل في التحويلات العامة للورنتز.

الحركيّات النسبية

أ ـ القانون النسبي لجمع السُّرَع

نستعمل دائماً في ما يلي الإحداثيات الحقيقية:

(VII-1) $$x^1 = x \ , \ x^2 = y \ , \ x^3 = z \ , \ x^0 = ct$$

ونحـدِّد نقط الفضاء الـرباعي الإقليـدي غير الأصيـل بـالنسبـة إلى أربعـة محـاور مستقيمة محدَّدة بأربع متجِهـات أحاديـة e_μ أي (e_1, e_2, e_3, e_0) متعامـدة ومنظمة حسب القاعدة:

(VII-2) $$g_{\mu\nu} = (e_\mu \cdot e_\nu) = \eta_{\mu\nu}$$

حيث:

(VII-3) $$\eta_{\mu\nu} = \begin{vmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{vmatrix}$$

فيكون الفاصل الأساسي الرباعي بالصيغة الأساسية:

(VII-4) $$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = (dx^0)^2 - \sum_p (dx^p)^2 \ ,$$

$(p = 1, 2, 3)$.

1) المتَّجِه الرباعي للسرعة

إن مركِّبات السرعة العادية لجسيم نقطي

$$\nu^p = \frac{dx^p}{dt} \qquad \text{(VII-5)}$$

لا تتحول مثل المركِّبات الفضائية لمتَّجه رباعي لأن dt ليست ثابتة في التحويل. لـذلك نستبدل السرعة (VII-5) بالمتَّجِه الرباعي ذي المركِّبات

$$\boxed{\bar{u}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad , \quad (\mu = 1, 2, 3, 0.)} \qquad \text{(VII-6)}$$

حيث $d\tau$ هو الزمن (الوقت) التفاضلي الذاتي للجسيم وهو ثابت في التحويل.

ونستعمل أيضاً المتَّجِه الرباعي المسمَّى السرعة الكونية universe velocity

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds} = \frac{\bar{u}^\mu}{c} \qquad \text{(VII-7)}$$

لأن:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 \qquad \text{(VII-8)}$$

استناداً إلى المعادلة (V - 58). ومن جهة ثانية فإن:

$$ds^2 = c^2dt^2 - \sum_p (dx^p)^2 \qquad \text{(VII-9)}$$

$$= c^2dt^2 \left[1 - \frac{1}{c^2} \sum_p \left(\frac{dx^p}{dt} \right)^2 \right] = c^2dt^2 (1 - \beta^2)$$

مما يعطي:

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \qquad \text{(VII-10)}$$

فإذا أحللنا هذه النتيجة في الصيغة (VII-7) نجد:

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds} = \frac{1}{c\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{dx^\mu}{dt} \qquad \text{(VII-11)}$$

فترتبط مركِّبات السرعة الكونية u^p و u^0 بمركِّبات السرعة العادية ν^p بالعلاقات:

$$u^p = \frac{\nu^p}{c\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{(VII-12)}_1$$

$$u^0 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{(VII-12)}_2$$

وتخضع لشروط التناظم:

$$u_\mu u^\mu = (u^0)^2 - \sum_p (u^p)^2 = \frac{1 - \sum_p \left(\frac{\nu^p}{c}\right)^2}{1-\beta^2} = 1 \quad \text{(VII-13)}$$

2) ـ قانون تحويل السرع

لنفترض أن سرعة جسيم هي v في هيكل الاسناد الغاليلي S. فتكون سرعته الكونية $u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}$ بالصيغ (VII-12) تبعاً لقيمة المركِّبات $\nu^p = \frac{dx^p}{dt}$ للسرعة العادية. فإذا انتقلنا إلى هيكل إسناد غاليلي S′ يتحرك بسرعة ω بالنسبة إلى S (مع $\beta = \frac{\omega}{c}$) تتحوّل الكميات u^μ مثل مركِّبات متَّجِه رباعي أي:

$$u'^\mu = a^{\mu'}_{\nu}\, u^\nu = a^{\mu'}_{q}\, u^q + \alpha^{\mu'}_{0}\, u^0 \qquad \begin{pmatrix} \mu, \nu = 1, 2, 3, 0 \\ p, q = 1, 2, 3 \end{pmatrix} \quad \text{(VII-14)}$$

وعكس ذلك:

$$u^\mu = a^\mu_\nu\, u'^\nu = a^{\mu}_{q'}\, u'^q + a^{\mu}_{0'}\, u'^0 \quad \text{(VII-15)}$$

فنجد إذاً للمركِّبات الفضائية $\mu = p = 1, 2, 3$ ثم للمركِّبة الرابعة $\mu = 0$ مستعملين الصيغة (VII-12) ما يلي:

$$\frac{\nu'^p}{c\sqrt{1-\frac{\nu'^2}{c^2}}} = a^{p'}_{q}\frac{\nu^q}{c\sqrt{1-\frac{\nu^2}{c^2}}} + a^{p'}_{0}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\nu^2}{c^2}}} \quad \text{(VII-16)}_1$$

$$\frac{1}{c\sqrt{1-\frac{\nu'^2}{c^2}}} = a^{0'}_{q}\frac{\nu^q}{c\sqrt{1-\frac{\nu^2}{c^2}}} + a^{0'}_{0}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\nu^2}{c^2}}} \quad \text{(VII-16)}_2$$

والعلاقة العكسية استناداً إلى (VII-15) تكون:

$$\frac{\nu^p}{c\sqrt{1-\frac{\nu^2}{c^2}}} = a^p_{q'} \frac{\nu'^q}{c\sqrt{1-\frac{\nu'^2}{c^2}}} + a^p_{0'} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\nu'^2}{c^2}}} \qquad \text{(VII-17)}_1$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\nu^2}{c^2}}} = a^0_{q'} \frac{\nu'^q}{c\sqrt{1-\frac{\nu'^2}{c^2}}} + a^0_{0'} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\nu'^2}{c^2}}} \qquad \text{(VII-17)}_2$$

ومن قواعد التحويل (VII-16)_2 و (VII-17)_2 نستخلص مباشرة[1]:

$$a_q^{0'} \frac{\nu^q}{c} + a_0^{0'} = \frac{1}{a^0_{q'} \frac{\nu'^q}{c} + a^0_{0'}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\nu^2}{c^2}}{1-\frac{\nu'^2}{c^2}}} \qquad \text{(VII-18)}$$

فإذا استعملنا هـذه النتيجة نستطيـع كتابـة (VII-16)_1 و (VII-17)_1 من جديـد بالصيغ:

$$\frac{\nu'^p}{c} = \frac{a_q^{p'} \frac{\nu^q}{c} + a_0^{p'}}{a_r^{0'} \frac{\nu^r}{c} + a_0^{0'}} \qquad \text{(VII-19)}$$

$$\frac{\nu^p}{c} = \frac{a^p_{q'} \frac{\nu'^q}{c} + a^p_{0'}}{a^0_{r'} \frac{\nu'^r}{c} + a^0_{0'}} \qquad \text{(VII-20)}$$

3) تحويل لورنتز والقاعدة العامة لجمع السرع

لقد حصلنا بتطبيق تحويل لورنتز للمتّجه الرباعي u^μ على العلاقة بـين السرعة v لجسيم في الهيكل الإسنادي S وسرعته v' في الهيكل الاسنادي S' بالصيغ التالية:

---

(1) لقد حصلنا على هذه العلاقة في الفصل السادس بحساب مشتقة علاقة لورنتز:

$$\frac{dt'}{dt} = a_p^{0'} \frac{\nu^p}{c} + a_0^{0'} = \frac{1}{a^0_{p'} \frac{\nu'^p}{c} + a^0_{0'}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\nu^2}{c^2}}{1-\frac{\nu'^2}{c^2}}}$$

(VII-21) $$v' = \varphi (v, a_{\mu}^{\nu'})$$

(VII-22) $$v = \varphi (v', a_{\mu'}^{\nu})$$

حيث المعامِلات $a_{\mu}^{\nu'}$ و $a_{\mu'}^{\nu}$ تحدِّد التحويل من S إلى S′ وبالعكس. وفي الحالة الخاصة التي يكون فيها أحد الهيكلين S و S′ هو الهيكل الاسنادي الذاتي S_0 للجسيم، تحدِّد هذه المعاملات التحويل من S إلى S_0 ومن S′ إلى S_0.

ـ فنجد إذا أخذنا $S' \equiv S_0$:

$$v'_{(1)} = 0 \quad , \quad v_{(1)} = \omega$$

ـ وإذا أخذنا $S \equiv S_0$:

$$v_{(2)} = 0 \quad , \quad v'_2 = \omega' = -D^{-1}\,\omega$$

من الممكن إذاً تحديد المعامِلات $a_{\mu'}^{\nu}$ و $a_{\mu}^{\nu'}$ تبعاً للسرعة ω لهيكل بالنسبة إلى الآخر وذلك بالنظر إلى الحالات الخاصة للمعادلات (VII-21) و (VII-22) بطريقة مناسبة. وهذا ما قمنا به في الفصل السادس حيث وجدنا

(VII-23) $$a_{\mu}^{\nu'} = f_{(S' \equiv S_0)}(v_{(1)}, v'_{(1)} = f'_0 (v = \omega\ , v'_{(1)} = 0)$$

(VII-24) $$a_{\mu'}^{\nu} = f_{(S \equiv S_0)}(v_{(2)}, v'_2 = f_0 (v'_3 = -D^{-1}\omega, v_2 = 0)$$

وهذه القيم (VI - 101) و (VI - 110) لمعاملات تحويل لورنتز العام.

فإذا أحللنا قيم هذه المعامِلات في الصيغ (VII-21) و (VII-22) نجد:

(VII-25) $$v' = \varphi (v, f'_0 (w))$$

(VII-26) $$v = \varphi (v', f_0 (- D^{-1}w)).$$

لنحقق عملياً الصيغة الأخيرة بإحلال القيم في الصيغتين (VI - 59) و (VI - 60) لمعاملات التحويل في المعادلات (VII-19) و (VII-20) فنجد[2]:

---

(2) في كل قواعد جمع السرع سنحتفظ بـ ω كرمز لسرعة الهيكل الاسنادي S′ بالنسبة إلى الهيكل الاسنادي S مع $\left(\beta = \frac{\omega}{c}\right)$، وذلك لتحاشي أي التباس مع السرع ν و ν' التي ترمز إلى سرعة الجسيم في الهياكل S و S′.

$$\frac{\nu'^p}{c} = \frac{a^p_r \gamma^r_q \frac{\nu^q}{c} - \alpha^p_r u^r}{-\sum_m u^m \frac{\nu^m}{c} + u^0} \tag{VII-27}$$

$$\frac{\nu^p}{c} = \frac{\sum_q \alpha^q_r \gamma^r_p \frac{\nu'^q}{c} + u^p}{\sum_m a^m_s u^s \frac{\nu'^m}{c} + u^0} \tag{VII-28}$$

حيث[3]:

$$\gamma^r_p = \delta^r_p + \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta^2}\left(1-\sqrt{1-\beta^2}\right) u^r u^p \tag{VII-29}$$

$$= \delta^r_p + \frac{\left(1-\sqrt{1-\beta^2}\right) w^r w^p}{\nu'^2 \sqrt{1-\beta^2}}$$

1 ـ فإذا كان تحويل لورنتز بدون دوران، نقوم بإحلال القيم (VI - 62) و (VI - 63) لمعاملات التحويل في الصيغ (VII-28) و (VII-27) فنجد:

$$\frac{\nu'^p}{c} = \frac{\left(\gamma^p_q \frac{\nu^q}{c} - u^p\right)\sqrt{1-\beta^2}}{1-\sum_m \frac{\nu^m \omega^m}{c^2}} \tag{VII-30}$$

$$= \frac{\frac{\nu^p}{c}\sqrt{1-\beta^2} + \frac{\omega^p}{c}\left[\sum_q \frac{\omega^q \nu^q}{\omega^2}\left(1-\sqrt{1-\beta^2}\right) - 1\right]}{1-\sum_n \frac{\nu^m \omega^m}{c^2}}$$

$$\frac{\nu^p}{c} = \frac{\left(\sum_q \gamma^q_p \frac{\nu'^q}{c} + u^p\right)\sqrt{1-\beta^2}}{1+\sum_m \frac{\nu'^m \omega^m}{c^2}} \tag{VII-31}$$

$$= \frac{\frac{\nu'^p}{c}\sqrt{1-\beta^2} + \frac{\omega^p}{c}\left[\sum_q \frac{\omega^q \nu'^q}{\omega^2}\left(1-\sqrt{1-\beta^2}\right) + 1\right]}{1+\sum_m \frac{\nu'^m \omega^m}{c^2}}$$

---

(3) نذكر بأن: $\left(\beta = \frac{\omega}{c}\right)$, $u^0 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, $u^p = \frac{\omega^p}{c\sqrt{1-\beta^2}}$

ويمكن أن نكتب أيضاً هذه الصيغ باستعمل المتّجهات الثلاثة v و v′ و W:

$$\text{(VII-32)} \qquad v' = \frac{v\sqrt{1-\beta^2} + W\left[\dfrac{V.W}{\omega^2}\left(1-\sqrt{1-\beta^2}\right)-1\right]}{1-\dfrac{V\,W}{c^2}}$$

$$\text{(VII-33)} \qquad v = \frac{v'\sqrt{1-\beta^2} + W\left[\left(\dfrac{V'.W}{\omega^2}\right)\left(1-\sqrt{1-\beta^2}\right)+1\right]}{1+\dfrac{V'.W}{\omega^2}}$$

2 ـ أخيراً في الحالة الخاصة التي تكون فيها السرعة النسبيَّة للهياكل الاسنادية باتجاه المحور (ox) وتكون محاور الهياكل متوازية يجب إحلال قيم a^{ν}_{μ} و $a^{\nu'}_{\mu}$ المتعلقة بتحويل لورنتز الخاص في المعادلات (19 - VII) و (20 - VII). فنجد إذا أخذنا بعين الاعتبار قيم الصيغة (66 - VI).

$$\text{(VII - 34)} \qquad \nu'_x = \frac{\nu_x - \omega}{1-\dfrac{\beta}{c}\,\nu_x}\ ,\ \nu'_y = \frac{\nu_y\sqrt{1-\beta^2}}{1-\dfrac{\beta}{c}\,v'_x}\ ,$$

$$\nu'_z = \frac{\nu_z\sqrt{1-\beta^2}}{1-\dfrac{\beta}{c}\,\nu'_x}\ ,\quad \left(\beta = \frac{\omega}{c}\right)$$

أو العلاقات العكسية:

$$\text{(VII - 35)} \qquad \nu_x = \frac{\nu'_x + \omega}{1+\dfrac{\beta}{c}\,\nu'_x}\ ,\ \nu_y = \frac{\nu'_y\sqrt{1-\beta^2}}{1+\dfrac{\beta}{c}\,\nu'_x}\ ,\ \nu_z = \frac{\nu'_z\sqrt{1-\beta^2}}{1+\dfrac{\beta}{c}\,\nu'_x}$$

ونحصل أيضاً مباشرة على هذه القواعد انطلاقاً من القواعد[(4)] (32 - VII) و (33 - VII) بوضع:

---

(4) يمكن أن نستخلص مباشرة قواعد جمع السُرع في حالة تحويل لورنتز الخاص، أو يمكن أن نستخلص من التحويل:

$$x' = \frac{x - \omega t}{\sqrt{1-\beta^2}}\ ,\ y' = y\ ,\ z' = z\ ,\ t' = \frac{t - \dfrac{\beta}{c}\,x}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \left(\beta = \frac{\omega}{c}\right)$$

=

$$W = \omega_x \quad , \quad \omega_y = \omega_z = 0 \tag{VII - 36}$$

4) قيمة واتجاه السرعة

أ ـ لنرجع إلى الصيغ $_1$(VI - 59) و $_2$(VI - 59) التي تحدِّد قيمة معاملات التحويل $a_q^{0'}$ و a_q^0 و $a_0^{0'}$ و $a_{0'}^0$. فإذا أحللنا هذه القيم في المعادلة (VII - 18) نجد:

$$-\sum_q \frac{\mu^q \nu^q}{c} + u^0 = \frac{1}{\sum_q \alpha^q_r u^r \frac{\nu'^q}{c} + u^0} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\nu^2}{c^2}}{1 - \frac{\nu'^2}{c^2}}} \tag{VII - 37}$$

لنحصر اهتمامنا الآن بالتحويلات دون دوران، فنكتب المعادلة (VII - 37) كما يلي:

$$\frac{1 - \frac{V.W}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \frac{V'.W}{c^2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\nu^2}{c^2}}{1 - \frac{\nu'^2}{c^2}}} \tag{VII - 38}$$

لنربِّع هذه العلاقات ولنضرب الجانب الأيمن للمعادلة بالجانب الأيسر فنجد:

= أن:

$$dt' = \frac{dt - \frac{\beta}{c}\, dx}{\sqrt{1 - \beta^2}} \qquad \text{أي:} \qquad \frac{dt'}{dt} = \frac{1 - \frac{\beta}{c}\, \nu_x}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

مما يعطي:

$$\nu'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'}{dt}\,\frac{dt}{dt'} = \left(\frac{\nu_x - \omega}{\sqrt{1 - \beta^2}}\right) \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \frac{\beta}{c}\, \nu_x}$$

$$\nu'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy'}{dt}\,\frac{dt}{dt'} = v_y \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \frac{\beta}{c}\, \nu_x},$$

$$\nu'_z = \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz'}{dt}\,\frac{dt}{dt'} = \frac{\nu_z \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \frac{\beta}{c}\, \nu_x},$$

$$\text{(VII - 39)}\qquad \frac{1+\dfrac{V'.W}{c^2}}{1-\dfrac{V.W}{c^2}} = \frac{1-\dfrac{\nu'^2}{c^2}}{1-\dfrac{\nu^2}{c^2}} = \frac{1-\beta^2}{\left(1-\dfrac{V.W}{c^2}\right)^2}$$

$$= \frac{\left(1+\dfrac{V'.W}{c^2}\right)^2}{1-\beta^2}$$

ونستخلص العلاقة التالية:

$$\text{(VII - 40)}_1\qquad \nu^2 = c^2\left[1 - \frac{\left(1-\dfrac{\nu'^2}{c^2}\right)\left(1-\beta^2\right)}{\left(1+\dfrac{V'.W}{c^2}\right)^2}\right]$$

والعلاقة العكسية:

$$\text{(VII - 40)}_2\qquad \nu'^2 = c^2\left[1 - \frac{\left(1-\dfrac{\nu^2}{c^2}\right)\left(1-\beta^2\right)}{\left(1-\dfrac{V.W}{c^2}\right)^2}\right]$$

كما يمكن أن نستخلص هذه العلاقات أيضاً من الصيغ (VII - 32) و (VII - 33).

ولتكن θ زاوية v مع ox و θ' زاوية v' مع ox' ولندرس التحويل الخاص الذي تكون فيه المحار ox و ox' متوازية مع السرعة w. وتحدَّد θ' بالعلاقات:

$$\text{(VII - 41)}\qquad \operatorname{tg}\theta' = \frac{\sqrt{\nu_y'^2+\nu_z'^2}}{\nu_x'}$$

$$\text{(VII - 42)}\qquad \sin\theta' = \frac{\sqrt{\nu_y'^2+\nu_z'^2}}{\nu'}\ ,\qquad \cos\theta' = \frac{\nu_x'}{\nu'}\ .$$

فنجد هكذا:

$$\text{(VII - 43)}\qquad \nu^2 = \frac{\nu'^2+\omega^2+2\nu'\omega\cos\theta' - \left(\dfrac{\nu'\omega}{c}\cdot\sin\theta'\right)^2}{\left(1+\dfrac{\nu'\omega}{c^2}\cos\theta'\right)^2}$$

$$\nu'^2 = \frac{\nu^2 + \omega^2 + 2\nu\omega\cos\theta - \left(\frac{\nu.\omega}{c}\sin\theta\right)^2}{\left(1 - \frac{\nu.\omega}{c^2}\cos\theta\right)^2} \qquad \text{(VII - 44)}$$

ب ـ لنحصر إهتمامنا بالتحويل الخاص ولنختر المحاور بحيث تكون السرعة v' في السطح xoy ($\nu'_z = 0$) فنجد أيضاً $\nu_z = 0$ باستعمال (VII - 35)، مما يعني أن السرعة v هي أيضاً في السطح xoy. وإذا كانت θ و θ′ زوايا السرع v و v′ مع ox يمكن أن نكتب العلاقات (VII - 41) و (VII - 42) بعد استعمال التحويل في الصيغة (VII - 34) كما يلي:

$$\operatorname{tg}\theta' = \frac{\nu'_y}{\nu'_x} = \frac{\nu_y\sqrt{1-\beta^2}}{\nu_x - \omega} = \frac{\nu\sqrt{1-\beta^2}\sin\theta}{\nu\cos\theta - \omega} \qquad \text{(VII - 45)}$$

$$\nu'\sin\theta' = \nu'_y = \frac{\nu_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{\beta}{c}\nu_x}, \quad \nu'\cos\theta' = \frac{\nu_x - \omega}{1 - \frac{\beta}{c}\nu_x} \qquad \text{(VII - 46)}$$

ونستخلص من المعادلة (VII - 45) أن:

$$\operatorname{tg}\theta' = \frac{\sqrt{1-\beta^2}\sin\theta}{\cos\theta - \frac{\omega}{\nu}} \qquad \text{(VII - 47)}$$

وهذه العلاقة تقود بدورها إلى:

$$\sin\theta' = \frac{\sqrt{1-\beta^2}\sin\theta}{\left((1 + \frac{\omega^2}{\nu^2} - \frac{2\omega}{\nu}\cos\theta - \beta^2\sin^2\theta\right)^{\frac{1}{2}}} \qquad \text{(VII - 48)}$$

$$\cos\theta' = \frac{\cos\theta - \frac{\omega}{\nu}}{\left(1 + \frac{\omega^2}{\nu^2} - \frac{2\omega}{\nu}\cos\theta - \beta^2\sin^2\theta\right)^{\frac{1}{2}}}$$

ومن جهة ثانية إذا حسبنا مربَّع جانبيّ المعادلتين (VII - 46) وجمعناهما نجد:

$$\nu'^2 = \frac{\nu_y^2(1-\beta^2) + (\nu_x - \omega)^2}{\left(1 - \frac{\beta}{c}\nu_x\right)^2} \qquad \text{(VII - 49)}$$

أيّ:

$$\nu' = \nu \frac{\left[1 + \frac{\omega^2}{\nu^2} - \frac{2\omega}{\nu}\cos\theta - \beta^2\sin^2\theta\right]^{\frac{1}{2}}}{1 - \frac{\beta\nu}{c}\cos\theta} \qquad \text{(VII - 50)}$$

كما يمكن أن نكتب هذه العلاقة الأخيرة بالصيغة:

$$\nu' = \nu \frac{\left[\left(\frac{\beta c}{\nu} - \cos\theta\right)^2 - (1 - \beta^2)\sin^2\theta\right]^{\frac{1}{2}}}{1 - \frac{\beta\nu}{c}\cos\theta} \qquad \text{(VII - 51)}$$

أما العلاقة العكسيّة التي تحدِّد السرعة ν تبعاً للسرعة ν' الزاويَّة θ' فهي:

$$\nu = \nu' \frac{\left[1 + \frac{\omega^2}{\nu'^2} + \frac{2\omega}{\nu'}\cos\theta' - \beta^2\sin^2\theta'\right]^{\frac{1}{2}}}{1 + \frac{\beta\nu'}{c}\cos\theta'} \qquad \text{(VII - 52)}$$

5) السرعة القصوى

نستنتج من قانون جمع السرع أن سرعة الضوء في الفراغ c هي السرعة القصوى. ويعني ذلك أن نتيجة جمع سرعتين أصغر من c هي أصغر من c. ويمكن إثبات ذلك من العلاقة (VII - 40) التي تعطي $\nu < c$ إذا كانت $\nu' < c$ و $\omega < c$. أما إذا جمعنا سرعتين إحداهما على الأقل تساوي c فإن النتيجة تكون c.

نشير إلى أن وجود السرعة القصوى c لا يتحتم إلّا إذا كان تحويل لورنتز للسرعة صالحاً، أيّ أن يكون للسرعة معنى حسب التحديد العادي وأن تكون مبادىء النسبية معمولاً بها.

أ ـ يكون ذلك في حالة حركة أجسام مادية أو بشكل عام عند انتشار مختلف أنواع الطاقة. ولا ينطبق هذا مثلاً على سرعة الطور phase velocity للموجات الكهرمغنطيسية التي يمكن أن تفوق c[5]. أما سرعة المجموعة التي هي أيضاً سرعة

(5) سرعة الطور phase velocity u التي تدخل في معادلة الانتشار $\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$ هي كميات متجانسة مع السرعة ولكنها لا تحدد بصيغة مشابهة لـ (VII-5).

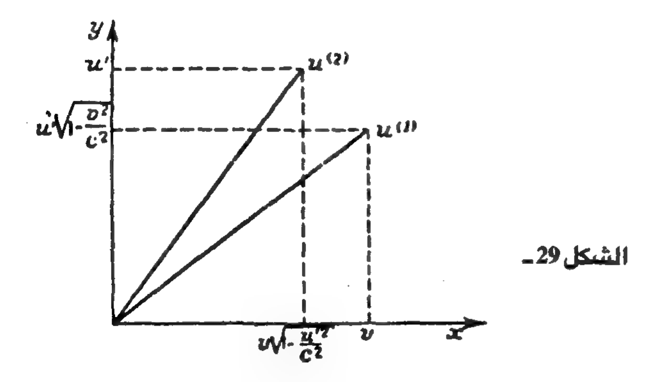
انتقال الطاقة فهي دائماً أقل من c[6] (أنظر المقطع 10 من هذا الفصل).

ب ـ يجب أن يكون الهيكل الاسنادي غاليلياً حقاً. وهذا لا ينطبق مثلاً على حركة مجرة في هيكل إسناد مجرّة أخرى. فإن وصف هذه الحركة يصطدم بصعوبات كبيرة في ما يتعلق بمفهوم المسافة[7] والوقت الكوني المطلقين. فالسرع النسبية لمجرتين تتناسب مع المسافة الفاصلة بينهما (قانون هوبل Huble) واستناداً للتحديدات المستعملة يمكن أن تفوق هذه السُرع سرعة الضوء c.

فإذا تمسكنا بمبادىء وتحديدات النسبية الخاصة تكون السرعة دائماً متّجهاً رباعياً زمانياً ولا يمكن أن تتعدى قيمتها سرعة الضوء c.

6) التباين في أدوار السرعة النسبية وسرعة الانسحاب

إذا بادلنا أدوار السرعة النسبية V′ وسرعة الانسحاب W دون تغيير قيمتهما أو اتجاههما تتغير قيمة السرعة الإجمالية V.



الشكل 29 ـ

للتبسيط نفترض أن V′ هي باتجاه oy ($\nu'_y = V', \nu'_x = \nu'_z = 0$) وأن W هي باتجاه ox فنجد استناداً إلى الصيغة (VII - 35) أن:

$$\text{(VII - 53)} \qquad \nu_x^{(1)} = \omega \quad , \quad \nu_y^{(1)} = \nu' \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\nu^2}}$$

(6) Cf. SOMMERFELD. Phys. Zeit, 8, 1907, 841, 33, p.413; Ann. Phys., 44, 1914, 177. - L. BRILLOUIN, Ann, Phys., 44, 1914, 303; Comptes Rendus du Congrés International de l'Electricité, II, 1932, 753.

(7) Cf. G.C. MAC VITTIE, General Relativity and Cosmology (N.-Y.1956), pp.147 à 153.

أما إذا كانت V' هي الآن سرعة الانسحاب للهيكل الاسنادي S' بالنسبة إلى S (وهي دائماً باتجاه oy) و W هي السرعة النسبية للجسم في الهيكل الاسنادي S' (دائماً باتجاه ox) يجب أن نبدل في الصيغ (VII - 53) السرع ν' و ω والمحاور ox و oy فنجد:

$$\nu_y^{(2)} = \nu' \quad , \quad \nu_x^{(2)} = \omega \sqrt{1 - \frac{\nu'^2}{c^2}} \tag{VII - 54}$$

فتكون قيمة السرعة الإجمالية ذاتها في الحالتين:

$$\nu^2 = \nu'^2 + \omega^2 - \frac{\nu'^2\omega^2}{c^2} \tag{VII - 55}$$

أما اتجاهها فيتغير إذا لم تكن السرع V' و W باتجاه واحد.

7) الحالة الخاصة لجمع السرع المتوازية

إذا كانت السرعة النسبيّة V' في S' متوازية مع سرعة الانسحاب تصبح الصيغ (VII - 35) أبسط. في هذه الحالة تكون:

$$\nu'_y = \nu'_z = 0 \quad , \quad \nu'_z = \nu' \tag{VII - 56}$$

فتعطي العلاقات (VII - 35)

$$\nu = \frac{\nu' + \omega}{1 + \frac{\nu'\omega}{c^2}} \tag{VII -57}$$

وإذا وضعنا كما في المعادلة (V - 66):

$$tg\psi = i\,\frac{\nu}{c} \quad , \quad tg\psi_1 = \frac{i\omega}{c} \quad , \quad tg\psi_2 = \frac{i\nu'}{c} \tag{VII - 58}$$

تكتب المعادلة (VII - 57) كما يلي:

$$tg\psi = \frac{tg\psi_1 + tg\psi_2}{1 - tg\psi_1\, tg\psi_2} = tg(\psi_1 + \psi_2) \tag{VII - 59}$$

لنفترض الآن أن $\beta = \frac{\omega}{c}$ و $\beta' = \frac{\nu'}{c}$ صغيرتان بالمقارنة مع 1، فتصبح السرعة الاجمالية

$$\nu \simeq (\omega + \nu')\,(1 - \beta\beta') \tag{VII - 60}$$

ولا تختلف عن الصيغة الكلاسيكية إلّا بالحد $\beta\beta'$.

وبشكل خاص إذا وضعنا $\nu' = \frac{c}{n}$ (مع $n > 1$) نجد استناداً إلى المعادلة (VII - 60) الصيغة التقريبية:

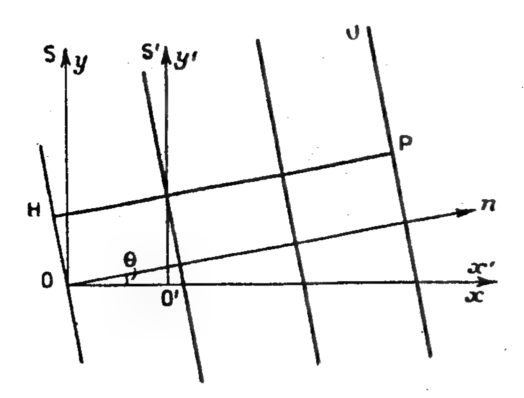
$$\nu \simeq \left(\omega + \frac{c}{n} \right)\left(1 - \frac{\omega}{n\,c} \right) \simeq \frac{c}{n} + \omega\left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \qquad \text{(VII - 61)}$$

حيث أهملنا الكميّات المتناسبة مع $\frac{1}{c^2}$. هذه هي صيغة فيزو التي أثبتناها هنا باستعمال قانون جمع السرع للفوتونات المتحركة بسرعة $\frac{c}{n}$ حيث ترمز n إلى قرينة انكسار الجسم.

ب ـ انتشار الموجات والحركيات النسبية

8) انتشار موجة مستوية في أجسام كاسرة للضوء متحركة بسرعة ثابتة الواحدة بالنسبة إلى الأخرى

لنفترض أن موجة مستوية تنتشر في جسم قرينة انكساره n. نختار محاور الإحداثيات بحيث يكون السطح xOy عمودياً على صدور الموجة المستوية. سرعة صدر الموجة أي سرعة الطور[8] هي u في الهيكل الاسنادي S و u′ في الهيكل S′. لنفترض أن الهيكل S′ يتحرك بسرعة ω بالنسبة إلى S باتجاه المحور Ox وان الهيكلين الاسناديين يتطابقان في الوقت t = 0.



الشكل 30 ـ انتشار موجة مستوية في الهياكل الاسنادية الغاليلية S و S′

إن صدر الموجة الذي يمر في أصل المحاور O في الوقت t = 0 يصل إلى النقطة P في الوقت (الزمن)

$$t_0 = \frac{PH}{u} = \frac{x\cos\theta + y\sin\theta}{u} \qquad \text{(VII-62)}$$

(8) نرمز إلى سرعة الطور بالحرف u و u′ كما في الفصل الثالث. ومن السهل أن نميِّز بين سرعة الطور u والمتّجه الرباعي u الذي لا يظهر عملياً إلّا بمركباته $u^{\mu} = dx^{\mu}/ds$.

كما يقاس في الهيكل الاسنادي S. فيكون عدد الموجات التي يتلقاها المشاهد في P حتى الوقت t مساوياً لـ :

$$\nu(t - t_0) = \nu\left(t - \frac{x\cos\theta + y\sin\theta}{u}\right) \qquad \text{(VII-63)}$$

وهذا العدد لا يتغيَّر من هيكل إسناد غاليلي إلى آخر. فإذا استعملنا الهيكل الاسنادي S' تكون إحداثيات النقطة P x' و y' ويصبح الوقت t'. مما يعطينا علاقة المطابقة:

$$\nu'(t' - t'_0) = \nu(t - t_0) \qquad \text{(VII-64)}$$

أي:

$$\nu\left(t - \frac{x\cos\theta + y\sin\theta}{u}\right) = \nu'\left(t' - \frac{x'\cos\theta' + y'\sin\theta'}{u'}\right) \qquad \text{(VII-65)}$$

فإذا استعملنا قانون تحويل لورنتز يمكن أن نستبدل x و y و t بقيمها بالنسبة إلى x' و y' و t':

$$x = \frac{x' + \omega t'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad y = y', \quad t = \frac{t' + \frac{\beta}{c}x'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \left(\beta = \frac{\omega}{c}\right) \qquad \text{(VII-66)}$$

في المعادلة التطابقية فتكون معامل x' و y' و t' متساوية في جانبي هذه المعادلة، لأن مساواة عدد الموجات في الهيكلين الاسناديين صحيح في أي نقطة P وفي أيّ وقت t. فنجد العلاقات التالية:

$$\frac{\nu}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{\omega\nu\cos\theta}{u\sqrt{1-\beta^2}} = \nu'. \qquad \text{(VII-67)}$$

$$\frac{\beta\nu}{c\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{\nu\cos\theta}{u\sqrt{1-\beta^2}} = -\frac{\nu'\cos\theta'}{u'} \qquad \text{(VII-68)}$$

$$\frac{\nu\sin\theta}{u} = \frac{\nu'\sin\theta'}{u'} \qquad \text{(VII-69)}$$

ونستخلص منها قانون تحويل اتجاه الموجة:

$$\operatorname{tg}\theta' = \frac{\sqrt{1-\beta^2}\sin\theta}{\cos\theta - \frac{\beta u}{c}} \qquad \text{(VII-70)}$$

أي

$$\text{(VII-71)} \qquad \sin\theta' = \frac{\sqrt{1-\beta^2}\,\sin\theta}{\sqrt{\left(\frac{\beta u}{c} - \cos\theta\right)^2 + (1-\beta^2)\sin^2\theta}}$$

$$\text{(VII-72)} \qquad \cos\theta' = \frac{\cos\theta - \frac{\beta u}{c}}{\sqrt{\left(\frac{\beta u}{c} - \cos\theta\right)^2 + (1-\beta^2)\sin^2\theta}}$$

ومن جهة أخرى نستخلص قانون تحويل سرعة الطور

$$\text{(VII-73)} \qquad u' = \frac{u - \beta c\cos\theta}{\sqrt{\left(\frac{\beta u}{c} - \cos\theta\right)^2 + (1-\beta^2)\sin^2\theta}}$$

سنرى في الفصل العاشر أن هذه العلاقات تعبر عن قانون ظاهرة دوبلر النسبية وعن ظواهر الزيغ.

ونشير هنا إلى أن العلاقات (VII-70) و (VII-73) هي ذاتها قوانين تحويل السرعة V لجسيم نقطي كما في الصيغ (VII-47) و (VII-51) شرط أن نضع:

$$\text{(VII-74)} \qquad \frac{u}{c^2} = \frac{1}{\nu}$$

هكذا يستخلص قانون تحويل سرعة الطور u من قانون تحويل السرعة $\nu = \frac{c^2}{u}$ للجسيم المقترن بهذه الموجة[9]. أما في الحالة الخاصة $\nu = c$ فتكون سرعة الطور للموجة المقترنة:

$$\text{(VII-75)} \qquad u = \frac{c^2}{\nu} = c$$

أي سرعة الجسيم ذاته.

---

(9) هذه الخاصة تعطي اقتران الموجة بالجسيم صيغة نسبية. لكل جسيم يتحرك بسرعة ν موجة مقترنة، سرعة الطور فيها $u = \frac{c^2}{\nu}$ أي بطول موجة:

$$\lambda = \frac{u}{\nu} = \frac{c^2}{\nu}\,\frac{h}{W} = \frac{h}{m\nu}$$

إذا كانت طاقة الموجة $W = h\nu = mc^2$ (انظر الفصل الثامن).

9) مبدأ هيغنز والنسبية الخاصة[10]

لنفترض الآن أن موجة كروية مركزها أصل المحاور O' في الهيكل الاسنادي S' تنتشر في وسط لـه قرينـة انكسار n سـاكن في الهيكل S'، وسرعـة انتشـار المـوجـة الضوئية في هذا الوسط أي في الهكيل الاسنادي S' هي V' وهي أيضاً سرعة الطـور في هذا الهيكل:

$$V' = u' = \frac{c}{n} \qquad \text{(VII-76)}$$

تشكل هذه الموجة في الوقت t' كرة شعاعها $r' = u't'$ في الهيكل الاسنادي S' أي أن إحداثيات نقطها تخضع للمعادلة:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - u'^2\, t'^2 = 0 \qquad \text{(VII-77)}$$

لندرس هذه الموجة في الهيكل الاسنادي S المطابق للهيكل S' في الـزمن الابتدائي $t = 0$ والـذي يتحرك بسرعـة W بالنسبـة إلى S'. نختار المحـاور بحيث تكون W في اتجـاه Ox' فترتبط إحـداثيـات النقطـة P (x', y', z', t') في الهيكـل الاسنـادي S' بإحداثياتها (x, y, z, t) في الهيكل الاسنادي S بالعلاقـات (VII-66) وتكون معـادلة صدر الموجة في الوقت t.

$$\frac{(x - at)^2}{b} + y^2 + z^2 - bu'^2\, t^2 = 0 \qquad \text{(VII-78)}$$

حيث وضعنا:

$$a = \omega \frac{1 - \dfrac{u'^2}{c^2}}{1 - \dfrac{\beta^2 u'^2}{c^2}} \qquad b = \frac{1 - \beta^2}{1 - \dfrac{\beta^2 u'^2}{c^2}} \qquad \left(\beta = \frac{\omega}{c}\right) \qquad \text{(VII-79)}$$

نحصـل على المعـادلة (VII-78) بـاستبدال (x', y', z', t') بقيمهـا وفق الصيغـة (VII-66) تبعـاً لـ (x, y, z, t) في المعـادلـة (VII-77)، وتمثـل المعـادلـة (VII-78) مجسَّماً إهليلجي الشكل في الحالة $n > 1$ (أو $u' < c$). إذ إن في هذه الحالة

$$0 < a < c \quad , \quad 0 < b < 1. \qquad \text{(VII-80)}$$

لنتفحص الآن إنتشار مويجة صادرة عن النقطة $P'_0\, (x'_0, y'_0, 0)$ من صدر المـوجة في

---

(10) نستعمل هنا طريقة مولر C.Moller المرجع (16) الصفحة 58.

الوقت t'_0. في الوقت $t'_0 + \Delta t'$ تشكل هذه المـويجة كـرة صغيرة في الهيكـل الاسنادي S'. تقاطع هذه الكرة مع السطح xoy هو دائرة معادلتها هي:

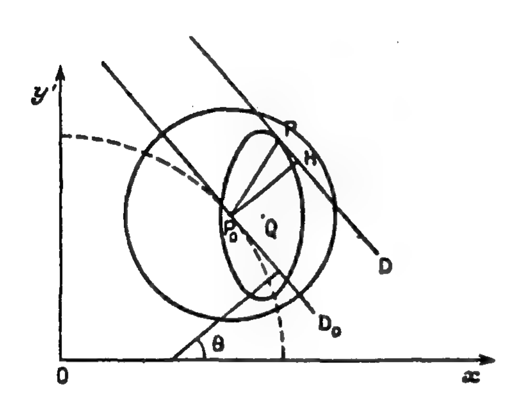
$$(x' - x'_0)^2 + (y' - y'_0)^2 - u'^2\, \Delta t'^2 = 0. \qquad \text{(VII-81)}$$

ومركزها هو في النقطة $(x'_0\, y'_0)$ التي تصدر منها المويجة.

أما في الهيكل الاسنادي S فيكون تقاطع السطح xoy مع المـويجة الصـادرة عن النقطة ذاتها $P_0(x_0y_0)$ قِطْعاً إهليلجيًّا معادلته (استناداً إلى (VII-78))

$$f(x, y) \equiv \frac{(x - x_0 - a\Delta t)^2}{b} + (y - y_0)^2 - bu'^2\, \Delta t^2 = 0. \qquad \text{(VII-82)}$$

فيكون نصف طول المحـاور لهذا القطع الاهليلجي $bu'\Delta t$ للمحور الصغير باتجاه Ox و $\sqrt{b}\; u'\Delta t$ للمحور الكبير بـاتجاه Oy. ممـا يـعنـي أن هـذه المـويجـات الإهليلجية أرق باتجاه الحركـة. ومن جهـة ثـانيـة مـركـز هـذه المـويجات وهـو النقطة $Q(x_0 + a\Delta t, y_0)$ لا يتطـابق مع النقطـة P_0 حيـث صـدرت والتي تبقـى مـركـز المـويجـات الكـرويـة في الهيكـل الاسنادي S'. وتتحـرك النقط Q بسرعـة a في اتجـاه الحركة.



الشكل 31ـ انتشار موجة كروية في هيكلين اسناديين غاليليين

لنفترض الآن أن موجة مستوية تنتشر باتجـاه عمودي عـلى السطح xoy فيكـون تقاطع السطح xoy مع صدر الموجة الذي يمر في مصدر المـويجة P_0 خطـا مستقيما D_0. ويشكل الخط العمودي على D_0 زاوية θ مـع ox في الهيكل الاسنـادي S فتكون معادلة D_0 في الهيكل S.

$$x_0 \cos\theta + y_0 \sin\theta = c^{ie} \qquad \text{(VII-83)}$$

أما في الهيكل الاسنادي S' فإن الخط العمودي على صدر الموجة D_0 يشكل مـع ox'

زاوية θ'. وترتبط الزاوية θ بالزاوية θ' بالعلاقة العكسية للمعادلة (VII-70) أيّ:

$$\text{(VII-84)} \qquad tg\theta = \frac{\sqrt{1-\beta^2}\sin\theta'}{\cos\theta' + \frac{\beta u'}{c}}$$

لنفترض أن الخط المستقيم D_0 يمر في الوقت t بالنقطة $P_0(x_0y_0)$ التي تصدر عنها المويجات. فإذا طبَّقنا مبدأ هيغنز في الهيكل الاسنادي S' نجد أن الخط D' الذي نحصل عليه من D_0 بانتقال $u'\Delta t'$ (حيث u' هي سرعة الطور في S') ما هو إلاّ غلاف envelope الدوائر (VII-81).

فإذا كان مبدأ هيغنز متفقاً مع متطلبات النسبية الخاصة يجب أن يكون الخط المستقيم D الذي نحصل عليه من D_0 بانتقال $u\Delta t$ (حيث u هي سرعة الطور في S) غلاف فصيلة القطع الإهليلجي E المحدّد بالمعادلة (VII-82).

لنفترض أن P هي نقطة تماس القطع الإهليلجي مع الغلاف D فتكون المسافة P_0P هي حاصل Δt بسرعة انتشار الموجة V:

$$\text{(VII-85)} \qquad P_0P = V\Delta t$$

أي:

$$\text{(VII-86)} \qquad x - x_0 = V_x\Delta t \quad , \quad y - y_0 = V_y\Delta t$$

حيث x و y هي إحداثيات النقطة P في الهيكل الاسنادي S.

ومن جهة ثانية نحصل على غلاف فصيلة القطع الإهليلجي من الصيغ (VII-82) و (VII-83) بتغيُّر الإحداثيات x_0 و y_0، فتكون معادلة هذا الغلاف:

$$\text{(VII-87)} \qquad \frac{\partial f}{\partial x_0}\sin\theta - \frac{\partial f}{\partial y_0}\cos\theta = 0.$$

حيث $\frac{\partial f}{\partial y_0}$ و $\frac{\partial f}{\partial x_0}$ يمكن حسابهما من الصيغة (VII-82) فنجد المعادلة:

$$\text{(VII-88)} \qquad (x - x_0 - a\Delta t)\sin\theta - b(y - y_0)\cos\theta = 0$$

تشكِّل المعادلات (VII-82) و (VII-83) و (VII-88) تمثيلاً وسيطيا parametric representation لغلاف فصيلة القطع الإهليلجي E فإذا نجحنا بإلغاء الثوابت x_0 و y_0 بين هذه المعادلات الثلاث نحصل على معادلة الغلاف بالصيغة:

(VII-89) $$x \cos\theta + y \sin\theta = c^{ie} + \left[a + u' \sqrt{b^2 + btg^2\theta}\right] \Delta t \cos \theta.$$

تعطي هذه الصيغة المسافة P_0H بين صدري الموجة D_0 , D:

(VII-90) $$P_0H = \left[a + u' \sqrt{b^2 + btg^2\theta}\right] \Delta t \cos\theta$$

وإذا كانت u هي سرعة الطور للموجة المستوية في S، تكون هـذه المسافـة أيضا $u\Delta t$ فنجد بالمقابلة مع (VII-90):

(VII-91) $$\left[a + u' \sqrt{b^2 + btg^2\theta}\right] \cos \theta = u$$

نستبدل في هذه المعادلة الكميـات a و b و $\cos \theta$ و $tg^2\theta$ بصيغها المستخـرجة من (VII-79) و (VII-84) فنجد:

(VII-92) $$u = \frac{(u' + \beta c \cos \theta')}{\sqrt{\left(\frac{\beta u'}{c} + \cos\theta'\right)^2 + (1 - \beta^2) \sin^2\theta'}}$$

أي العلاقة العكسيَّة للمعادلة (VII-73).

ومن جهـة ثانيـة تخضع x_0 و y_0 للمعـادلات (VII-82) و (VII-88). فإذا أخـذنا بالاعتبار الصيغ (VII-86)، تكتب هذه المعادلات بالصيغة:

(VII-93) $$(V_x - a)^2 \frac{\Delta t^2}{b} + V_y^2 - bu'^2 \Delta t^2 = 0$$

(VII-94) $$(V_x - a) \Delta t \sin\theta - bV_y \Delta t \cos\theta = 0$$

ومنها نستخرج:

(VII-95) $$V_x = a + \frac{u' \sqrt{b}}{\sqrt{b + tg^2\theta}} \quad , \qquad V_y = \frac{u' \sqrt{b}\ tg\theta}{\sqrt{b + tg^2\theta}}$$

وإذا أخذنا بـالاعتبار (VII-79) و (VII-84) و (VII-76) نحصـل على المعـادلات التالية التي تحدِّد قانون التحويل $V \rightarrow V'$ بسرعة انتشـار الأشعة الضـوئية حسب مبدأ هيغنز:

(VII-96) $$V_x = \frac{V'_x + \omega}{1 + \frac{\beta V'_x}{c}} \; , \; V_y = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}\, V'_y}{1 + \frac{\beta V'_x}{c}}$$

تتطابق قاعدة تحويل سرعة الانتشار (VII-96) مع قاعدة تحويل سرعة الجسيمات (VII-35). ففي حالة موجة مستقيمة أحادية اللون، تنتشر في جسم يتحرك بسرعة ω بالنسبة إلى S وله قرينة انكسار n، وتتحول سرعة الانتشار من هيكل إسناد إلى آخر تماماً مثلما تتحوّل سرعة الجسيمات v و v′ في الهياكل الاسنادية S و S′ وفقاً للصيغ (VII-32) و (VII-33). يكفي إذاً أن نستبدل في هذه العلاقات سرعة الجسيم v و v′ بسرعة الإنتشار V و V′ أخذين بعين الاعتبار أن:

$$V' = \frac{c}{n} \qquad \text{(VII-97)}$$

10) سرعة الانتشار[11] وسرعة الطور

في الأجسام الكاسرة للضوء بقرينة انكسار n تكون سرعة انتشار موجة مستوية مختلفة عن سرعة الطور u بشكل عام.

أ ـ إستناداً إلى (VII-73) يمكن أن نكتب صيغة سرعة الطور u تبعاً لقيمة u′ والزاوية θ.

$$u = \frac{u'\left(1-\frac{\omega^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left[1-\frac{\omega^2}{c^2}+\frac{\omega^2}{c^2}\left(1-\frac{u'^2}{c^2}\right)\sin^2\theta\right]^{\frac{1}{2}}+\omega\left(1-\frac{u'^2}{c^2}\right)\cos\theta}{1-\frac{\omega^2}{c^2}\,u'^2} \qquad \text{(VII-98)}$$

فإذا كانت سرعة الطور $u' = \frac{c}{n}$ في الهيكل الاسنادي الذاتي S′ المتحرِّك للجسم نجد:

$$u = \frac{\frac{c}{n}\left(1-\frac{\omega^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left[1-\frac{\omega^2}{c^2}+\frac{\omega^2}{c^2}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\sin^2\theta\right]^{\frac{1}{2}}+\omega\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\cos\theta}{1-\frac{\omega^2}{c^2 n^2}} \qquad \text{(VII-99)}$$

(11) نعني بسرعة الانتشار سرعة الإشارة V. ويمكن أن تكون هذه سرعة صدر الموجة أو سرعة المجموعة (أيّ سرعة انتشار سعة مجموعة الموجات) أو سرعة الطاقة (أيّ سرعة انتشار متّجه بوينتنغ). وندرس في المقطع 10 سرعة صدر الموجة ولكن عملياً تتعادل التحديدات المختلفة لسرعة الإشارة في اكثر الحالات العادية.

وإذا أهملنا الكمية $\frac{\omega^2}{c^2}$ بالمقارنة مع 1 نجد:

$$u \simeq \frac{c}{n} + \omega\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\cos\theta. \tag{VII-100}$$

ب ـ أما سرعتا الانتشار V و V′ للموجة المستوية في الهيكلين الاسناديين S و S′ فترتبطان بعلاقة مشابهة لتلك التي تربط سرعتي جسيم v و v' وفي الهيكلين الاسناديين كما أثبتنا في المقطع السابق. وللمقارنة مع (VII-98) نكتب صيغة V تبعاً لقيم V′ و θ انطلاقاً من العلاقة (VII-50):

$$V = \frac{V'\left(1 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left[1 - \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{V'^2}\left(1 - \frac{V'^2}{c^2}\right)\sin^2\theta\right]^{\frac{1}{2}} + \omega\left(1 - \frac{V'^2}{c^2}\right)\cos\theta}{1 - \frac{V'^2\omega^2}{c^4} - \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{V'^2}{c^2}\right)\sin^2\theta} \tag{VII-101}$$

ولكن سرعة الانتشار في الهيكل الاسنادي الذاتي S′ للجسم هي $V' = \frac{c}{n}$ فتكون سرعة الانتشار في S

$$V = \frac{\frac{c}{n}\left(1 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left[1 - \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega^2 n^2}{c^2}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\sin^2\theta\right]^{\frac{1}{2}} + \omega\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\cos\theta}{1 - \frac{\omega^2}{c^2 n^2} - \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\sin^2\theta} \tag{VII-102}$$

وإذا أهملنا $\frac{\omega^2}{c^2}$ بالمقارنة مع 1 نجد أيضاً:

$$V \simeq \frac{c}{n} + \omega\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\cos\theta \tag{VII-103}$$

تثبت مقارنة الصيغ (VII-98) و (VII-101) (أو (VII-99) و (VII-102)). تختلف قيمة سرعة الانتشار V في أي هيكل إسناد غاليلي إجمالاً عن قيمة سرعة الطور u. ولكن تتساوى القيم التقريبية (VII-100) و (VII-103) إذا أهملنا الكميات $\frac{\omega^2}{c^2}$. بيد أن سرعة الانتشار V وسرعة الطور u تتطابقان في الحالتين التاليتين:

1 ـ في حالة الانتشار في الفراغ (n = 1): إذ إن العلاقة (VII-76) تقود إلى تساوي السرعتين مع c في المرجع S′.

$$V' = u' = c. \tag{VII-104}$$

ولكن في الحالة ($n = 1$) يكـون قانـون تحويـل سرعة الطـور وقانـون تحويـل سرعة الانتشـار متطابقـين. إستناداً إلى مبـادىء النسبية الخـاصـة تكـون سرعـة الطـور متساوية مع سرعة الانتشار في الفراغ وذلك في جميع الهياكل الاسنـادية الغـاليلية. ونتـأكد من هـذه الخاصـة إذا وضعنا $n = 1$ في العـلاقـات (VII-99) و (VII-102) فنجد مباشرة في أي هيكل إسناد غاليلي:

$$V = u = c \qquad \text{(VII-105)}$$

ويشير مولر C.Moller إلى الفرق بين هذه النتيجة وتلك التي يمكن استخـلاصها من نظرية مستندة إلى مفهوم الفضاء المطلق[12]. في نظرية كهذه تتساوى سرعة الطور مع سرعة الانتشار في هيكل مميز مرتبط بالأثير السـاكن. أما في الهيـاكل الاسنـادية الأخـرى فتكون هـاتان السرعتـان مختلفتين. وتصـل النسبية الخـاصـة إلى نتيجـة مختلفـة تمامـاً بسبب مبدئهـا بالـذات والذي يفتـرض أن الضوء ينتشر بـالتنـاحي وبالسرعة c في كل الهياكل الاسنادية الغاليلية. فتكون صـدور الموجـة كرويَّـة في كل الهياكل S و S′ المستعملة.

2 ـ في حالة الانتشار في جسم ذي قرينة انكسار n يتحرك بالاتجاه العمودي على صدر الموجة المستوية ($\theta = 0$): إذ نستنتج من (VII-73) أو من (VII-96) أن $V' = u' = \frac{c}{n}$ مما يعطي:

$$u = V = \frac{\frac{c}{n} \pm \omega}{1 \pm \frac{\omega}{n\,c}} \qquad \text{(VII-106)}$$

أي إذا أهملنا الكميات المتناسبة مع $\frac{1}{c^2} < 1$

$$u = V \simeq \left(\frac{c}{n} \pm \omega\right)\left(1 \mp \frac{\omega}{n\,c}\right) \simeq \frac{c}{n} \pm \left(1 - \frac{1}{n^2}\right). \qquad \text{(VII-107)}$$

نجد إذاً قاعدة فيزو. ففي تجربة فيـزو نجمع سرعتـين متوازيتـين: سرعة الضـوء في جسم ذي قرينة انكسار n أي $V = \frac{c}{n}$ وسرعة انسحـاب الجسم ω. فنحصل عـلى النتيجة التقريبية (VII-107) وهذا ما أثبتته التجربة.

(12) انظر الصفحة 61 من المـرجع [16]. إذا $u' = c$ تكـون $a = 0$ و $b = 1$. يكون عنـدئذ متَّجـه بوينتنـغ (الذي يحدد تدفق كثافة الطاقة والمرتبط نتيجة لذلـك بسرعة الانتشـار) عموديـاً على المـوجة المستـوية تماماً مثل سرعة الطور وذلك في كل المراجع العطالية.

وتعود قاعدة فيزو، حسب نظرية فرينل، إلى الانسحاب الجزئي للأثير. أما في نظرية لورنتز فتعود إلى انسحاب الموجات (التحريض والاستقطاب) في أثير ثابت. أما هنا فتبدو كنتيجة مباشرة لنظرية أينشتاين. فهي نتيجة لتحليل سينمائي بسيط ولا يلزم لذلك أيّة فرضية عن تكوين المادة(13).

نشير إلى أن قرينة الانكسار n في المعادلة (VII-107) هي $n(\nu')$ المتغيِّرة مع تردد الموجة ν' في الهيكل الاسنادي الذاتي للجسم S' المتحرك بسرعة ω. وهذه القرينة تختلف عن القرينة $n(\nu)$ حيث ν يقاس في هيكل المشاهد S. إذ إننا نجد استناداً إلى (VII-67) و (VII-68):

(VII-108)
$$\nu' = \frac{\nu\sqrt{1-\beta^2}}{1+\frac{\omega}{u'}\cos\theta'}$$

أي إذا وضعنا $u' = \frac{c}{n}$ وأهملنا $\beta^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$.

(VII-109)
$$\nu' = \frac{\nu\sqrt{1-\beta^2}}{1+n\beta\cos\theta'} \simeq \nu\,(1-n\beta\cos\theta')$$

نستنتج من هذه العلاقة أن:

(VII-110)
$$n(\nu') = n(\nu) + \frac{dn}{d\nu}\,d\nu = n(\nu) - \frac{dn}{d\nu}\,\nu\beta n\cos\theta'$$
$$= n(\nu)\left[1 - \frac{dn}{d\nu}\,\nu\beta\cos\theta'\right]$$

(VII-111)
$$\frac{1}{n(\nu')} = \frac{1}{n(\nu)}\left(1 + \frac{dn}{d\nu}\,\nu\beta\cos\theta'\right)$$

وإذا أحللنا هذه النتيجة في (VII-107) نجد الصيغة التقريبية:

(VII-112)
$$V = \frac{c}{n} + \left[1 - \frac{1}{n^2} + \frac{\nu}{n}\,\frac{dn}{d\nu}\right]\omega\cos\theta'.$$

---

(13) يؤكد هذا التنوع في تفسير القاعدة ذاتها والتجربة ذاتها قول بوانكاريه: ليس في الفيزياء تجارب نهائية لها حقيقة مطلقة. فتفسير هذه التجارب يتنوع مع الفرضيات المستعملة لصياغة الفيزياء.

وقد أثبت زيمان هـذه النتيجة بقيـاس سرعة انتشـار الضوء V في مسطـرة كوارتـز متحرِّكة وقد أظهر بذلك ظاهرة التشتت كما في المعادلة (VII-112).

سندرس في الفصل العاشر تفسير ظاهرة دوبلر وظواهر الزيـغ[14] التي هي أيضاً نتائج مباشرة للحَرَكيّات النسبية.

(14) P. ZEEMAN, Amst. Versl., 23, 1914, 245; 24, 1915, 18.

علم التحريك النسبي

أ ـ علم التحريك النسبي لجسيم نقطي

1) الزخم والطاقة والكتلة الذاتية لجسيم نقطي

يحدَّد زَخم (كمية حركة) جسيم نقطي في الميكانيك الكلاسيكي (التقليدي) بأنه:

$$P_N = m_0 V \qquad \text{(VII-1)}$$

حيث $V(\nu^1, \nu^2, \nu^3)$ هو متجِه سرعة الجسيم و m_0 هي الكتلة العطالية للجسيم.

في النظرية النسبية لا تشكِّل الكميات P_N و V مركبات الفضاء لمتَّجِه رباعي ويجب استبدال الصيغة (VIII-1) بتحديد جديد.

نستعمل الإحداثيات الحقيقية x^μ $(x^1, x^2, x^3, x^0 = ct)$ بمحاور متعامدة ومنظَّمة حسب العلاقة (VI - 28)

$$g_{\mu\nu} = (e_\mu \cdot e_\nu) = \eta_{\mu\nu} \qquad \text{(VIII-2)}$$

التي تقود إلى الصيغة الأساسية

$$ds^2 = (dx0)^2 - \sum_p (dx^p)^2. \qquad \text{(VIII-3)}$$

انطلاقا من السرعة الكونية للجُسيم

$$(VIII\text{-}4) \qquad \bar{u}^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{d\tau}$$ أو: $$u^{\mu} = \frac{\bar{u}^{\mu}}{c} = \frac{dx^{\mu}}{ds} \quad \left(u^0 = \frac{dt}{d\tau}\right)$$

نحدِّد المتَّجه الرباعي للزَّخم بأنه:

$$(VIII\text{-}5) \qquad \boxed{P_{\mu} = m_0\bar{u}^{\mu} = m_0cu^{\mu} \quad , \quad (u^{\mu}u_{\mu} = 1)}$$

حيث المركبات u^{μ} ترتبط بالسرعة العادية بالعلاقات:

$$(VIII\text{-}6) \qquad \boxed{u^p = \frac{\nu^p}{c\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \quad u^0 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \quad \left(\beta = \frac{\nu}{c}\right)}$$

وترمز m_0 هنا إلى «الكتلة الذاتية» وهي كميَّة مميزة للجسيم. ويمكن أن نكتب أيضاً استناداً إلى الصيغ (VIII-5) و (VIII-6):

$$(VIII\text{-}5)_1 \qquad P_q = m_0\,\bar{u}^q = \frac{m_0\nu^q}{\sqrt{1-\beta^2}} = m\nu^q$$

$$(VIII\text{-}5)_2 \qquad P^0 = m_0\bar{u}^0 = m_0cu^0 = \frac{m_0c}{\sqrt{1-\beta^2}} = mc$$

حيث وضعنا:

$$(VIII\text{-}7) \qquad \boxed{m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}}$$

إذا كانت السرعة خفيفة $(\beta \ll 1)$ تعود m إلى قيمتها غير النسبية m_0، كما أن التحديد النسبي $(VIII\text{-}5)_1$ يصبح التحديد غير النسبي (VIII-1) لذلك نحدد m_0 بأنها الكتلة الذاتية أو كتلة الجسيم في حالة السكون.

واستناداً إلى الصيغة (VIII-5) يخضع المتجه الرباعي P^{μ} لعلاقة التناظم[1].

---

(1) نثبت أن التحديد $p = mv$ مع $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ يقود إلى قانون حفظ الزَّخم العام استناداً إلى قواعد تحويل لورنتز، لذلك ندرس مثلاً تصادم جسيمين نقطيين. وعكس ذلك يمكن أن نثبت أن قانون حفظ الزخم وتحديد زخم الجسيم بالصيغة $p = m\,(m_0, \nu)\,v$ يقود إلى التحديد $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ إذا قبلنا =

$$(VIII\text{-}8)\ P_\mu P^\mu = (P^0)^2 - \sum_q (P^q)^2 = \frac{m_0^2 c^2}{1-\beta^2}\left(1 - \sum_q \frac{(v\ q)^2}{c^2}\right) = m_0^2\, c^2$$

وإذا وضعنا:

$$(VIII\text{-}9) \qquad P = (P^1, P^2, P^3) \qquad \text{مع} \qquad P^2 = \sum_q (P^q)^2 = \sum_q (P^q)^2$$

يمكن أن نكتب:

$$(VIII\text{-}10) \qquad (P^0)^2 = P^2 + m_0^2 c^2.$$

لنضع:

$$(VIII\text{-}11) \qquad \frac{W}{c} = P^0 = \frac{m_0 c}{\sqrt{1-\beta^2}} = mc$$

أو:

$$(VIII\text{-}12) \qquad \boxed{W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = mc^2}$$

وتكتب المعادلة (VIII-10):

$$(VIII\text{-}13) \qquad \boxed{\frac{W^2}{c^2} = P^2 + m_0^2 c^2}$$

سنرى في ما يلي أن الكمية في W المحددة بالصيغة (VIII-12) لا تختلف عن طاقة الجسيم الحركية T إلّا بكمية ثابتة.

$$(VIII\text{-}14) \qquad W_0 = m_0 c^2$$

نسميها الطاقة الداخلية للجسيم. وتساوي W هيكل إسناد الجسيم الذاتي W_0 $(\beta = 0)$.

= بقانون تحويل لورنتز (انظر الصفحة 67 من المرجع C. MOLLER, [16] والصفحة 87 من المرجع P.G. BERGMANN, [9]).

2) قوة منكوفسكي

القانون الأساسي لعلم التحريك النسبي:

يستند علم تحريك نيوتن للجسيمات على القانون الأساسي

$$f_{(N)} = \frac{dP_{(N)}}{dt} = m_0 \frac{d\,v}{d\,t} \qquad \text{(VIII-15)}$$

ومنه نستخلص القانون:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\ m_0 v^2\right) = (f_{(N)} \cdot v) \qquad \text{(VIII-16)}$$

الذي يعبِّر عن حفظ الطاقة والقائل بان التغير dT في الطاقة الحركية:

$$T = \frac{1}{2}\ m_0 v^2 \qquad \text{(VIII-17)}$$

يساوي الشغل $f \cdot vdt = fdl$ للقوى الخارجية المؤثرة على الجسيم.

ولكن الصيغة (VIII-15) ليست نسبية لأن الكمية $f_{(N)}$ لا تشكل المركِّبات الفضائية لمتَّجِه رباعي عند اجراء تحويل لورنتز. وذلك لأن الوقت التفاضلي dt ليس ثابتاً في هذا التحويل. نقول إن قانون الصيغة (VIII-15) ليس موافقاً للتغيُّر ولصياغة قانون بديل موافق للتغيُّر عند إجراء تحويل لورنتز يجب أن نستبدل السرعة v بالمتجِه الرباعي للسرعة الكونية du والوقت التفاضلي dt بالوقت التفاضلي الذاتي $d\tau$ الذي هو ثابت في التحويل. فنحصل على قوة منكوفسكي F وهي متجِه رباعي.

$$\boxed{F = \frac{dP}{d\tau} = m_0 \frac{du}{d\tau}} \qquad \text{(VIII-18)}$$

ومركِّباتها هي:

$$F_\mu = \frac{dP^\mu}{d\tau} = m_0 \frac{d\overline{u}^{\,\mu}}{d\tau} = m_o c \frac{du^\mu}{d\tau} \qquad \text{(VIII-19)}$$

أو:

$$F^\mu = m_0 c \frac{dx^\rho}{d\tau} \frac{du^\mu}{dx^\rho} = m_0 c^2 u^\rho \frac{du^\mu}{dx^\rho} \qquad \text{(VIII-20)}$$

وإذا حسبنا الجداء العددي $F_\mu u^\mu$ نجد بعد أخذ الصيغة (VIII-5) (أو العلاقة $u^\rho \bar{u}_\mu = c^2$ بالحسبان أن:

$$F_\mu u^\mu = 0 \quad \text{أو:} \quad F_\mu \bar{u}^\mu = 0 \qquad \text{(VIII-21)}$$

نستنتج من العلاقات (VIII-19) و (VIII-6) الصيغ التالية للمركّبات F^μ:

$$F^\rho = m_0 c \frac{du^\rho}{d\tau} = m_0 \frac{d\,t}{d\,\tau} \frac{d}{dt} - \frac{\nu^\rho}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{d}{dt} \frac{\nu^\rho}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \text{(VIII-22)}_1$$

$$F^0 = m_0 c \frac{du^0}{d\tau} = m_0 c \frac{d\,t}{d\,\tau} \frac{d}{dt} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{m_0 c}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{d}{dt} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \text{(VIII-22)}_2$$

لنحدد f بأنه المتجه الثلاثي ذو المركبات (f^1, f^2, f^3):

$$f^q = m_0 \frac{d}{dt} \frac{v^q}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \text{(VIII-23)}$$

التي تصبح مطابقة لمركّبات قوة نيوتن إذا أهملنا β^2 بالمقابلة مع 1. فنجد باستعمال الصيغة (VIII-23) والتحديد (VIII-5)_1:

$$\boxed{f = \frac{d\,P}{d\,t}} \qquad \text{(VIII-24)}$$

وباستعمال (VIII-22)_1 نجد:

$$\boxed{F^\rho = \frac{f^\rho}{\sqrt{1-\beta^2}}} \qquad \text{(VIII-25)}$$

ومن جهة ثانية نجد استناداً إلى الصيغ (VIII-21) و (VIII-6) و (VIII-25):

$$F_0 u^0 = -F_\rho u^\rho = \frac{-f_\rho \nu^\rho}{c\,(1-\beta^2)} \qquad \text{(VIII-26)}$$

ومن ثم:

$$f = (f^1, f^2, f^3) \qquad \boxed{F_0 = \frac{-f_\rho v^\rho}{c\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{f \cdot v}{c\sqrt{1-\beta^2}}} \qquad \text{(VIII-27)}$$

وإذا قارنا هذه النتيجة مع الصيغة $(VIII\text{-}22)_2$ للمركّبة F^0 نستنتج العلاقة التالية:

$$\boxed{(f \cdot v) = \frac{d}{dt}\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{dW}{dt}} \qquad \text{(VIII-28)}$$

حيث استعملنا التحديد (VIII-12).

لنرجع الآن إلى تحديد الزخم بالمعادلة $(VIII\text{-}5)_1$ أي:

$$p = mv \qquad \text{مع} \qquad p = (p^1, p^2, p^3) = (P^1, P^22, P^3) \qquad \text{(VIII-29)}$$

فيكتب القانون الأساسي (VIII-24) كما يلي:

$$f = \frac{dp}{dt} = \frac{dm}{dt}v + m\frac{dv}{dt} \qquad \text{(VIII-30)}$$

ولكن إذا أحللنا (VIII-7) بالمعادلة (VIII-28) نجد:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{f \cdot v}{c^2} \qquad \text{(VIII-31)}$$

وإذا وضعنا هذه النتيجة في المعادلة (VIII-30) نجد:

$$m\frac{dv}{dt} = f - \left(\frac{f.v}{c^2}\right)v. \qquad \text{(VIII-32)}$$

هكذا عندما يتحرك جسيم تحت تأثير قوة لا يكون التسارع متناسباً مع القوة اجمالاً. ولا يكون ذلك إلّا إذا كانت القوة متوازية أو متعامدة على السرعة $[(f \cdot v) = 0]$[2].

---

(2) هذا هو حال حركة جسيم مشحون في مجال مغنطيسي H. إذ تكون القوة $f = \frac{q}{c}[v \wedge H]$. يمكن عندئذ أن نكتب قانون نيوتن:

$$f = m\frac{dv}{dt}$$

3) تعادل الكتلة والطاقة

إذا قابلنا القاعدة النسبية:

$$(f \cdot v) = \frac{d\,W}{d\,t} \qquad \text{(VIII-28)}$$

مع نتائج الصيغة (VIII-16) الصالحة في الميكانيك الكلاسيكي نستنتج أنه يمكن أن نحدِّد الطاقة الحركية للجسيم بالصيغة:

$$T = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + c^{ie} \qquad \text{(VIII-33)}$$

وتصبح هذه الصيغة في حدود السرع الخفيفة ($\beta \ll 1$):

$$T = m_0c^2 + \frac{1}{2}\,m_0\nu^2 + \ldots + c^{ie}. \qquad \text{(VIII-34)}$$

فنجد النتيجة (VIII-17) إذا وضعنا:

$$c^{ie} = -\,m_0c^2. \qquad \text{(VIII-35)}$$

وتصبح الطاقة الحركية للجسيم:

$$\boxed{T = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - m_0c^2} \qquad \text{(VIII-36)}$$

أو استناداً إلى الصيغ (VIII-7) و (VIII-12) و (VIII-14) تساوي T.

$$T = (m - m_0)\,c^2 = W - W_0 \qquad \text{(VIII-37)}$$

$$\boxed{m = m_0 + \frac{T}{c^2}} \qquad \text{(VIII-38)}$$

مما يعني أن الكمية:

$$W = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = mc^2 \qquad \text{(VIII-12)}$$

هي مجموع الطاقة الحركية للجسيم والكمية الثابتة $W_0 = m_0c^2$ التي يمكن اعتبارها الطاقة الداخلية للجسيم.

كتلة الجسيم في حالـة السكون m_0 تعـادل الطاقـة $\frac{W_0}{c^2}$ وعكس ذلك كـل طاقـة ذاتية W_0 تعادل كتلة ذاتية.

$$m_0 = \frac{W_0}{c^2} \qquad \text{(VIII-39)}$$

أما زخم الجسيم المتحرك بسرعة v فهو:

$$P^q = p^q = \frac{m_0 \nu^q}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{W_0}{c^2} \frac{\nu^q}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \text{(VIII-40)}_1$$

$$P^0 = \frac{m_0 c}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{W_0}{c} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \text{(VIII-40)}_2$$

ويسمى قانون أينشتاين لمعادلة الطاقة والثِّقَل (1905) أيضا قانون عطالة الطاقة.

وبشكـل خاص، إذا انبعث عن جسيم حـر ($\nu = cte$) إشعـاع بطـاقـة $E = h\nu$ تصبـح كتلته m'. فـإذا كتبنا في الهيكـل الاسنادي الـذاتي ($P = 0$) قـانـون حفظ الطاقة:

$$W_0 = W'_0 + E_0 \qquad \text{(VIII-41)}$$

نجد:

$$m_0 = m'_0 + \frac{E_0}{c^2} \qquad \text{(VIII-42)}$$

إذا أخـذنا بـالحسبان الصيغـة (VIII-13) والشرط $p = 0$. وتعني هذه النتيجـة أن قانون حفظ الكتلة ليس صالحاً في علم التحريـك النسبي، بل يبقى فقط قـانون حفظ الطاقة. أما التغير في الكتلة الذاتية:

$$\Delta m'_0 = m_0 - m'_0 = \frac{E_0}{c^2} \qquad \text{(VIII-43)}$$

فيساوي الطاقة المنبعثة (مقسومة على c^2) ويُستنتج من قانون حفظ الطاقة.

4) تحويل السرع والكميات التحريكية الأساسية (الزخم، الطاقة، القوة) في تحويل لورنتز:

أ ـ إذا كانت السرعة الكونية لجسيم $\bar{u}^\mu = cu^\mu$ في هيكل الاسناد S يكون زخمه:

(VIII-45) $$P^\mu = m_0\bar{u}^\mu = m_0cu^\mu.$$

أما في الهيكل الاسنادي 'S المتحرِّك بسرعة W بالنسبة إلى S فيكون:

(VIII-44) $$P'^\mu = m_0\bar{u}'^\mu = a^{\mu\prime}_{\nu}\, m_0\bar{u}^\nu = a^{\mu\prime}_{\nu}\, P^\nu$$

والعلاقة العكسية هي:

(VIII-45) $$P^\mu = a^\mu_{\nu'}\, P^\nu$$

وبالتفصيل نجد قانون تحويل الزُّخم والطاقة:

(VIII-44)₁ $$p'^q = a^{q'}_r\, p^r + a^{q'}_0\, \frac{W}{c}$$

(VIII-44)₂ $$\frac{W'}{c} = a^{0'}_r\, p^r + a^{0'}_0\, \frac{W'}{c}\, .$$

وعكس هذا التحويل هو:

(VIII-45)₁ $$P^q = a^q_{r'}\, p'^r + a^q_{0'}\, \frac{W'}{c}$$

(VIII-45)₂ $$\frac{W}{c} = a^0_{r'}\, p'^r + a^0_{0'}\, \frac{W'}{c}\, .$$

لإيجاد التحويل من هيكل إلى آخر نحل محل المُعامل $a^{\nu\prime}_{\mu}$ و $a^{\nu}_{\mu'}$ القيم المناسبة لتحويل لورنتز. ففي تحويل لورنتز العام نستعمل $(VI - 57)_1$ و $(VI - 57)_2$ وفي تحويل لورنتز دون دوران نستعمل (VI - 62) و (VI - 63)، وفي تحويل لورنتز الخاص نستعمل (VI - 66). نجد مثلاً في حالة التحويل دون دوران:

(VIII-46)₁ $$p' = p + W\left\{\frac{\alpha}{W^2}\,(p\cdot W) - \frac{W}{c^2\sqrt{1-\beta^2}}\right\}, \quad \beta = \frac{W}{c}$$

(VIII-46)₂ $$W' = \frac{W - (p\cdot W)}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

حيث وضعنا:

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1$$

وفي حالة التحويل الخاص نجد:

$$p'^1 = \frac{p^1 - \frac{W}{c^2}\ \omega}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , p'^2 = p^2 \ \ , \ \ p'^3 = p^3 \qquad (VIII\text{-}47)_1$$

$$W' = \frac{W - p^1\omega}{\sqrt{1-\beta}} \qquad (VIII\text{-}47)_2$$

أما قواعد التحويل المعاكس فنحصل عليها بتبادل p و p′ من جهة و v و v′ من جهة أخرى واستبدال W ب W− في المعادلات (VIII-46) أو في (VIII-47).

ب ـ **القوة**: إذا انتقلنا من هيكل الإسناد S إلى هيكل الإسناد S′ تصبح مركبات قوة منكوفسكي F^μ.

$$F'^\mu = a^{\mu'}_{\nu}\ F^\nu = a^{\mu'}_{q}\ F^q + a^{\mu'}_{0}\ F^0 \qquad (VIII\text{-}48)$$

وباستعمال الصيغ (VIII-25) و (VIII-27) يمكن أن نكتب أيضاً:

$$\frac{f'^p}{c\sqrt{1-\frac{\nu'^2}{c^2}}} = a^{p'}_{q}\ \frac{f^q}{\sqrt{1-\frac{\nu^2}{c^2}}} + a^{p'}_{0}\ \frac{(f\cdot v)}{c\sqrt{1-\frac{\nu^2}{c^2}}} \qquad (VIII\text{-}49)$$

ونجد باستعمال الصيغ (VI - 96) أو (VII - 18):

$$f'^p = \frac{a^{p'}_{q}\ f^q + a^{p'}_{0}\left(\frac{f.v}{c}\right)}{a^{0'}_{r}\frac{\nu^r}{c} + a^{0'}_{0}} \qquad (VIII\text{-}50)$$

وبشكل خاص إذا أحللنا في هذه المعادلة القيم (VI - 62) و (VI - 63) للمعامل $a^{\nu'}_{\mu}$ الموافقة لتحويل لورنتز دون دوران نجد[3]:

---

(3) نحصل أيضا على (VIII - 51) انطلاقا من $f' = \frac{dp'}{dt'}$ حيث يرتبط الزخم p′ بالزخم p بالعلاقة (VIII - 44). وفي الجانب الأيمن نستعمل $\frac{d}{d\,t}\ \frac{d\,t}{dt'} = \frac{d}{dt'}$ مع $\frac{dt'}{d\,t}$ بالصيغة (VI - 92).

$$(VIII-51)\quad f' = \left\{ f + W\left[\frac{\alpha}{W^2}\,(f\cdot W) - \frac{f\cdot v}{c^2\sqrt{1-\beta^2}} \right] \right\} \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\left(\frac{W.V}{c^2}\right)}$$

حيث $\beta = \frac{\omega}{c}$.

أخيراً في حالة تحويل لورنتز الخاص نستعمل القيم في الصيغة (VI - 66) للمعامل $a^{\nu'}_{\mu}$ في المعادلة (VIII-50) أو نستبدل في الصيغة (VIII-51) المتجه W بالمتجه ذي المركبات ω^1 و $\omega^2 = \omega^3 = 0$ فنجد:

$$(VIII-52)\qquad f'^1 = \frac{f^1 - \beta\left(\frac{f.v}{c}\right)}{1-\frac{\beta\,\nu^1}{c}}\,,\ f'^2 = \frac{f^2\sqrt{1-\beta^2}}{1-\frac{\beta\,\nu^1}{c}}\,,\ f'^3 = \frac{f^3\sqrt{1-\beta^2}}{1-\frac{\beta\,\nu^1}{c}}$$

أما القواعد العكسية فتستنتج من التحويل:

$$(VIII-53)\qquad F^{\mu} = a^{\mu}_{\nu'}\,F'^{\nu}$$

الذي يقود إلى المعادلة:

$$(VIII-54)\qquad f^p = \frac{a^p_{q'}\,f'^q + a^p_{0'}\left(\frac{f'.v'}{c}\right)}{a^0_{r'}\,\frac{\nu'^r}{c} + a^0_{0'}}$$

التي يمكن كتابتها أيضاً مباشرة من المعادلات (VIII-51) و (VIII-52) بتبادل f و f' من جهة و v إلى v' من جهة أخرى واستبدال W ب W−.

5) مجموعات الجسيمات الحرة

أ ـ الطاقة والزّخم والثِّقل الذاتي لمجموعة من الجسيمات الحرة

لنفترض أن مجموعة من الجسيمات عددها n لا تتفاعل في ما بينها. نحدِّد زخم وطاقة المجموعة بأنها مجموع زخم وطاقة الجسيمات.

$$(VIII-55)\qquad P = \textstyle\sum_i P_{(i)} \quad , \quad W = \sum_i W_{(i)}$$

فإذا طبَّقنا العلاقة (VIII-33) على طاقة كل جسيم نجد

$$(VIII-56)\qquad W = \textstyle\sum_i (T_{(i)} + m_{0(i)}c^2) = T + m_0c^2$$

حيث وضعنا:

$$T = \sum_i T_{(i)} \quad , \quad m_0 = \sum_i m_{0(i)}. \qquad \text{(VIII-57)}$$

نحدِّد الهيكل الاسنادي الذاتي للمجموعة بأنه الهيكل S_0 الذي ينعدم فيه الـزخم العام(4).

$$P_{(0)} = 0. \qquad \text{(VIII-58)}$$

لنفترض أن مركز الكتلة لهذه الجسيمات يتحرك بسرعة ثابتة v بالنسبة إلى هيكل إسناد المشاهد S. v هي إذاً سرعة هيكل الاسناد S_0 بالنسبة إلى S. فنجـد استناداً إلى المعادلة (VIII-45) حيث S' هي الآن S_0.

$$p^q = a^q_{r'}\, p'^r + a^q_{0'} p'^0 = a^q_{0'}\, \frac{W_0}{c} \qquad \text{(VIII-59)}_1$$

$$p^0 = a^0_{r'} p'^r + a^0_{0'} p'^0 = a^0_{0'}\, \frac{W_0}{c} \qquad \text{(VIII- 59)}_2$$

لأن $p'^r = p^{(0)r} = 0$ و $p'^0 = \frac{W_0}{c}$ في هيكل الاسناد $S' \equiv S_0$. ومن جهة ثانية إذا كان S' هو هيكل الاسناد الذاتي أي:

$$\frac{d\, x'^r}{d\, x'^0} = \frac{\nu'^r}{c} = 0$$

(4) هذا الاختيار ممكن دائما لأن $0 > \sum_i (m_{0(i)} c^2) - > \frac{W^2}{c^2} - p^2$ إذا $n > 1$.

وذلك لأن:

$$p^2 - \frac{W^2}{c^2} = \left(p + \frac{W}{c}\right)\left(p - \frac{W}{c}\right) = \Sigma_i \left(p_{(i)} - \frac{W_{(i)}}{c}\right) \Sigma_i \left(p_{(i)} + \frac{W_{(i)}}{c}\right).$$

ولكن دائما:

$$\left(p_{(i)} - \frac{W_{(i)}}{c}\right)\left(p_{(i)} + \frac{W_{(i)}}{c}\right) = -m_{0(i)}c^2 < 0 \text{ :لأن } p_{(i)} - \frac{W_{(i)}}{c} < 0$$

فينتج عن ذلك أن:

$$\Sigma_i \left(p_{(i)} - \frac{W_{(i)}}{c}\right) \Sigma_j \left(p_{(j)} + \frac{W_{(j)}}{c}\right) < \Sigma_i \left(p_{(i)} - \frac{W_{(i)}}{c}\right) \Sigma_i \left(p_{(i)} + \frac{W_{(i)}}{c}\right) = \Sigma_i P^0_{(2)} - \frac{W^2_{(i)}}{c^2}$$

وأخيراً:

$$p^2 - \frac{W_2}{c} < \Sigma_i P^2_{(i)} - \frac{W^2_{(i)}}{c^2} = -\Sigma_i (m_{0(i)} c^2) < 0$$

نجد كما في (VI - 101)[5]:

$$a^{q}_{0'} = a^{0}_{0'} \frac{\nu^{q}}{c} \quad \text{(VIII-60)}$$

مما يجعل المعادلة (VIII-59) تُكتب:

$$p^{q} = a^{0}_{0'} \frac{W_0}{c^2} \nu^{q} \quad , \quad W = a^{0}_{0'} W_0. \quad \text{(VIII-61)}$$

لنضع:

$$M = a^{0}_{0'} \frac{W_0}{c^2} \quad \text{(VIII-62)}$$

فتُكتب العلاقات (VIII-61)

$$p^{q} = M\nu^{q} \quad , \quad W = Mc^2. \quad \text{(VIII-63)}$$

ولكن استناداً إلى الصيغة (VI - 100):

$$a^{0}_{0'} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{(VIII-64)}$$

نجد:

$$M = \frac{W_0}{c^2\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{W}{c^2} \quad \text{(VIII-65)}$$

هكذا نحدِّد الكتلة الذاتية لمجموعة الجسيمات Σ_1 بأنه:

$$M_0 = \frac{W_0}{c^2} \quad \text{(VIII-66)}$$

---

(5) وذلك لأن:

$$dx^{q} = a^{q}_{r'} dx'^{r} + a^{q}_{q'} dx'^{0} \quad , \quad dx^{0} = a^{0}_{r'} dx'^{r} + a^{0}_{0'} dx'^{0}$$

فإذا وضعنا $0 = \frac{d\,x'^{r}}{d\,x'^{0}}$ لأن S' هو هيكل الإسناد الذاتي نجد:

$$\frac{dx^0}{dx'^0} = a^{0}_{0'} \quad , \quad \frac{dx^q}{dx'^0} = \frac{dx^q}{dx^0}\frac{dx^0}{dx'^0} = a^{0}_{0'}\frac{\nu^q}{c} = a^{q}_{0'}$$

بحيث تصبح المعادلة (VIII-65):

$$M = \frac{M_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \text{(VIII-67)}$$

عندئذ تقود التحديدات (VIII-66) و (VIII-56) إلى:

$$M_0 = m_0 + \frac{T_0}{c^2} \,. \qquad \text{(VIII-68)}$$

ملاحظات:

أ ـ إذا كانت الجسيمات حرّة نجد:

$$f_{(i)} = \frac{dP_{(i)}}{d\,t} \equiv 0 \qquad \text{(VIII-69)}$$

فإذا افترضنا أن سرعة الجسيمات في هياكل الاسناد S و $S' \equiv S_0$ خفيفة بالنسبة لسرعة الضوء يكون الوقت الذاتي لكل جسيم مطابقا تقريباً للوقت المحدَّد لكل هيكل إسناد S و S' نجد إذاً:

$$p = \sum p_{(i)} = c^{ie} \qquad \text{(VIII-70)}$$

وأيضاً:

$$M = c^{ie} \quad , \quad W = m_0c^2 + T = c^{ie}. \qquad \text{(VIII-71)}$$

تمثل W إذاً الطاقة الكاملة H لمجموعة الجسيمات وهي مجموع الطاقة الحركية T لكل الجسيمات يضاف إليها الطاقة الذاتية لكل الجسيمات. أما p فترمز إلى الزخم العام و M ترمز إلى الكتلة العامة للمجموعة من الجسيمات الحرة.

ب ـ العلاقة التالية هي دائماً صحيحة:

$$\boxed{M_0 > \sum_i m_{0(i)}} \quad \text{أيّ} \quad \boxed{M_0 - m_0 = \frac{T_0}{c^2} > 0} \qquad \text{(VIII-72)}$$

أي أن الكتلة الذاتية لمجموعة الجسيمات تفوق مجموع الكتل الذاتية للجسيمات التي تؤلِّف المجموعة. والفرق ناتج عن الطاقة الحركية الداخلية للمجموعة وهي دائماً إيجابية.

ج ـ ومن المعادلات (VIII-63) و (VIII-67) نستخلص العلاقة:

$$p^2 - \frac{W^2}{c^2} = - M_0^2 c^2. \qquad \text{(VIII-73)}$$

ب ـ التصادم بين الجسيمات الحرّة ـ تعادُل الكتلة والطاقة

لنفترض الآن أن تصادمـا يجري بـين مجموعـة لجسيمات حـرة Σ_1 ومجموعـة أخـرى لجسيمـات حـرة Σ_2. لنفتـرض أيضـا p وp' و W و W' هي زخم وطـاقـة المجموعة Σ_1 مَقيسةً في هياكل الاسناد S و S' قبل التصـادم. و $p + \Delta p$ و$p' + \Delta p'$ و $W + \Delta W$ و $W' + \Delta W'$ هي الكميات الفيزيـائية ذاتهـا للمجموعـة ذاتها Σ_1 في الهيـاكل ذاتهـا S و S' ولكن بعد التصـادم. بما أن تحـويل لـورنتز خطي يمكن أن نكتب قواعد التحويل للكميات ΔP و ΔW من الهيكل الاسنادي S إلى الهيكل S'

$$Ap^q = a^q_{r'}\, \Delta p'^r + a^q_{0'}\, \frac{\Delta W'}{c} \qquad \text{(VIII-74)}_1$$

$$\Delta \frac{W}{c} = a^0_{r'}\, \Delta p'^r + a^0_{0'}\, \frac{\Delta W'}{c}. \qquad \text{(VIII-74)}_2$$

فإذا كان هيكل الاسناد S' مطابقاً لهيكل الاسناد الذاتي S_0 بحيث إن:

$$\Delta p' = \Delta p_{(O)} = 0 \qquad \text{(VIII-75)}$$

أي إذا كان الزَّخم العام $p' = \Sigma p'_{(1)}$ لا يتغيَّر بـالتصادم في الهيكـل S_0 نجد كمـا في المعادلة (VIII-59):

$$\Delta p^q = a^q_{0'}\, \frac{\Delta W_0}{c} = a^0_{0'}\, \frac{\Delta W_0}{c^2}\, \nu^q = \Delta M \nu^q \qquad \text{(VIII-76)}_1$$

$$\Delta W = a^0_{0'}\, \Delta W_0 = \Delta M . c^2 \qquad \text{(VIII-76)}_2$$

حيث وضعنا:

$$\Delta M = a^0_{0'}\, \frac{\Delta W_0}{c^2} = \frac{\Delta W_0}{c^2 \sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\Delta W}{c^2} \qquad \text{(VIII-77)}$$

ونجد أيضا:

$$\Delta M = \frac{\Delta M_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \qquad \text{(VIII-78)}$$

إذا وضعنا:

(VIII-79) $$M_0 = \frac{W_0}{c^2}$$

فإذا قبلنا بمبدأ حفظ الطاقة والزَّخم يكون زخم المجموعة Σ_2 قد ازداد بـالكمية Δp وطاقتها قد ازدادت بالكمية ΔW. ويعادل هذا إضافة جسيم إلى المجموعـة Σ_2 بكتلة ذاتية ΔM_0 وبسرعة v بالنسبة إلى S. ولكن استناداً إلى المعادلة (VIII-74).

(VIII-80) $$(\Delta p)^2 - \left(\frac{\Delta W}{c}\right)^2 = (\Delta p')^2 - \left(\frac{\Delta W'}{c}\right)^2$$

إذا أخـذنا بـالحسبان العـلاقات (VI - 45) بـين المُعامـل a^{ν}_{μ}. نجد إذاً في الهيكـل الاسنادي الذاتي $(\Delta p' = 0, \Delta W' = \Delta W_0 = c^2 \Delta M_0)$ أيضـاً:

(VIII-81) $$(\Delta p)^2 - \left(\frac{\Delta W}{c}\right)^2 = -(\Delta M_0)^2 c^2.$$

ج ـ تطبيق على حالة الفناء:

لنفترض أن جسيماً كتلته m_0 يمكن أن يفنى تاركاً كمية من الطـاقة W. ليكن S_0 هيكل الجسيم الاسنادي الذاتي و S هيكل إسناد غاليلي آخر. تتألف الآن المجموعـة Σ_1 من جسيم واحد فنجد إذاً في الهيكل الاسنادي S_0:

(VIII-82) $$\Delta p_{(0)} = 0 \quad , \quad \Delta W_0 = W_0$$

وفي الهيكل S:

(VIII-83) $$\Delta p = p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \quad \Delta W = W = \frac{W_0}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

فإذا أحللنا هذه القيم في المعادلة (VIII-76) نجد:

$(VIII-84)_1$ $$\frac{m_0 \nu^q}{\sqrt{1-\beta^2}} = a^0_{0'} \frac{W_0}{c^2} \nu^q = \frac{W_0}{c^2\sqrt{1-\beta^2}} \nu^q$$

$(VIII-84)_2$ $$W = a^0_{0'} W_0 = \frac{W_0}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

وتكون هذه المعادلات صحيحة بالتطابق إذا:

(VIII-85) $$W_0 = m_0 c^2$$

هكذا تقود إمكانية الفناء annihilation النسبي لجسيم مع توليد طاقة W (في إطار قانون حفظ الطاقة) إلى إسناد الطاقة الداخلية $W_0 = m_0c^2$ إلى هذا الجسيم. وتثبت صحة هذه النتيجة جميع تجارب تحويل المادة إلى طاقة وتحويل الطاقة إلى مادة.

فالبوزيترونات[6] (أيّ الالكترونات الموجبة) يمكن أن تشكّل مع الالكترونات السالبة أزواجاً يمكن أن تفنى تاركة وراءها إشعاعاً[7]. وعكس ذلك يمكن للإشعاع الكهرمغنطيسي أن يتحول إلى أزواج من الإلكترونات والبوزيترونات[8]. تشاهد هذه الظواهر بشكل خاصة في الأشعة الكونية cosmic rays وتتوقعها نظرية ديراك وهي النظرية النسبية للإلكترونات ذات الدومة.

فإذا كانت $E = h\nu$ هي طاقة الأشعة المنبعثة عن ظاهرة تحويل الأزواج e^+e^- إلى أشعة نجد استناداً إلى قانون حفظ الطاقة في هيكل الاسناد الذاتي S_0.

(VIII-86) $$W_0 = 2m_0c^2 \quad , \quad W_0' = 0$$ مع: $W_0 = W_0' + E_0$

مما يعطينا العلاقة:

(VIII-87) $$2m_0c^2 = h\nu_0$$

بين كتلة الجسيم m_0 والتردد frequency الذاتي للأشعة.

6) مجموعة الجسيمات المتفاعلة

لنفترض الآن أن الجسيمات تتفاعل، ولندرس حركة الجسيمات في الهياكل الاسنادية الغاليلية S و S' بحيث تكون سرعة كل جسيم في هذه الهياكل خفيفة بالنسبة إلى سرعة الضوء. في هذه الحالة يتطابق تقريباً الوقت الذاتي لكل جسيم مع الوقت المقاس في هيكل الاسناد ويكون التفاعل متغيِّراً تبعاً لمواقع الجسيمات ويتميز بدالّة كمون V. فنجد بهذه الصورة التقريبية:

(VIII-88) $$f_{(i)} = \frac{d}{dt}\ (mv)_{(i)} = -\frac{\partial v}{\partial x_{(i)}}$$

---

(6) C.D. ANDERSON. Science, 76, 1932, 238; P.M.S. BLACKETT et G.P.S. OCCHIALINI. Proc. Roy. Soc., A 139, 1933, 699.

(7) P.A.M. DIRAC. The principles of quantum Mechanics. 3e éd. Oxford, 1947, 73.

(8) C.D. ANDERSON et NEDDERMEYER. Phys. Rev., 43, 1933, 1034; F. RASETTI, L. MEITNER et K. PHILIPP. Naturw., 21, 1933, 286; I. CURIE et F. JOLIOT. C.R., 196, 1933, 158.

مما يعطينا:

$$\Sigma_i f_{(i)}\, v_{(i)} = \frac{d\Sigma_i \left(\frac{1}{2}\ m\nu^2\right)_{(i)}}{dt} = -\frac{d\ V}{d\ t} \qquad \text{(VIII-89)}$$

أي:

$$T + V = H = c^{ie} \qquad \text{(VIII-90)}$$

إذا كانت الجسيمات بعيدة جداً بعضها عن بعض يختفي التفاعل وتصبح V ثابتة. نختار هذه الثابتة صفراً (أي $V\infty = 0$) فتساوي الدالة H لجسيمات متباعدة الطاقة الحركية ($H = T\infty$)، أما إذا كانت الجسيمات مترابطة فتكون دالّة الكمون سالبة دائماً أي أن $f \cdot dx = -d\ V > 0$. فتكون الطاقة الحركية T (استناداً إلى المعادلة (VIII-90)) متغيِّرة مع الوقت بشكل عام.

لنحدِّد الآن هيكلاً اسنادياً S_0 بالميِّزات السابقة $(\nu_i)_0 \ll c$ وبحيث إن:

$$p_{(0)} = \Sigma_i p_{(i)(0)} = 0. \qquad \text{(VIII-91)}$$

نجد في هيكل إسناد غاليلي آخر S (مع (VIII-59)) كما في $\nu_i \ll c$.

$$p^q = a^q_{0'}\, P'^0 = a^q_{0'}\ \frac{W_0}{c^2} = a^0_{0'}\nu^q\ \frac{W_0}{c^2}\ \ \nu^q = \mu\nu^q \qquad \text{(VIII-92)}_1$$

$$\frac{W}{c} = a^0_{0'}\, p'^0 = a^0_{0'}\ \frac{W_0}{c} = \mu c \qquad \text{(VIII-92)}_2$$

حيث وضعنا:

$$\mu = a^0_{0'}\ \frac{W_0}{c^2} = \frac{W_0}{c^2\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{W}{c^2}\ , \qquad \text{(VIII-93)}$$

أي:

$$\mu = \frac{\mu_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \text{(VIII-94)}$$

مع:

$$\mu_0 = \frac{W_0}{c^2} = m_0 + \frac{T_0}{c^2} \qquad \text{(VIII-95)}$$

لكن الطـاقة الحـركية T (وبشكـل خاص T_0) ليست ثـابتة بـل تتغير مــع الوقت وكـذلك الثقـل μ_0 المحدد بـالصيغة (VIII-95). هكـذا تكـون الكميـات μ_0 و μ و p متغيِّرة مع الوقت ولا يمكن أن ترمز إلى الكتلة والزُّخم لمجموعة الجسيمات إذا كانت متفاعلة.

ومن الممكن أن نحدِّد الزخم π للمجموعة إذا استبدلنا الطاقة:

$$W_0 = m_0c^2 + T_0 \qquad \text{(VIII-96)}$$

بالصيغة:

$$\Omega_0 = m_0c^2 + T_0 + V_0 = m_0c^2 + H_0 \qquad \text{(VIII-97)}$$

أي بـاستبدال الطـاقة الحـركية T_0 بـالكميـة H_0 و W_0 بـالكميـة Ω_0 في المعـادلات (VIII-95) و (VIII-92)، وذلك لأن الكمية (VIII-97) ثـابتة مــع الوقت استنـاداً إلى المعـادلة (VIII-90) تتغـير مع الـوقت في حالـة جسيمـات متفـاعلـة. أمـا في حـالـة الجسيمـات غير المتفـاعلة فتنعـدم V وتتطابق Ω_0 مــع W_0 فتصبح هـذه ثابتـة مع الوقت.

وبطريقة مشابهة للمعادلة (VIII-92) نحدِّد الزخم العام في هيكل الاسناد S بأنه:

$$\pi_q = a^0_{0'}\, \nu^q \frac{\Omega_0}{c^2} = \frac{(m_0c^2 + H_0)\, \nu^q}{c^2\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{M_0\nu^q}{\sqrt{1-\beta^2}} = M\nu^q \qquad \text{(VIII-98)}_1$$

والطاقة بأنها:

$$\Omega = a^0_{0'}\, \Omega_0 = \frac{(m_0c^2 + H_0)}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{M_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = Mc^2 \qquad \text{(VIII-98)}_2$$

حيث حدَّدنا الكتلة M_0 بأنها:

$$M_0 = m_0 + \frac{H_0}{c^2}\ . \qquad \text{(VIII-99)}$$

بدلاً من (VIII-95). فتكون الكميات M_0 و M و π^q و Ω ثابتة مع الـوقت. ويمكن أن نميز بين الحالتين التاليتين:

1 ـ إذا كان الجسم ثابتاً stable نجد دائماً:

$$H_0 = T_0 + V_0 < 0. \qquad (VIII\text{-}100)_1$$

هكذا يجب إمداد الجسم المؤلف من جسيمات مرتبطة بطاقة:

$$\Delta E = -H_0 > 0 \qquad (VIII\text{-}101)$$

كي يتفتت إلى أجزائه. فنجد استناداً إلى (VIII-99):

$$\boxed{\Delta m = m_0 - M_0 = \frac{\Delta E}{c^2} > 0} \quad \text{أو:} \quad \boxed{M_0 < \Sigma_i m_{0(i)}} \qquad (VIII\text{-}102)_1$$

أي أن الكتلة الذاتية للجسم أقل من مجموع الكتل الذاتية للجسيمات التي تكوِّنه والفرق بينهما يسمى نقص الكتلة mass defect. وهذا هو حال النواة الذرية إذا كانت ثابتة: إذ تكون كتلة النواة أقل من مجموع كتل النُّوَيّات (البروتونات والنترونات) التي تكوِّنها.

2 ـ إذا كان الجسم غير ثابت، نجد:

$$H_0 = T_0 + V_0 > 0 \qquad (VIII\text{-}100)_2$$

فإذا تفتت هذا الجسم إلى أجزائه يعطي طاقة:

$$\Delta E = H_0 > 0$$

وفي هذه الحالة:

$$\boxed{\Delta m = m_0 - M_0 = -\frac{\Delta E}{c^2} < 0} \quad \text{أو:} \quad \boxed{M_0 > \Sigma_i m_{0(i)}} \qquad (VIII\text{-}102)_2$$

هكذا إذا كانت النواة الذرية غير ثابتة تكون كتلتها أكبر من مجموع كتل النويات التي تؤلفها. يمكن عندئذ للنواة أن تتفتت إلى أجزائها محررة كمية من الطاقة تساوي $\frac{\Delta E}{c^2}$.

ب ـ علم التحريك النسبي للأجسام المتواصلة

7) المعادلات غير النسبية للسوائل في أنظمة الإحداثيات المتعامدة:

لنفترض أن جسماً متواصلاً ذو كثافة كتلة μ وسرعة v في كل نقطة P(x) من هذا الجسم. ترتبط v و μ بمعادلة الاستمرار التي تنص على أن التغير في كتلة جزء $d\mathcal{V}$ من هذا الجسم يساوي تـدفق كتلة المـادة التي تخترق السطـح d S المحيط بالحجم $d\mathcal{V}$. مما يعطي:

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \mu}{\partial t}\, d\mathcal{V} = -\int_{S} \mu v_n \cdot dS = -\int_{\mathcal{V}} \operatorname{div}(\mu v)\, d\mathcal{V} \qquad \text{(VIII-103)}$$

أو:

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \operatorname{div}(\mu v) = 0. \qquad \text{(VIII-104)}$$

الجزء $d\mathcal{V}$ من هذا الجسم الذي يحتوي على الكتلة $dm = \mu d\mathcal{V}$ هو بحالة توازن equilibrium تحت تأثير القوى التالية:

1 ـ القوة العطالية:

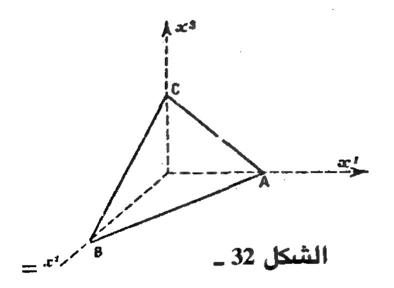
$$dm \cdot \gamma = \mu\, \gamma\, d\mathcal{V} \qquad \text{(VIII-105)}$$

حيث ترمز γ إلى متَّجِه التسارع:

$$\gamma = (\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3) \quad , \quad \gamma^r = \frac{\partial v^r}{\partial t}. \qquad \text{(VIII-106)}$$

2 ـ مجموع القوى الخارجية على الحجم $d\mathcal{V}$: وهي بالصيغة: $f d\mathcal{V}$

3 ـ القوى السطحية: وهي قوى التفاعل (ضغط أو شد) بين أجزاء الجسم على جهتي السطح dS وهي بالصيغـة pd S ـ. ويمكن أن نثبت أن المركَّبـة $P^r dS$ للقوى السطحية تكتب أيضاً[9]:



ـ الشكل 32 ـ

(9) لذلك نأخذ مثلاً مجسماً ربـاعي الأوجه (انظـر الرسم 32) وجوهه OBC و OCA وOAB و ABC تكتب على التوالي $dS^{23} = \alpha_1 dS$ و $dS^{31} = \alpha_1 dS$ و $dS^{12} = \alpha_3 dS$ و $ABC = dS$ حيث α هـو المتَّجِه الأحـادي العمودي على dS. القوى المؤثرة على الأوجه الأربعة هي:

$$\pi_{23}\, dS_{23} \;,\; \pi_{31}\, dS^{31} \;,\; \pi_{12}\, dS^{12} \;,\; -PdS$$

(VIII-107) $$P^r dS = p^{rq}\, d\sigma_q$$

حيث $d\sigma_q$ تمثل مركّبات متّجِه يساوي طوله مساحة السطح dS ويكون عموديًّا عليه.

إن شروط التوازن للحجم $\mathscr{V}$ هي انعدام القوة الإجمالية على هـذا الحجم وانعدام عزم هذه القوى في النقطة O مثلاً:

(VIII-108) $$f^r d\mathscr{V} - p^{rq}\, d\sigma_q - \mu\gamma^r d\mathscr{V} = 0$$

فإذا استعملنا نظام إحداثيات متعامدة نجد:

(VIII-109) $$\int_{\mathscr{V}} (f^r - \mu\gamma^r)\, d\mathscr{V} - \int_S p^{rq}\, d\sigma_q = 0$$

(VIII-110) $$\int_{\mathscr{V}} \left[\, x^S (f^r - \mu\gamma^r) - x^r (f^S - \mu\gamma^S) \,\right] d\mathscr{V} - \int_S (x^S p^{rq} - x^r p^{Sq})\, d\sigma_q = 0.$$

وإذا حوّلنا التكامل على السطح إلى تكامل حجمي باستعمال قاعدة غرين نجد:

(VIII-111) $$f^r - \mu\gamma^r - \partial_q p^{rq} = 0$$

= فتكون شروط التوازن لهذا المجسَّم:

$$\pi_{23}\, dS^{23} + \pi_{31}\, dS^{31} + \pi_{12}\, dS^{12} - PdS + fd\mathscr{V} = \mu\gamma d\mathscr{V}.$$

فإذا أخذنا الحدود $\frac{d\sigma}{dS}$ منعدمة حين يصبح المجسَّم صغيرا جدا نجد شرط التوازن:

$$\alpha_1\pi_{23} + \alpha_2\pi_{31} + \alpha_3\pi_{12} - P = 0$$

أي:

$$PdS = \pi_{23}\, dS^{23} + \pi_{31}\, dS^{31} + \pi_{12}\, dS^{12} = \frac{1}{2}\ \epsilon^{pqr}\, \pi_{pq}\, d\sigma_r$$

حيث وضعنا $dS^{pq} = \epsilon^{pqr}\, d\sigma_r$ مع ϵ^{pqr} كرمز التبادلات، أي أن $\epsilon^{\mu q r} = +1, -1, 0$ حسب ما تكون r, p, q تبادلاً مزدوجا أو منفردا للأعداد 1,2,3 أو أن يكون إثنان من المؤشرات p,q,r على الأقل متساويين. فتكون المركّبات $P^r dS$ للمتّجِه PdS دوال خطية بالكمية $d\sigma_r$ وتكتب:

$$P^r dS = p^{rq}\, d\sigma_q$$

حيث وضعنا $p^{rq} = \frac{1}{2}\ \epsilon^{rps}\, \pi^q_{ps}$ انظر مثلاً:

A. LICHNEROWICZ [35] p.153.
BRICARD. Le calcul vectoriel p.159.

لأن العلاقة (VIII-109) صحيحة لكل حجم $\mathcal{V}$. فإذا أخذنا بعين الإعتبار العلاقة (VIII-111) نجد أن الشرط (VIII-1110) مستوفى دائماً إذا كان الموتر p^{rq} متناظراً:

$$p^{rq} = p^{qr} \qquad \text{(VIII-112)}$$

8) المعادلات النسبية للأجسام المتواصلة:

لنستعمل نظام إحداثيات متعامداً ومرتبطاً بالحجم $d\mathcal{V}$ (أي هيكل الاسناد الذاتي) فنجد:

$$\nu^q = 0 \qquad \text{(VIII-113)}$$

ولكن مشتقات ν^q لا تنعدم بشكل عام.

لنعد إلى المعادلات غير النسبية للأجسام المتواصلة أي المعادلات (VIII-105) و (VIII-111) التي تدخل فيها كثافة الزُّخم.

$$p^q = \mu\nu^q \qquad \text{(VIII-114)}$$

بحيث إن:

$$\frac{\partial \nu^q}{\partial t} = \mu \frac{\partial \nu^q}{\partial t} = \mu\gamma^q \qquad \text{(VIII-115)}$$

استناداً إلى التحديد (VIII-106)، وتكتب أيضاً هذه المعادلات بالصيغ:

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \partial_r p^r = 0 \qquad \text{(VIII-116)}$$

$$\frac{\partial p^r}{\partial t} + \partial_q p^{rq} = f^r \qquad \text{(VIII-117)}$$

في أية نظرية نسبية يتلقى الزُّخم مساهمة من كل أشكال الطاقة. سوف نكتفي هنا بأشكال الطاقة الميكانيكية مستبعدين مثلاً كل مساهمة كهرمغنطيسية. فيحتوي المتَّجِه P^r للزُّخم على ما يلي:

— الجزء السابق $p^r = \mu\nu^r$.

— الجزء الناتج عن التفاعلات داخل الجسم. فإذا تحرك السطح خلال الوقت dt مسافة $\nu_r dl$ يكون شغل القوى السطحية

$$P^r\, dS \cdot \nu_r\, dl = p^{rq}\, d\sigma_q \nu^r\, dl. \tag{VIII-118}$$

مما يعني أن تدفق الطاقة خلال السطح dS هو $-p^{rq}\nu_q$ ويعادل هـذا زخماً مسـاوياً

$$-\frac{1}{c^2}\; p^{rq}\nu_q$$

من المنـاسب إذاً أن نستبدل في المعـادلات (VIII-116) و (VIII-117) المـركّبـات p^r بالمركّبات:

$$P^r = p^r - \frac{1}{c^2}\; p^{rq}\nu_q = \mu\nu r - \frac{1}{c^2}\; p^{rq}\nu_q. \tag{VIII-119}$$

فنجد:

$$\frac{\partial\mu}{\partial t} + \partial_r\left(\mu\nu^r - \frac{1}{c^2}\; p^{rq}\nu_q\right) = 0 \qquad (p, q, r = 1, 2, 3) \tag{VIII-120}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu\nu^r - \frac{1}{c^2}\; p^{rq}\nu_q\right) + \partial_q p^{rq} = f^r. \tag{VIII-121}$$

نـريد أن نكتب أولاً المعـادلات النسبية لـلأجسام المتـواصلة في هيكـل الاسنـاد الذاتي أي الهيكل الذاتي تكون فيه السرعة:

$$u^p = 0 \quad , \quad u^0 = 1 \tag{VIII-122}$$

ولكن الكميـات u^μ هي مركّبـات متّجِه منظّم ($u^\mu u_\mu = 1$) ممـا يعني أن في جميع الهياكل الاسنادية:

$$u_\mu \partial_\lambda u^\mu = 0 \tag{VIII-123}$$

فنجد في هيكل الاسناد الذاتي إذا استعملنا الصيغة (VIII-123) أن:

$$\partial_\lambda u^p = \frac{1}{c}\; \partial_\gamma \nu^p \quad \partial_\lambda u^0 = 0 \tag{VIII-124}$$

نحدِّد إذاً المتّجِه F^μ والموتّر $P^{\mu\nu}$ بالمركّبات التالية في الهيكل الاسنادي الذاتي:

$$F^p = f^p \quad , \quad F^0 = 0 \tag{VIII-125}$$

$$P^{pq} = P^{0q} \quad , \quad P^{p0} = P^{0p} = P^{00} = 0 \tag{VIII-126}$$

هكذا يمكن أن نكتب إذا أخذنا الصيغة (VIII-122) بالحسبان:

$$P^{\mu\nu}u_\nu \equiv 0 \quad , \quad F^\mu u_\mu = 0 \qquad \text{(VIII-127)}$$

نلاحظ أن المعادلات (VIII-120) و (VIII-121) يمكن أن تكتب بمعادلة واحدة:

$$\boxed{\partial_\mu (\mu c^2 u^\mu u^\rho + P^{\mu\rho}) = F^\rho} \qquad (\mu, \rho = 1, 2, 3, 0) \qquad \text{(VIII-128)}$$

للتأكد من ذلك نضع أولاً $\rho = r = 1, 2, 3$ فنجد:

$$\partial_q (\mu c^2 c^q u^r + p^{qr}) + \partial_0 (\mu c^2 u^r + P^{0r}) = f^r \qquad \text{(VIII / 129)}_1$$

ثم $\rho = 0$ فنجد:

$$\partial_r (\mu c^2 u^r + P^{r0}) + \partial_0 (\mu c^2 + P^{00}) = 0 \qquad \text{(VIII-129)}_2$$

أيّ إذا أخذنا بالحسبان المعادلات (VIII-122) و (VIII-124) و (VIII-126) المكتوبة في الهيكل الاسنادي الذاتي:

$$\partial_q P^{qr} + \mu \frac{\partial \nu^r}{\partial t} + \partial_0 P^{0r} = f^r \qquad \text{(VIII-130)}$$

$$\mu c \partial_r \nu^r + \partial_r P^{r0} + c \frac{\partial \mu}{\partial t} + \partial_0 P^{00} = 0. \qquad \text{(VIII-131)}$$

ولكن استناداً إلى (VIII-127):

$$\partial_\gamma (P^{\mu\nu} u_\nu) = 0 \qquad \text{(VIII-123)}$$

نجد إذاً في الهيكل الاسنادي الذاتي:

$$\partial_\lambda P^{\mu 0} + \frac{p^{\mu q}}{c} \partial_\lambda \nu_q = 0 \qquad \text{(VIII-133)}$$

أي:

$$\partial_\lambda P^{r0} = - \frac{p^{rq}}{c} \partial_\lambda \nu_q \quad , \quad \partial_\lambda P^{00} = 0 \qquad \text{(VIII-134)}$$

إذا أحللنا الصيغ (VIII-134) في المعادلة (VIII-130) و (VIII-131) نجد أخيراً المعادلات (VIII-120) و (VIII-121).

لقد كتبنا المعادلة (VIII-128) في الهيكل الاسنادي الذاتي S_0. ولكن صيغتها

التي لا تتبدل في تحويل لورنتز تجعلها صالحة في أي هيكل. فهي إذا معادلة حركة الأجسام المتواصلة في جميع هياكل إسناد المحاور المتعامدة والمنظمة المستعملة في النسبية الخاصة.

أما المعادلات (VIII-120) و (VIII-121) فتُستخلص من (VIII-128) إذا استعملنا هيكل الاسناد الذاتي S_0. فهي إذا صالحة فقط في هذا الهيكل.

9) موتِّر الطاقة والزُّخم المادي

نحدِّد الطاقة والزخم المادي للجسم بالصيغة:

$$M^{\rho\sigma} = \mu_0 c^2 u^\rho u^\sigma + P^{\rho\sigma} \tag{VIII-135}$$

يتعلق الموتِّر $P^{\rho\sigma}$ بالتفاعلات داخل الجسم ويخضع استناداً إلى المعادلات (VIII-127) إلى:

$$P^{\rho\sigma} u\sigma \equiv 0 \quad , \quad \partial_\lambda (P^{\rho\sigma} u_0) = 0. \tag{VIII-136}$$

فتكون حركة الجسم السائل وفقاً للمعادلات:

$$F^\sigma = \partial_\rho M^{\rho\pi}. \tag{VIII-137}$$

فإذا أخذنا بالحسبان المعادلة (VIII-136) وشرط التناظم $u^\mu u_\mu = 1$ نستنتج أن $M^{\rho\sigma}$ تخضع دائماً للشروط التالية:

$$M^{\rho\sigma} u_\tau = \mu_0 c^2 c^\rho. \tag{VIII-138}$$

ومن جهة ثانية نستخلص أيضا من (VIII-127) و (VIII-136) أن:

$$F^\sigma u_\sigma = u_\sigma \partial_\rho (\mu_0 c^2 u^\rho u^\sigma + P^{\rho\sigma}) = 0. \tag{VIII-139}$$

وإذا أخذنا بعين الاعتبار شروط التناظم:

$$u_\sigma u^\sigma = 1 \quad , \quad u_\sigma \frac{du^\sigma}{dx^\rho} = u^\sigma \frac{du_\sigma}{dx^\rho} = 0 \tag{VIII-140}$$

يمكن أن نكتب المعادلة (VIII-139) بالصيغة التالية:

(VIII-141) $$\mu_0 c^2 \partial_\rho u^\rho + u_0 \partial_\rho P^{\rho\sigma} = 0.$$

فإذا أحللنا هذه النتيجة في المعادلة (VIII-137) نجد:

(VIII-142) $$F^\sigma = \partial_\rho \left(\mu_0 c^2 u^\rho u^\sigma + P^{\rho\sigma}\right) = \mu_0 c^2 u^\rho \partial_\rho u^\sigma + \left(\partial^\sigma_\lambda - u^\sigma u_\lambda\right) \partial_\rho P^{\rho\lambda}.$$

10) حالة سائل مثالي

نقول إن السائل مثالي إذا كان موتِّر الضغط يمكن أن يُكتب بدالة عددية واحدة p نسميها الضغط الداخلي للسائل المثالي.

فإذا اعتمدنا نظام محاور مستقيمة ومتعامدة ومنظَّمة بحيث إن:

(VIII-2) $$g_{\mu\nu} = (e_\mu \cdot e_\nu) = \eta_{\mu\nu}.$$

يمكن أن نكتب:

(VIII-143) $$p^{rs} = -p\eta^{rs}$$

فتكون المركَّبات الوحيدة غير المنعدمة للموتِّر p^{rs} هي $p^{11} = p^{22} = p^{33} = p$. ونجد في الهيكل الاسنادي الذاتي استناداً إلى (VIII-126) أن:

(VIII-144) $$P^{rs} = p^{rs} = -p\eta^{rs} \quad , \quad P^{r0} = P^{0r} = P^{00} = 0.$$

أما في هيكل إسناد غاليلي آخر فنجد الموتِّر:

(VIII-145) $$P^{\rho\sigma} = -p(\eta^{\rho\sigma} - u^\rho u^\sigma)$$

الذي يتطابق مع (VIII-144) في الهيكل الاسنادي الذاتي S_0. ويخضع الموتِّر $P^{\mu\sigma}$ إلى المعادلة (VIII-136) بالتطابق.

فيكون موتِّر الطاقة والزَّخم في حالة جسم سائل مثالي استناداً إلى المعادلات (VIII-135) و (VIII-145) بالصيغة:

(VIII-146) $$\boxed{M^{\rho\sigma} = (\mu_0 c^2 + p)\, u^\rho u^\sigma - p\eta^{\rho\sigma}}$$

ملاحظة: إذا كانت التفاعلات داخل الجسم صغيرة جداً يمكن إهمال الموتِّـر $P^{\mu\nu}$ فيصبح موتِّر الطاقة والزَّخم

$$M^{\rho\sigma} = \mu_0 c^2 u^\rho u^\sigma. \qquad \text{(VIII-147)}$$

وفي الحالة الخاصة لجسم سائل مثالي يكون موتِّر الطاقة والزَّخم بالصيغة (VIII-147) إذا كان الضغط الداخلي منعدماً. فنجد عندئذ كما في العلاقة (VIII-20) واستناداً إلى (VIII-142)

$$F^\sigma = \mu_0 c^2 u^\rho \partial_\rho \mu^\sigma \qquad \text{(VIII-148)}$$

ج ـ استعمال الإحداثيّات المنحنية

في الفضاء الرباعي الإقليدي غير الأصيل (فضاء منكوفسكي) يمكن وصف ظواهر علم التحريك والكهرمغنطيسية المتعلقة بمنطقة واسعة من الفضاء باستعمال نظام إحداثيات متعامدة ومنظمة حسب القاعدة (VIII-2). نحصل بهذه الطريقة على المعادلات التي كتبناها في أول هذا الفصل والتي سنكتبها في أول الفصل القادم. وتحافظ هذه المعادلات على صيغتها عند إجراء تحويل لورنتز.

ومن الممكن أيضاً (بل من المناسب أحياناً) أن نعتمد لهذا الفضاء الرباعي الاقليدي غير الأصيل نظام إحداثيات منحنية كالإحداثيات القطبية مثلاً. ومن البديهي أن تغيير الهياكل الاسنادية من هذا النوع لا يخضع للعلاقة (VI - 42) التي تميِّز مجموعة تحويلات لورنتز والتي تطبَّق فقط على الهياكل الاسنادية الغاليلية.

سوف نرى في الفصل الخامس عشر أن الصياغة الرياضية الصالحة للفضاء الاقليدي غير الاصيل في أيّ نظام إحداثيات يبقى صالحاً أيضاً دون تعديل كبير في الفضاء الريماني Riemannian. إن استعمال الإحداثيات المنحنية يصبح ضرورياً في حالة دراسة منطقة واسعة من الفضاء الريماني في حين أنه اختياري في حالة الفضاء الإقليدي. لذلك تُعرض عادة هذه الصياغة لدى دراسة النظريات غير الإقليدية. سوف نعطي في هذا الفصل صيغة معادلات علم التحريك إذا استعملنا الإحداثيات المنحنية في الفضاء الإقليدي. لتطبيق مبادىء النسبية الخاصة، أي تحويل لورنتز، على هذه الصياغة من المناسب طبعاً أن نكتبها أولاً في نظام محاور متعامدة ومنظمة. فنجد هكذا العلاقات التي حصلنا عليها في الأجزاء A و B من هذا الفصل.

11) مسار جسيم نقطي في نظام وحدات منحنية

لنحدِّد في الفضاء الإقليدي نظاماً للإحداثيات المنحنية (y^μ). في كل نقطة في هذا الفضاء نحدِّد هيكلاً إسنادياً طبيعياً e_μ يتألف من المتَّجهات الأحادية المماسة للخطوط y^μ. نجد أنه من المناسب أن نستبدل في كل الصيغ السابقة المشتقات العادية بالمشتقات الموافقة للتغيّر (المحددة في الفصل العاشر الجزء 10).

لنفترض أن جسيماً نقطياً يتحرك بحيث يكون موقعه معروفاً تبعاً لمتغيِّر وسيطي λ (مرتبط بالوقت) نحدِّد السرعة بالمتَّجِه الرباعي:

$$u = \frac{dM}{d\lambda} \qquad \text{(VIII-149)}$$

ذي المركِّبات:

$$u^\mu = \frac{dy^\mu}{d\lambda}\ . \qquad \text{(VIII-150)}$$

أما تسارع الجسيم فهو:

$$\gamma = \frac{du}{d\lambda} \qquad \text{(VIII-151)}$$

وبمركِّبات:

$$\gamma^\mu = \frac{\nabla u^\mu}{d\lambda} = u^\rho \nabla_\rho u^\mu \qquad \text{(VIII-152)}$$

حيث تمثل ∇u^μ المركِّبات المخالفة للتغيُّر للمتجه الرباعي du في هيكل الاسناد الطبيعي e^μ. فنجد:

$$\gamma^\mu = \frac{d}{d\lambda}\left(u^\mu + \left\{ {\mu \atop \nu\sigma} \right\} u^\nu\, dy^\sigma\right) = \frac{dy^\mu}{d\lambda} + \left\{ {\mu \atop \nu\sigma} \right\} u^\nu u^\sigma \qquad \text{(VIII-153)}$$

يتحرك الجسيم على خطٍ مستقيم في الفضاء الرباعي إذا كان تسارعه منعدماً. فتكون معادلة هذا الخط في نظام الإحداثيات المنحنية:

$$\frac{du^\mu}{d\lambda} + \left\{ {\mu \atop \nu\sigma} \right\} u^\nu u^\sigma = 0. \qquad \text{(VIII-154)}$$

أو:

$$\frac{d^2y^\mu}{d\lambda^2} + \left\{ {\mu \atop \nu\sigma} \right\} \frac{dy^\nu}{d\lambda}\ \frac{dy^\sigma}{d\lambda} = 0. \qquad \text{(VIII-155)}$$

وهي صالحة في هيكل اسناد منحنٍ. ومن الممكن أن نستعمل المسافة S على المسار أو الوقت t كمتغيرٍ وسيطي λ.

أما إذا كانت المحاور المستعملة مستقيمة (منحنية أو متعامدة) فتكون الكميات $g_{\mu\nu}$ ثابتة والرموز $\{\rho_{\mu\nu}\}$ منعدمة. فتصبح معادلة المسارات التي تخطها الجسيمات الحرة في نظام المحاور المستقيمة (x^μ).

$$\frac{d^2y^\mu}{d\lambda^2} = 0. \qquad \text{(VIII-156)}$$

وتحدِّد هذه المعادلات الحركة المستقيمة بسرعة ثابتة لجسم حر في هيكل الاسناد الغاليلي فتصبح:

$$\frac{d^2x^\rho}{dt^2} = 0. \qquad \text{(VIII-157)}$$

أما في نظام الإحداثيات المنحنية فتكون معادلة المسارات المستقيمة ($\gamma^\mu = 0$):

$$\boxed{\frac{d^2y^\mu}{d\lambda^2} + \left\{{\mu \atop \nu\sigma}\right\} \frac{dy^\nu}{d\lambda} \frac{dy^\sigma}{d\lambda} = 0} \quad \text{أو} \quad \boxed{u^\rho \nabla_\rho u^\mu = 0} \qquad \text{(VIII-158)}$$

مما يعني أن هذه الخطوط المستقيمة هي أيضا الخطوط التقاصرية (الجيوديسية) في هذا الفضاء الإقليدي غير الأصيل.

12) القانون الأساسي لعلم تحريك الجسيمات النقطية

إذا كان جسيم نقطي خاضعا لقوة F تكون حركته خاضعة للمعادلة (VIII-18):

$$F = m_0 \frac{d\bar{u}}{d\tau} = m_0c^2 \frac{du}{ds}$$

كما كتبناها في المقطع الثاني. وتبقى هذه المعادلة صالحة في حال استعمال إحداثيات منحنية شرط استبدال التغيرات ∇u^μ بالتفاضل المطلق du^μ فنجد:

$$F^\mu = m_0c^2 \frac{\nabla u^\mu}{ds} \qquad \text{(VIII-159)}$$

أي:

$$F^\mu = m_0c^2 \frac{dy^\rho}{ds} \nabla_\rho u^\mu = m_0c^2u^\rho\nabla_\rho u^\mu. \qquad \text{(VIII-160)}$$

ويمكن كتابة الصيغة (VIII-159) أيضا بالصيغة:

$$\text{(VIII-161)} \qquad F^\mu = m_0c^2\left(\frac{du^\mu}{ds} + \left\{ {\mu \atop \nu\sigma} \right\} u^\nu \frac{dy^\sigma}{ds}\right)$$

أو:

$$\text{(VIII-162)} \qquad \boxed{F^\mu = m_0c^2\left(\frac{d^2y^\mu}{ds^2} + \left\{ {\mu \atop \nu\sigma} \right\} \frac{dy^\nu}{ds} \frac{dy^\sigma}{ds}\right)}$$

بدلاً عن الخط المستقيم المحدَّد بالمعادلة (VIII-158) في نظام الإحداثيات المنحنية يخط الجسيم الخاضع لقوة F مساراً خاضعاً للمعادلة (VIII-162). وبشكل خاص إذا كان الجسيم مشحوناً وخاضعاً لمجال كهرمغنطيسي تكون القوة F^μ قوة لورنتز المحددة بالصيغة (IX - 35)

13) حركة سائل متجانس ـ موتِّر المادة

يدخل في الصيغة (VIII-135) الموتِّر المتناظر من الرتبة الثانية والمسمى موتِّر المادة للطاقة والزَّخم:

$$\text{(VIII-135)} \qquad M^{\rho\sigma} = \mu_0c^2u^\rho u^\sigma + P^{\rho\sigma}.$$

حيث μ_0 هي كثافة كتلة السائل المتجانس homogeneous و $P^{\rho\sigma}$ هو موتِّر يتعلق بالتفاعلات (الضغط أو الشد) داخل السائل. ونجد كما في المعادلة (VIII-127):

$$\text{(VIII-163)} \qquad P^{\rho\sigma}u_\sigma = 0.$$

فإذا أخذنا بعين الإعتبار التناظم $u^\sigma u_\sigma = 1$ نستنتج كما في المعادلة (VIII-138) أن

$$\text{(VIII-164)} \qquad M^{\rho\sigma}u_\sigma = \mu_0c^2c^\rho$$

وفي الحالة الخاصة لسائل مثالي يكون الموتِّر $P^{\rho\sigma}$ بالصيغة

$$\text{(VIII-165)} \qquad P^{\rho\sigma} = p(u^\rho u^\sigma - g^{\rho\sigma}).$$

التي هي تعميم للصيغة (VIII-145) وذلك باستبدال $\eta^{\rho\sigma}$ (العائد لهيكل إسناد

غاليلي) بالموتّر $g^{\rho\sigma}$ (العائد للإحداثيات المنحنية بشكل عام). فنجد استناداً إلى الصيغة (VIII-135) أن:

$$M^{\rho\sigma} = (\mu_0 c^2 + p)\, u^\rho u^\sigma - p g^{\rho\sigma} \qquad \text{(VIII-166)}$$

في حالة سائل مثالي يكون الشرط (VIII-163) مستوفى بالتطابق لأن الموتر $P^{\rho\sigma}$ هو بالصيغة (VIII-165).

وتسبّب القوة F^μ التي يخضع لها كل حجم من السائل المتجانس حركة داخل هذا السائل خاضعة للمعادلة (VIII-137) في الإحداثيات المستقيمة. أما في الإحداثيات المنحنية فيجب استبدال المشتقات العادية بالمشتقات الموافقة للتغيّر فنجد:

$$F^\mu = \nabla_\rho M^{\mu\rho} \qquad \text{(VIII-167)}$$

أي:

$$F^\mu = \mu_0 c^2 \left(u^\rho \nabla_\rho u^\mu + u^\mu \nabla_\rho u^\rho\right) + \nabla_\rho P^{\mu\rho}. \qquad \text{(VIII-168)}$$

ولكن القوة الرباعية F^μ تخضع كما في المعادلة (VIII-127) لعلاقة التعامد

$$F^\mu u_\mu = 0. \qquad \text{(VIII-169)}$$

فإذا استعملنا هذه الخاصة في المعادلة (VIII-168) بالإضافة إلى العلاقات:

$$u_\mu u^\mu = 1 \quad , \quad u^\mu \nabla_\rho u_\mu = u_\mu \nabla_\rho u_\mu = 0. \qquad \text{(VIII-170)}$$

نجد:

$$u_\mu \nabla_\rho P^{\mu\rho} + \mu_0 c^2 \nabla_\rho u^\rho = 0. \qquad \text{(VIII-171)}$$

ومن جهة أخرى في حالة غاز مثالي تقود الصيغة (VIII-165) للموتّر $P^{\mu\rho}$ إلى المعادلة:

$$u_\mu \nabla_\rho P^{\mu\rho} = u_\mu \nabla_\rho\, P(u^\mu u^\rho - g^{\mu\rho}) = p \nabla_\rho u^\rho. \qquad \text{(VIII-172)}$$

مما يعني أنه في حالة غاز مثالي تكـون المعادلات (VIII-169) وبـالنتيجة (VIII-171) مستوفاة إذا كانت معادلة الاستمرارية

(VIII-173) $$\nabla_\rho u^\rho = 0$$

صحيحة.

14) معادلات الحفظ ومعادلات الحركة

تتميز حركة السوائل المتجانسة بمجموعتين من المعادلات:

1 ـ **معادلات الحفظ**: وتستخلص من الصيغ السـابقة بحسـاب تكامـل الكثافـة الثابتة في التحويل (ارجع إلى المقطع 11 من الفصل الرابع عشر)

(VIII-174) $$\sqrt{-g}\;\; u_\mu F^\mu = \sqrt{-g}\;\; u^\mu \nabla_\rho M_\mu{}^\rho$$

على الأجزاء التفاضلية للحجم الرباعي $d\tau = dy^1 \wedge dy^2 \wedge dy^3 \wedge dy^0$ فنجد:

(VIII-175) $$\int (u^\mu \nabla_\rho M^\rho_\mu)\, \sqrt{-g}\;\; d\tau = 0.$$

2 ـ **معادلات الحركة**: ونحصل عليها بواسطة الكثافـة المتجهية الـرباعيـة التي تكوِّنها انطلاقاً من المعادلة (VIII-167):

(VIII-176) $$\sqrt{-g}\;\; F^\rho = \sqrt{-g}\;\; \nabla_\rho M^{p\rho}$$

ثم بحساب التكامل على الحجم الثلاثي التفاضلي $d\mathscr{V} = dy^1 \wedge dy^2 \wedge dy^3$.

تكتب إذاً معادلات الحركة لسائل متجانس كما يلي

(VIII-177) $$\int F_p \sqrt{-g}\;\; d\mathscr{V} = \int (\nabla_\rho M^\rho_p)\, \sqrt{-g}\;\; d\mathscr{V} = 0.$$

لكتـابة هـذه المعادلـة بصيغ أخـرى نستعمل المعـادلـة التطـابقيـة $M^\rho_p = g_{p\lambda} M^{\lambda\rho}$ الصالحة لأي موتّر متناظر $M^{\rho\sigma}$ فنجد:

(VIII-178) $$\sqrt{-g}\;\; \nabla_\rho M^\rho_p = \sqrt{-g}\;\; \left(\partial_\rho M^\rho_p - \left\{ {\sigma \atop p\rho} \right\} M^\rho_\sigma + \left\{ {\rho \atop \sigma\rho} \right\} M^\sigma_p \right)$$

$$= \partial_\rho \mathscr{M} p^\rho - \frac{\sqrt{-g}}{2}\, M^{\lambda\rho} (\partial_p\, g_{\rho\lambda} + \partial_\rho g p^\lambda - \partial_\lambda g p^\rho)$$

$$= \partial_\rho \mathscr{M}_0 p^\rho - \frac{1}{2}\;\; \mathscr{M}^{\lambda\rho\partial}\, p g^{\lambda\rho}$$

مع:

$$\mathcal{M}\mu^{\rho} = \sqrt{-g}\ M^{\rho}_{\mu} \quad , \quad \mathcal{M}^{\lambda\rho} = \sqrt{-g}\ M^{\lambda\rho}. \qquad \text{(VIII-179)}$$

وإذا أخذنا بعين الاعتبار المعادلة (VIII-178) تكتب معادلات الحركة (VIII-177) بالصيغة التالية:

$$\int F_{\rho} \sqrt{-g}\ d\mathcal{V} = \int \left(\partial_{\rho}\mathcal{M}p^{\rho} - \frac{1}{2}\ \mathcal{M}^{\lambda\rho\partial}\ pg_{\lambda\rho}\right) d\mathcal{V} = 0. \qquad \text{(VIII-180)}$$

15) حالة خاصة: معادلات الحفظ ومعادلات الحركة لسائل مثالي

1 ـ معادلات الحفظ:

لننطلق من الصيغة (VIII-166) للمركّبات $M^{\rho\sigma}$ لموتّر الطاقة والزّخم المادي في حالة سائل مثالي. فنستنتج منها:

$$M^{\rho}_{\mu} = (\mu_0 c^2 + p)\ u_{\mu}u^{\rho} - p\partial^{\rho}_{\mu}. \qquad \text{(VIII-181)}$$

وتكتب معادلات الحفظ (VIII-175) بالصيغة التالية:

$$\int \sqrt{-g}\ \left(\mu_0 + \frac{p}{c_2} \right) \nabla_{\rho}u^{\rho}\ d\tau = 0 \qquad \text{(VIII-182)}$$

بعد أخذ الشروط (VIII-170) بعين الإعتبار. فيتخذ التكامل في الصيغة (VIII-182) الصيغة التالية:

$$\int \sqrt{-g}\ \left(\mu_0 + \frac{p}{c_2} \right) \nabla_{\rho}u^{\rho}\ d\tau = \int \partial_{\rho}\left(\mu_0 \sqrt{-g}\ \ u^{\rho}\right) d\tau + \int \frac{p}{c_2}\ \partial_{\rho}\left(\sqrt{-g}\ \ u^{\rho}\right) d\tau = 0 \qquad \text{(VIII-183)}$$

لنحسب هذا التكامل على الأنبوب الكوني الذي تشكله خطوط الحركة ويحده مقطعان Σ و Σ'. يمكن تحويل التكامل الأول في المعادلة (VIII-183) باستعمال قاعدة غرين ليصبح تدفق المتّجه الرباعي $\mu_0\sqrt{-g}u^{\rho}$ من خلال السطح المُغلق المحيط بالأنبوب الكوني والمؤلف من السطح الجانبي L للأنبوب والمقطعين Σ و Σ'. وإذا وضعنا:

$$dS_{\rho} = \frac{\sqrt{-g}}{6}\ \ \epsilon_{\rho\mu\nu\sigma}\, dy^{\mu} \wedge dy^{\nu} \wedge dy^{\sigma} \qquad \text{(VIII-184)}$$

تكتب المعادلة (VIII-183) بالصيغة التالية:

$$\int_{L+\Sigma-\Sigma'} \mu_0 \sqrt{-g}\ \ u^\rho\, dS_\rho + \int \frac{p}{c_2}\ \partial_\rho (\sqrt{-g}\ \ u^\rho)\, d\tau = 0. \tag{VIII-185}$$

ولكن التكامل على السطح الجانبي L الذي تشكله خطوط الحركة لا يعطي أيّة مساهمة. وإذا انعدم الضغط الداخلي للسائل $(p = 0)$ تتحول المعادلة (VIII-185) إلى قانون حفظ الكتلة:

$$m = m' \tag{VIII-186}$$

حيث m و m' تمثلان الكتلة التي تخترق السطحين Σ و Σ' وتحددان كما يلي:

$$m = \int_\Sigma \mu_0 \sqrt{-g}\ \ u^\rho\, dS_\rho = \int_\Sigma \mu\, dS_0 \tag{VIII-187}$$

إذا وضعنا:

$$\mu = \mu_0 \sqrt{-g}\ \ u^0. \tag{VIII-188}$$

2 ـ معادلات الحركة

نستخلص معادلات الحركة من المعادلات (VIII-180) باستبدال $M_p{}^\rho$ بالصيغة التي يمكن استنتاجها من المعادلة (VIII-181). وفعلاً نجد انطلاقا من الصيغة (VIII-106) أن:

$$\mathcal{M}_p^q = \sqrt{-g}\ \left[c^2 + \left(\mu_0 + \frac{p}{c_2}\right) u_p u^q - p\delta_p^q \right] \tag{VIII-189}$$

$$= \sqrt{-g}\ \left[c^2 \left(\mu_0 + \frac{p}{c_2}\right) \nu_p\ \frac{\nu^q (u^0)^2}{c^2} - p\delta_p^q\right]$$

$$\mathcal{M}_p{}^0 = \sqrt{-g}\ \ c^2 \left(\mu_0 + \frac{p}{c_2}\right) u_p u^0 \tag{VIII-190}$$

$$= \sqrt{-g}\ \ c^2 \left(\mu_0 + \frac{p}{c_2}\right) \frac{\nu_\rho (u^0)^2}{c}.$$

فإذا قارنا الصيغتين (VIII-189) و (VIII-190) يُمكن أن نكتب:

$$\mathcal{M}_p{}^q = \mathcal{M}_p{}^0 \frac{\nu^q}{c} - p \sqrt{-g}\ \ \delta_p^q. \tag{VIII-91}$$

فنجد بهذه الطريقة:

$$\partial_\rho \mathcal{M}_p^\rho = \partial_0 \mathcal{M}_p^0 + \partial_q \mathcal{M}_p^q = \partial_0 \mathcal{M}_p^0 + \frac{v^q}{c} \partial_q \mathcal{M}_p^0 \quad \text{(VIII-192)}$$

$$- \partial_p (\sqrt{-g}p) = d_0 \mathcal{M}_p^0 - \partial_p (\sqrt{-g}p).$$

وتأخذ معادلة الحركة (VIII-180) الصيغة التالية

$$\int F_p \sqrt{-g} \; d\mathcal{V} = \int d_0 \mathcal{M}_p^0 \, d\mathcal{V} - \int \partial_p (\sqrt{-g}p) \, d\mathcal{V} \quad \text{(VIII-193)}$$

$$- \frac{1}{2} \int \mathcal{M}^{\lambda\rho} \partial_p f_{\lambda\rho} \, d\mathcal{V} = 0.$$

ولا يعطي التكامل الثالث (الذي هو تباعد رباعي) أية مساهمة. فتكتب المعادلة (VIII-193) بالصيغة:

$$\boxed{\int F_p \sqrt{-g} \; d\mathcal{V} = \int \frac{d \mathcal{L}_p}{d t} \, d\mathcal{V} - \frac{1}{2} \int \mathcal{M}^{\lambda\rho} \partial_p g^{\lambda\rho} \, d\mathcal{V}} \quad \text{(VIII-194)}$$

حيث وضعنا:

$$\mathcal{L}_p = \frac{1}{c} \mathcal{M}_p^0 = \sqrt{-g} \left(\mu_0 + \frac{p}{c_2} \right) \nu_p (u^0)^2 \quad \text{(VIII-195)}$$

هكذا تبدو الكميات $\mathcal{L}_p = \frac{1}{c} \mathcal{M}_p^0$ كأنها زخم للمادة استناداً إلى معادلات حركة السائل المثالي المكتوب في نظام الإحداثيات المنحنية بشكل عام.

الكهرمغنطيسية النسبية

1 ـ الصيغة الموافقة للتغيُّر لنظرية ماكسويل

1) المجال الكهرمغنطيسي ـ الموتّر الكهرمغنطيسي من الرتبة الثانية

نستعمل في ما يلي الإحداثيات الرباعية الحقيقية, x^μ ($x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$, $x^0 = ct$) مستعملين محاور متعامدة ومنظّمة وفق:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$$

أي:

$$g_{pq} = g^{pq} = -\delta_{pq} \quad , \quad g_{p0} = -g^{p0} = 0 \quad , \quad g_{00} = g^{00} = 1$$

نعيد كتابة معادلات ماكسويل

(I)
$$\begin{cases} \text{(a)} \quad \text{curl } H - \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial D}{\partial t} = \dfrac{4\pi I}{c} \\ \text{(b)} \quad \text{curl } E + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial B}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

(III)
$$\begin{cases} \text{(a)} \quad \text{div } D = 4\pi\rho \\ \text{(b)} \quad \text{div } B = 0 \end{cases}$$

فإذا استعملنا الترميز

$$(IX\text{-}1) \qquad \partial_p = \frac{\partial}{\partial x^\rho} \ (P = 1, 2, 3) \quad , \quad \partial_0 = \frac{\partial}{\partial x^0} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}$$

وإذا أدخلنا المركّبات التالية لكثافة التيار:

$$(IX\text{-}2) \qquad \boxed{J_\mu = \left(-\frac{4\pi I}{c} \quad , \quad 4\pi\rho \right)}$$

نجد أن المجموعتين (I) و (III) لمعادلات ماكسويل تكتبان بالصيغة:

	(a)	(b)
(I)	$\partial_p H_q - \partial_q H_p - \partial_0 D_r = -J_r$	$\partial_p E_q - \partial_q E_p - \partial_0 B_r = 0$
(III)	$\sum_p \partial_p D_p = J_0$	$\sum_p \partial_p B_p = 0$

حيث تشكّل المؤشرات p, q, r تبديلاً دائريا للقيم 1,2,3.

إذا أجرينا تحويل لورنتز الخاص:

$$(IX\text{-}3) \quad x'^1 = \frac{x^1 - \beta x^0}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \quad x'^2 = x^2 \quad , \quad x'^3 = x^3 \quad , \quad x'^0 = \frac{x^0 - \beta x^1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

تحافظ المعادلات (I) و (III) على صيغتها أي أنها تكتب بالصيغة[1]:

---

(1) نثبت هنا كتمرين ان مجموعتي معادلات ماكسويل تحافظ على صيغتها عند اجراء تحويل لورنتز. فاستنادا إلى التحويل (IX-3) نكتب:

$$\partial_1 = \frac{\partial'_1 - \beta\partial'_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \ , \ \partial_2 = \partial'_2 \ , \ \partial_3 = \partial'_3 \ , \ \partial_0 = \frac{\partial'_0 - \beta\partial'_1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

لأن:

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\lambda}\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\mu}\partial'_\lambda .$$

فنكتب المجموعتان (a) و (b) بالتفصيل كما يلي:

=

(a)

$$(I)\quad \begin{aligned} &\partial'_2 H_3 - \partial'_3 H_2 - \left(\frac{\partial'_0-\beta\partial'_1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) D_1 = -J_1 \\ &\partial'_3 H_1 - \left(\frac{\partial'_1-\beta\partial'_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) H_3 - \left(\frac{\partial'_0-\beta\partial'_1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) D_2 = -J_2 \\ &\left(\frac{\partial'_1-\beta\partial'_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) H_2 - \partial'_2 H_1 - \left(\frac{\partial'_0-\beta\partial'_1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) D_3 = -J_3 \end{aligned}$$

(b)

$$(I)\quad \begin{aligned} &\partial'_2 E_3 - \partial'_3 E_2 + \left(\frac{\partial'_0-\beta\partial'_1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) B_1 = 0 \\ &\partial'_3 E_1 - \left(\frac{\partial'_1-\beta\partial'_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) E_3 + \left(\frac{\partial'_0-\beta\partial'_1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) B_2 = 0 \\ &\left(\frac{\partial'_1-\beta\partial'_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) E_2 - \partial'_2 E_1 + \left(\frac{\partial'_0 - \beta\partial'_1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) B_3 = 0 \end{aligned}$$

$$(III)\quad \left(\frac{\partial'_1-\beta\partial'_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) D_1 + \partial'_2 D_2 + \partial'_3 D_3 = J_0 \quad\Bigg|\quad \left(\frac{\partial'_1-\beta\partial'_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) B_1 + \partial'_2 B_2 + \partial'_3 B_3 = 0.$$

فإذا افترضنا تحويل المجالات (IX-5) أو التحويل المعاكس:

$$D_1 = D'_1 \;,\; D_2 = \frac{D'_2+\beta H'_3}{\sqrt{1-\beta^2}} \;,\; D_3 = \frac{D'_3-\beta H'_2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$H_1 = H'_1 \;,\; H_2 = \frac{H'_2-\beta D'_3}{\sqrt{1-\beta^2}} \;,\; H_3 = \frac{H'_3+\beta D'_2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$E_1 = E'_1 \;,\; E_2 = \frac{E'_2+\beta B'_3}{\sqrt{1-\beta^2}} \;,\; E_3 = \frac{E'_3-\beta B'_2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$B_1 = B'_1 \;,\; B_2 = \frac{B'_2-\beta E'_3}{\sqrt{1-\beta^2}} \;,\; B_3 = \frac{B'_3+\beta E'_2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\text{(I)} \quad \partial'_p H'_q - \partial'_q H'_p - D'_r = -J'^r \qquad \Bigg| \qquad \partial'_p E'_q - \partial_q E'_p + \partial'_0 B'_r = 0$$

$$\text{(III)} \quad \sum_p \partial'_p D'_p = J'^0 \qquad \Bigg| \qquad \sum_p \partial'_p B'_p = 0$$

فإذا كانت $J\ (J_r, J_0)$ تشكل مركّبات متّجِه رباعي أيّ:

$$\text{(IX-4)} \quad J'_1 = \frac{J_1+\beta J_0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \; J'_2 = J_2 \;,\; J'_3 = J_3 \;,\; J'_0 = \frac{J_0+\beta J_1}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

وإذا كـان المجالان H و D من جهـة والمجالان B و E من جهـة ثانيـة يتحولان من هيكل إسناد إلى آخر كما يلي:

$$\text{(IX-5)}_1 \quad D'_1 = D_1 \;,\; D'_2 = \frac{D_2-\beta H_3}{\sqrt{1-\beta^2}} \;,\; D'_3 = \frac{D_3+\beta H_2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$E'_1 = E_1 \;,\; E'_2 = \frac{E_2-\beta B_3}{\sqrt{1-\beta^2}} \;,\; E'_3 = \frac{E_3+\beta B_2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\text{(IX-5)}_2 \quad H'_1 = H_1 \;,\; H'_2 = \frac{H_2+\beta D_3}{\sqrt{1-\beta^2}} \;,\; H'_3 = \frac{H_3-\beta D_2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$B'_1 = B_1 \;,\; B'_2 = \frac{B_2+\beta E_3}{\sqrt{1-\beta^2}} \;,\; B'_3 = \frac{B_3-\beta E_2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

= نجد أنه لدى احلال هذه الصيغ في (I) و (III) تكتب هذه المجموعتان:

	(a)′	(b)
(I)	$\partial'_2 H'_3 - \partial'_3 H'_2 - \partial'_0 D'_1 + \beta\Sigma_p \partial_p D_p = -J_1\sqrt{1-\beta^2}$	$\partial'_2 E'_3 - \partial'_3 E'_2 + \partial'_0 B'_1 - \beta\Sigma_p \partial'_p B'_p = 0$
	$\partial'_3 H'_1 - \partial'_1 H'_3 - \partial'_0 D'_2 = -J_2$	$\partial'_3 E'_1 - \partial'_1 E'_3 + \partial'_0 B'_2 = 0$
	$\partial'_1 H'_2 - \partial'_2 H'_1 - \partial'_0 D'_3 = -J_3$	$\partial'_1 E'_2 - \partial'_2 E'_1 + \partial'_0 B'_3 = 0$

$$\text{(III)} \quad \Sigma_p \partial'_p D'_p + \beta\left[(\partial'_2 H'_3 - \partial'_3 H'_2) - \partial'_0 D'_1\right] = J_0\sqrt{1-\beta^2}$$

$$\Sigma_p \partial'_p B'_p - \beta\left[(\partial'_2 E'_3 - \partial'_3 E'_2) + \partial'_0 B'_1\right] = 0.$$

فـإذا قابلنـا I′(a) مـع (III) ′(a) و (I) (′b) مـع (III) (′b) نجـد اخـيرا ′I و ′(III) شرط أن تتحـول الكميات ′J وفق (IX-4).

نلاحظ أن قواعد التحويل $(IX\text{-}5)_1$ و $(IX\text{-}5)_2$ تتفق مع الصيغة (VI - 87) الخاصة بتحويل الموتِّر المتخالف التناظر من الرتبة الثانية. لذلك يكفي أن نضع:

$$(IX\text{-}6) \qquad H_p = \epsilon_{pqr} f^{qr} \quad , \quad D_p = f_{p0} = -f^{p0}$$

أي:

$$H_1 = f_{23} = f^{23} \quad , \quad H_2 = f_{31} = f^{31} \quad , \quad H_3 = f_{12} = f^{12}$$

$$D_1 = f_{10} = -f^{10} \quad , \quad D_2 = f_{20} = -f^{20} \quad , \quad D_3 = f_{30} = -f^{30}$$

ومن جهة ثانية

$$(IX\text{-}7) \qquad B_p = \epsilon_{pqr} \varphi^{qr} \quad , \quad E'_p = \varphi_{p0} = -\varphi^{p0}$$

أيّ:

$$B_1 = \varphi_{23} = \varphi^{23} \quad , \quad B_2 = \varphi_{31} = \varphi^{31} \quad , \quad B_3 = \varphi_{12} = \varphi^{12}$$

$$E_1 = \varphi_{10} = -\varphi^{10} \quad , \quad E_2 = \varphi_{20} = -\varphi^{20} \quad , \quad E_3 = \varphi_{30} = -\varphi^{30}$$

كي يكون التحويل (IX-5) مطابقاً تماماً للتحويل (VI - 87). في المعادلات (IX-6) و (IX-7) تأخذ المؤشرات p, q, r القيم 1,2,3 و $\epsilon_{pqr} = +1 \, , \, -1$ تبعاً لكون المؤشرات p,q,r تشكّل تبادلاً مزدوجاً أو منفرداً للأعداد 1,2,3 وينعدم ϵ_{pqr} إذا كان إثنان من المؤشرات p,q,r متطابقين.

هكذا تدمج مركّبات المجال المغنطيسي H ومجال التحريض الكهربائي D لتشكّل مركّبات الموتّر المتخالف التناظر من الرتبة $f_{\mu\nu}$. كذلك تدمج مركّبات المجال الكهربائي E والتحريض المغنطيسي B لتشكّل مركّبات الموتّر المتخالف التناظر $\varphi_{\mu\nu}$. ويمكن أن نكتب التحديدات (IX-6) و (IX-7) بصورة جدول (مشابه للمصفوفات):

$$(IX\text{-}8) \quad f_{\mu\nu} = \begin{vmatrix} 0 & H_3 & -H_2 & D \\ -H_3 & 0 & H_1 & D_2 \\ H_2 & -H_1 & 0 & D_3 \\ -D_1 & -D_2 & -D_3 & 0 \end{vmatrix} , \varphi_{\mu\nu} = \begin{vmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & E_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & E_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & E_3 \\ -E_1 & -E_2 & -E_3 & 0 \end{vmatrix}$$

باستعمال هذه الرموز تكتب المعادلة (a) (I) و (a) (III) بالشكل المبسط:

$$(M_1) \qquad \boxed{\partial_\rho f^{\mu\rho} = J^\mu} \qquad \mu = 1, 2, 3, 0.$$

فـإذا وضعنا $\mu = p = 1, 2, 3,$ نحصـل على المعـادلة (a) (I) وإذا وضعنـا $\mu = 0$ نحصل على المعادلة (a) (III).

ومن جهة ثانية تكتب المعادلات (b) (I) و (b) (III) بالصيغة:

$$(M_2) \qquad \boxed{\partial_\rho \varphi_{\mu\nu} + \partial_\nu \varphi_{\rho\mu} + \partial_\mu \varphi_{\nu\rho} = 0}$$

فإذا أخذنا أحد المؤشرات μ, ν, ρ صفراً نجد المعادلة (b) (I). وإذا أخـذنا μ, ν, ρ تساوي 1,2,3 نجد المعادلة (b) (III).

أخيراً نستنتج مباشرة من المعادلة (M_1) معادلة الاستمرارية:

$$(IX\text{-}9) \qquad \boxed{\partial_\mu J^\mu = 0}$$

وهي مطابقة للمعادلة (III') في الفضـاء الثلاثي التي تعبِّـر عن قانـون حفظ الشحن الكهربائية.

2) الكمون الكهرمغنطيسي

لنكتب من جديد المعادلات (IV) التي تربط بين المجالات E و B والكمون المغنطيسي.

$$(IV\text{ - }a) \qquad E = -\operatorname{grad} V - \frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t}$$

$$(IV\text{ - }b) \qquad B = \operatorname{curl} A.$$

فإذا حدَّدنا المركِّبات φ_μ بأنها:

$$(IX\text{-}10) \qquad \varphi_\mu = (A, -V)$$

تكتب المعادلات (IV) بالصيغة:

$$(IX\text{-}11)_1 \qquad E_p = \partial_p \varphi_0 - \partial_0 \varphi_p$$

$$(IX\text{-}11)_2 \qquad B_p = \partial_q \varphi_r - \partial_r \varphi_q$$

حيث p, q, r هي تبادل دوراني للأعداد 1,2,3. فإذا استعملنا التحديدات (IX-7) يمكن أن ندمج المعادلتين $(IX\text{-}11)_1$ و $(IX\text{-}11)_2$ بمعادلة واحدة:

$$\varphi_{\mu\nu} = \partial_\mu \varphi_\nu + \partial_\nu \varphi_\mu \qquad (M_3)$$

فإذا اخترنا μ أو ν صفراً نجد المعادلة $(IX\text{-}11)_1$ وإذا اخترنا μ و ν غير منعدمتين نجد المعادلة $(IX\text{-}11)_2$.

فالكمون المتجهي A والكمون العددي (السلمي) V يشكلان متجهاً رباعياً φ_μ. ونلاحظ أن هذا المتّجه غير محدَّد تماماً. إذ إنه يمكن أن نزيد عليه التدرّج الرباعي لدالّة عددية (سلمية) اختيارية ψ لتكوين الكمون الرباعي الجديد:

$$\bar{\varphi}_\mu' = \varphi_\mu - \partial_\mu \psi, \qquad (IX\text{-}12)$$

فلا يتغير موتّر المجال الكهرمغنطيسي $\varphi_{\mu\nu}$. ويسمى تحويل الصيغة (IX-12) التحويل المعياري Gauge transformation. هكذا لا يحدَّد الكمون إلّا بإمكانية اجراء تحويل معياري.

3) معادلات ماكسويل وتحويل لورنتز العام

تكتب معادلات ماكسويل بإحدى هاتين الصيغتين المتعادلتين:

$$\partial_\rho f^{\mu\rho} = J^\mu \qquad (M_1)$$
$$\partial_\rho \varphi_{\mu\nu} + \partial_\nu \varphi_{\rho\mu} + \partial_\mu \varphi_{\nu\rho} = 0 \qquad (M_2)$$

أو:

$$\partial_\rho f^{\mu\rho} = J^\mu \qquad (M_1)$$
$$\varphi_{\mu\nu} = \partial_\mu \varphi_\nu - \partial_\nu \varphi_\rho \qquad (M_2)$$

وذلك لأن التحديد (M_2) يقود إلى العلاقة (M_2) بين مركّبات المجال $\varphi_{\mu\nu}$.

نستنتج من المعادلة (M_2):

$$\partial^\mu \varphi_{\mu\nu} = \Box\, \varphi_\nu - \partial_\nu \partial^\mu \varphi_\mu \qquad (IX\text{-}13)$$

حيث:

$$\square = \partial^{\rho}\partial_{\rho} = \eta^{\rho 0}\partial_{\rho}\partial_{0} = \partial_0^2 - \sum_p p_p^2.$$

وإذا كان الكمون الكهرمغنطيسي يخضع لشرط لورنتز (VII) أي[2].

$$\partial^{\mu}\varphi_{\mu} = 0$$

تصبح المعادلة (IX-13)

$$\square\, \varphi_{\nu} = \partial^{\mu}\varphi_{\mu\nu}$$

وإذا كـان الجسم قليل التشتت بثـابت عزل ϵ وسمـاحيـة tolerence مغنطيسيـة μ بمعنى أن $\epsilon\mu = 1$ نجد $\varphi_{\mu\nu} = \mu\, f_{\mu\nu} = \frac{1}{\epsilon}\, f_{\mu\nu}$ وبالتـالي تصبح المعـادلة (IX-15) بعد استعمال المعادلة M_1.

$$\square\, \varphi_{\nu} = -\,\mu J_{\nu}. \tag{IX-16}$$

لنحسب $\square\varphi_{\mu\nu}$ انطلاقا من (M_3) ولنستعمل المعادلة (IX-16) نجد:

$$\square\, \varphi_{\mu\nu} = -\mu\, (\partial_{\mu}J_{\nu} - \partial_{\nu}J_{\mu}). \tag{IX-17}$$

من المناسب أحيانا استعمال المجال الثُّنوي dual (الثنائي)

$$\varphi^{\mu\nu *} = \frac{1}{2}\, \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varphi_{\rho o} \quad , \quad \overset{*}{\varphi}_{\mu\nu} = -\,\frac{1}{2}\, \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\varphi^{\rho\sigma} \tag{IX-18}$$

مع:

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} +1 & \text{إذا كانت المؤشرات } \mu,\nu,\rho,\sigma \text{ تشكّل تبادلا مزدوجا للأعداد } 1,2,3,0 \\ -1 & \text{إذا كانت المؤشرات } \mu,\nu,\rho,\sigma \text{ تشكّل تبادلاً مفرداً للأعداد } 1,2,3,0 \\ 0 & \text{إذا كان إثنان من المؤشرات متساويين} \end{cases} \tag{IX-19}$$

---

(2) شرط لورنتز $\partial^{\mu}\varphi_{\mu} = \partial^{\mu}\bar{\varphi}_{\mu} = 0$ يحدِّد دالّة المعيار ψ نوعاً ما بفرض الشرط $\square\psi = 0$.

نجد:

$$\varphi^{*23} = \overset{*}{\varphi}_{23} = \varphi_{10} = -\varphi^{10} \quad , \quad \varphi^{*10} = -\overset{*}{\varphi}_{10} = \varphi_{23} = \varphi^{23}$$
$$\varphi^{*31} = \overset{*}{\varphi}_{31} = \varphi_{20} = -\varphi^{20} \quad , \quad \varphi^{*20} = -\overset{*}{\varphi}_{20} = \varphi_{31} = \varphi^{31} \qquad \text{(IX-20)}$$
$$\varphi^{*12} = \overset{*}{\varphi}_{12} = \varphi_{30} = -\varphi^{30} \quad , \quad \varphi^{*30} = -\overset{*}{\varphi}_{30} = \varphi_{12} = \varphi^{12}$$

وتكتب المعادلة (M_2) أيضا بالصيغة:

$$(M_2)^* \qquad \boxed{\partial_\rho \varphi^{*\mu\rho} = 0}$$

إذا أجرينا تحويل لورنتز العام

$$x^\mu = a^\mu_\nu x'^\nu \quad , \quad x'^\mu = a^{\mu'}_\nu x^\nu,$$

حيث المعامل الثابت $a^{\mu'}_\nu = \dfrac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu}$ و $a^\mu_{\nu'} = \dfrac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}$ يخضع للعلاقات المميِّزة لتحويلات لورنتز، تتحول الكميات:

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\mu} = a^{\lambda'}_\mu \partial'_\lambda \quad \text{و} \; J_\mu \; \text{و} \; \varphi_\mu$$

كمركَّبات متَّجهات رباعية. ومن جهة ثانية الكميات $f^{\mu\nu}$ و $\varphi_{\mu\nu}$ المرتبطة بالمجالات والتحريضات الكهرمغنطيسية وفقا للمعادلة (VI - 86) و (VI - 87) تتحول مثل مركَّبات الموترات المتخالفة التناظر من الرتبة الثانية أي:

$$f_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(a^\rho_{\mu'} a^\sigma_{\nu'} - a^\sigma_{\mu'} a^\rho_{\nu'}\right) f_{\rho\sigma} \quad , \qquad \text{(IX-21)}$$

$$f'^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(a^{\mu'}_\rho a^{\nu'}_\sigma - a^{\mu'}_\sigma a^{\nu'}_\rho\right) f^{\rho\sigma}$$

$$\varphi_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(a^\rho_{\mu'} a^\sigma_{\nu'} - a^\sigma_{\mu'} a^\rho_{\nu'}\right) \varphi_{\rho\sigma} \quad , \qquad \text{(IX-22)}$$

$$\varphi'^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(a^{\mu'}_\rho a^{\nu'}_\sigma - a^{\mu'}_\sigma a^{\nu'}_\rho\right) \varphi^{\rho\sigma}$$

فتحـافظ معادلات مـاكسويـل (M_1) و (M_2) و (M_2^*) و (M_3) على صيغهـا في جميـع الهياكل الاسنادية لدى إجراء تحويل لورنتز(3).

4) نظرية لورنتز في الإلكترونات ـ موتِّر الطاقة والزَّخم

أ ـ المجال المجهري والتيار الرباعي: تكتب معادلات المجال المجهري كما يلي:

$$\text{curl } h - \frac{1}{c}\frac{\partial e}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\rho v \quad \text{(IX-23)}$$

$$\text{curl } e + \frac{1}{c}\frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad \text{(IX-24)}$$

$$\text{div } e = 4\pi\rho \quad \text{(IX-25)}$$

$$\text{div } h = 0 \quad \text{(IX-26)}$$

ويمكن إعادة كتابة هذه المعادلات بصياغة نسبية رباعية بإدخال الموتِّر.

$$\varphi_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & h_3 & -h_2 & e_1 \\ -h_3 & 0 & h_1 & e_2 \\ h_2 & -h_1 & 0 & e_3 \\ -e_1 & -e_2 & -e_3 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(IX-27)}$$

وكثافة التيار الرباعية:

$$v = (\nu^1, \nu^2, \nu^3). \qquad j^\mu = \left(\frac{4\pi}{c}\rho v; 4\pi\rho\right) \quad \text{(IX-28)}$$

فتكتب المعادلات من (IX-23) إلى (IX-26) بالصيغة

$$\partial_\rho \varphi^{\mu\rho} = J^\mu \quad (L_1)$$

$$\partial_\rho \varphi_{\mu\nu} + \partial_\nu \varphi_{0\mu} + \partial_\mu \varphi_{\nu\rho} = 0 \quad (L_2)$$

(3) لقد بين بوانكاريه أن معادلات ماكسويل تحافظ على صيغتها في جميع هياكل الاسناد بتحويل لورنتز.
H. POINCARE. C.R. Ac. Sc., 140, 1905, 1504; Rend. Pal., 21, 1906, 129;
A. EINSTEIN. Ann. d. Phys., 17, 1905, 891;
H. MINKOWSKI Gott Nach. 1908, 53, Math. Ann. 68, 1910, 472.

تختصر المعـادلة (L_1) المعـادلتين (IX-23) و (IX-25) مـع جانب أيمن غـير منعـدم، و (L_2) تختصر المعـادلتين (IX-24) و (IX-26) بـدون جانب أيمن. ومن L_1 نستنتـج معادلة الإستمرارية:

$$\boxed{\partial_\mu j^\mu = 0} \qquad \text{(IX-29)}$$

واستناداً إلى التحديد (IX-28) يكون المتَّجه الرباعي j_μ متناسباً مع السرعة الكونيـة للشحن الكهربائية أي:

$$\boxed{j_\mu = 4\,\pi\,\rho_0 u_\mu} \qquad \text{(IX-30)}$$

حيث ρ_0 هي كثافة الشحن الكهـربائيـة في هيكل الاسنـاد الذاتي، أيّ الكثـافة كمـا يقيسها مشاهد يتحرك مع الشحن الكهربائية (فتكون الشحن ثابتـة بالنسبـة إليه). نجد فعلاً إذا أخذنا بعين الاعتبار المعادلات (IX-30) و (VII - 12).

$$j_p = 4\pi\rho_0 u_p = -\frac{4\,\pi\,\rho_0 v^p}{c\sqrt{1-\beta^2}} = -\frac{4\,\pi\,\rho}{c}\;v^p \qquad \text{(IX-31)}_1$$

$$j_0 = 4\pi\rho_0 u_0 = \frac{4\pi\rho_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = 4\,\pi\,\rho \qquad \text{(IX-31)}_2$$

مع:

$$\boxed{\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1-\beta^2}}} \qquad \text{(IX-32)}$$

فتكون كمية الشحن الكهربائية في الحجم $d\mathcal{V}$ استناداً إلى (V - 43) و (IX-32):

$$dq = \rho\, d\mathcal{V} = \frac{\rho_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\; d\mathcal{V}_0\sqrt{1-\beta^2} = \rho_0\, d\mathcal{V}_0 = dq_0. \qquad \text{(IX-33)}$$

وهي ثابتة في التحويل. بشكل خاص تكون شِحنة الإلكترون q متساوية في كل هياكل الاسناد اللورنتزية.

ب ـ **قوة لورنتز**: تتيح الصيغة المتجهية لقوة لورنتز:

$$f = \rho\left(e + \left[\frac{\nu}{c} \wedge h\right]\right) \qquad \text{(IX-34)}$$

أن نحدِّد المركَّبات الفضائية الثلاث f^p للمتَّجه الرباعي:

$$\boxed{f_\mu = \frac{1}{4\pi}\ \varphi^{\rho\mu} j_\rho} \qquad \text{(IX-35)}$$

إذ ان هذه الصيغة تعطى بالتفصيل:

$$f^p = \frac{1}{4\pi}\ (\varphi_{pq} j^q + \varphi_{p0} j^0) \qquad \text{(IX-36)}$$

ونجد بعد استعمال (IX-27) و (IX-31)

$$f^p = \rho\left(e_p + \varphi_{pq}\frac{\nu^q}{c}\right) = \rho\left(e_p + \left[\frac{\nu}{c} \wedge h\right]_p\right). \qquad \text{(IX-37)}$$

أما المركَّبة الرابعة فهي

$$f^0 = \frac{1}{4\pi}\ \varphi^{p0} j_p = \frac{\rho}{c}\ \varphi_{p0}\nu^p = \rho\left(\frac{v}{c} \cdot e\right). \qquad \text{(IX-38)}$$

وتمثل استنادا إلى (IX-37) القدرة Power $f \cdot \frac{dl}{dx^0}$ للقوى الكهربائية.

ج ـ **موتِّر الطاقة والزخم او موتِّر ماكسويل**:

لنحدد الموتّر من الرتبة الثانية:

$$\tau^\lambda_\mu = -\varphi_{\mu\rho}\varphi^{\lambda\rho} + \frac{1}{4}\ \delta^\lambda_\mu\, \varphi_{\rho\sigma}\, \varphi^{\rho\sigma} \qquad \text{(IX-39)}$$

أو:

$$\tau_{\mu\nu} = g_{\nu\lambda}\, \tau^\lambda_\mu = -\varphi_{\mu\rho}\, \varphi^\rho_\nu + \frac{1}{4}\ g_{\mu\nu}\varphi_{\rho\sigma}\varphi^{\rho\sigma} \qquad \text{(IX-40)}$$

حيث:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}\,(-1, -1, -1, +1). \qquad \text{(IX-41)}$$

مما يعني أن هذا الموتِّر متناظر:

$$\tau_{\mu\nu} = \tau_{\nu\mu} \tag{IX-42}$$

ويمكن أن نكتب مركّباته بشكل جدول:

$$\tau_{\mu\nu} = \begin{vmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} & -4\pi S_1 \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} & -4\pi S_2 \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} & -4\pi S_3 \\ -4\pi S_1 & -4\pi S_2 & -4\pi S_3 & 4\pi\omega \end{vmatrix} \tag{IX-43}$$

حيث:

$$\tau_{pq} = -(e_p e_q + h_p h_q) + \frac{1}{2}\,\delta_{pq}\,(e^2 + h^2) \tag{IX-44}$$

$$s_p = \frac{1}{4\,\pi}\,[e \wedge h]_p \tag{IX-45}$$

$$\omega = \frac{1}{8\,\pi}\,(e^2 + h^2). \tag{IX-46}$$

ترتبط المركّبات τ_{p0} لهذا الموتِّر بكثافة الزخم لتوزيع الشحن أما τ_{00} فهي كثافة الطاقة.

لنحسب تباعد موتِّر الصيغة (IX-39) نجد:

$$\partial_\lambda \tau^\lambda_\mu = -(\partial_\lambda \varphi_{\mu\rho})\,\varphi^{\lambda\rho} - \varphi_{\mu\rho}\partial_\lambda \varphi^{\lambda\rho} + \frac{1}{4}\,\partial_\mu\,(\varphi_{\rho\sigma}\varphi^{\rho\sigma}) \tag{IX-47}$$

أي إذا أخذنا بعين الاعتبار تخالف التناظر بالمؤشرات ρ و λ والتحديد (L_1) للتيار:

$$\partial_\lambda \tau^\lambda_\mu = -\frac{1}{2}\,(\partial_\lambda \varphi_{\mu\rho} + \partial_\rho \varphi_{\lambda\mu})\,\varphi^{\lambda\sigma} + \varphi_{\mu\rho} j^\rho + \frac{1}{4}\,\partial_\mu\,(\varphi_{\rho\sigma}\varphi^{\rho\sigma}) \tag{IX-48}$$

ويمكن أن نكتب إذا استعملنا معادلة ماكسويل (M_2)

$$\partial_\lambda \tau_\mu{}^\lambda = \frac{1}{2}\,(\partial_\mu\,\varphi_{\rho\lambda})\,\varphi^{\lambda\rho} + \varphi_{\mu\rho} j^\rho + \frac{1}{4}\,\partial_\mu\,(\varphi_{\rho\sigma}\,\varphi^{\rho\sigma})$$

أو:

$$\frac{1}{2}\,(\partial_\mu \varphi_{\rho\lambda})\varphi^{\lambda\rho} = \frac{1}{2}\,\eta^{\lambda\sigma}\,\eta^\sigma\tau\,(\partial_\mu \varphi_{\rho\lambda})\,\varphi_\sigma\tau \tag{IX-50}$$

$$= \frac{1}{4}\,\eta^{\lambda\sigma}\eta\rho^\tau \partial_\mu\,(\varphi_{\rho\lambda}\varphi_{\sigma\tau})$$

$$= \frac{1}{4}\,\partial_\mu\,(\varphi_{\rho\lambda}\varphi^{\lambda\rho}) = -\frac{1}{4}\,\partial_\mu\,(\varphi_{\rho\sigma}\varphi^{\rho\sigma})$$

وتكتب المعادلة (IX-49) أيضاً:

(IX-51) $$\partial_\lambda \tau^\lambda_\mu = \varphi_{\mu\rho} j^\rho$$

وإذا رجعنا إلى المعادلة (IX-35) نرى أن الجانب الأيمن لهذه المعادلة يظهر فيه المتِّجه الرباعي:

(IX-52) $$4\,\pi f_\mu = \varphi_{\rho\mu} j^\rho$$

الذي تمثل مركِّباته الفضائية قوة لورنتز. فنكتب إذاً:

(IX-53) $$\partial_\lambda \tau_\mu{}^\lambda = -\,4\pi f_\mu$$

أما المركِّبة الرابعة لهذه المعادلة (أي إذا وضعنا $\mu = 0$) فتكتب:

(IX-54) $$\partial_\rho \tau^\rho_0 + \partial_0\, \tau^0_0 = -4\pi f_0$$

أي استناداً إلى المعادلات (IX-43) و (IX-38):

(IX-55) $$\frac{1}{c}\ \frac{\partial \omega}{\partial t}\ + \operatorname{div} s = -\rho\left(\frac{v}{c}\ \cdot e\right).$$

تنقل هذه المعادلة قاعدة بوينتنغ (III - 52) إلى نظرية لورنتز، فالصيغة (IX-53) تحدِّد قوة لورنتز وأيضاً قانون حفظ الطاقة الكهربائية.

5) معادلات لورنتز ومعادلات ماكسويل

يمكن أن نستخلص معادلات ماكسويل من معادلات لورنتز المجهرية إذا افترضنا أن المادة ساكنة[4] (إرجع إلى المقطع الخامس من الفصل الرابع). إذاً يمكن اثبات معادلات ماكسويل (I) و (II) و (III) و (V) في هياكل الاسناد المرتبطة بالأجسام الموصِّلة أو الناقلة. وفي هذه الهياكل تكون العلاقتان $D = E$ و $B = \mu H$ بين المجال والتحريض الكهرمغنطيسيين صحيحتين. نرمز إلى الكميات المقيسة في هيكل الاسناد الذاتي بوضع مؤشر (0) فتكون المعادلات التالية المستنتجة كما في الفصل الرابع صحيحة في هذا الهيكل.

(4) H.A. LORENTZ. The Theory of electrons (Leipzig. 1916).

$$(I)^0 \quad \mathrm{curl}^{(0)} H\left\{ \begin{matrix} \rho \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} - \frac{1}{c}\frac{\partial D^{(0)}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} I^{(0)} \quad \Bigg| \quad \mathrm{curl}^{(0)} E^{(0)} + \frac{1}{c}\frac{\partial B^{(0)}}{\partial t} = 0$$

$$(III)^0 \quad \mathrm{div}^{(0)} D^{(0)} = 4\pi\rho^{(0)} \quad \Bigg| \quad \mathrm{div}^{(0)} B^{(0)} = 0$$

$$(II)^0 \qquad \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix} \quad \begin{cases} D^{(0)} = \epsilon E^{(0)} \\ B^{(0)} = \mu H^{(0)} \\ I^{(0)} = \sigma_c E^{(0)} \end{cases}$$

وبشكل خاص تعبِّر المعادلة 3 - $(II)^0$ عن قانون أوم في هيكل الاسناد المرتبط بالمادة.

لقد رأينا في المقطع الأول من هذا الفصل أن مجموعتي المعـادلات (I) و (III) لا تتغيران من هيكل إلى آخر باستعمـال تحويـل لورنتـز. إذ تتحول المـركِّبات J_μ مثـل مركِّبات المتَّجِه الرُّباعي ومركِّبـات المتِّجهات الثـلاثية H و D من جهـة و E و B من جهة ثانية مثل مركِّبات موتِّرين متخالفي التناظر من الرتبة الثانية، لذلك نحدِّد هذين الموتِّرين وكثافة التيار كما يلي:

$$(IX - 56) \quad f^{(0)}_{\mu\nu} = \begin{vmatrix} 0 & H^{(0)}_3 & -H^{(0)}_2 & D^{(0)}_1 \\ -H^{(0)}_3 & 0 & H^{(0)}_1 & D^{(0)}_2 \\ H^{(0)}_2 & -H^{(0)}_1 & 0 & D^{(0)}_3 \\ -D^{(0)}_1 & -D^{(0)}_2 & -D^{(0)}_3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\varphi'^{0}_{\mu\nu} = \begin{vmatrix} 0 & B^{(0)}_3 & -B^{(0)}_2 & E^{(0)}_1 \\ -B^{(0)}_3 & 0 & B^{(0)}_1 & E^{(0)}_2 \\ B^{(0)}_2 & -B^{(0)}_1 & 0 & E^{(0)}_3 \\ -E^{(0)}_1 & -E^{(0)}_2 & -E^{(0)}_3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(IX-57) \quad J^{(0)}_\mu = \left(-\frac{4\pi}{c} I^{(0)} \quad , \quad 4\pi\rho^{(0)} \right)$$

مما يجعل مجموعات المعادلات $(I)^{(0)}$ و $(III)^0$ و $(II)^0$ تكتب كما يلي:

$$(M_1)^0 \qquad \partial^{(0)}_\rho f_{\mu\rho}^{(0)} = J^{\mu(0)}$$

$$(M_3)^{(0)} \qquad \partial^{(0)}_\rho \varphi^{(0)}_{\mu\nu} + \varphi^{(0)}_\nu \varphi^{(0)}_{\rho\mu} + \partial^{(0)}_\mu \varphi^{(0)}_{\nu\rho} = 0$$

$$(M_4)^{(0)} \qquad \begin{aligned} &(1)\ f^{(0)}_{p0} = \epsilon\varphi^{(0)}_{p0} \\ &(2)\ f^{(0)}_{pq} = \frac{1}{\mu}\ \varphi^{(0)}_{pq} \\ &(3)\ J^{(0)}_{p} = \frac{4\pi\sigma}{c}\ \varphi^{(0)}_{p0} \end{aligned}$$

فإذا أجرينا تحويل لورنتـز تتحول المعـادلات $(M_1)^{(0)}$ و $(M_2)^{(0)}$ إلى المعادلات (M_1) (M_2) الصالحة في أي هيكل إسناد لورنتزي[5].

$$(M_1) \qquad \partial_\rho f^{\mu\rho} = J^\mu$$

$$(M_2) \qquad \partial_\rho\varphi_{\mu\nu} + \partial_\nu\varphi_{\rho\mu} + \partial_\mu\varphi_{\nu\rho} = 0$$

أما المعادلات $(M_4)^{(0)}$ فتتغير صيغتهـا بالذات من هيكل إسناد إلى آخـر عند إجـراء تحويل لـورنتز. فصيغتهـا تناسب فقط الهيكـل الذاتي ولا يمكن كتـابتها في هيـاكل الاسناد الأخرى.

أ ـ كثافة التيار الرباعية:

يمكن أن نحسب كثافة التيـار J_μ التي تدخـل في معادلات مـاكسويـل (M_1) من الكثافة $J^{(0)}_\mu$ في هيكل الاسناد الذاتي للمادة بواسطة تحويل لـورنتز. تمثـل المركبـات $\rho^{(0)}$ و $I^{(0)}$ للمتجه الرباعي $J^{(0)}$ القيم الوسطية $\bar{\rho}$ و $\overline{\rho V}$ لكثافة الشحن الكهربـائية ولكثافة تيار التحرك كما يحدَّدان في النظرية المجهرية. فإذا أجرينا تحويل لورنتز إلى هيكل الإسناد S نجد:

$$(IX\text{-}58) \qquad J_\mu = a^{\lambda(0)}_{\mu}\, J^{(0)}_{\lambda} = a^{0(0)}_{\mu}\, J^{(0)}_{0} + a^{p(0)}_{\mu}\, J^{(0)}_{p}$$

وبشكل خاص إذا كان التحويـل دون دوران تكون قيم المعـاملات كمـا في المعادلات (VI - 62) و (VI - 63) فنجد للصيغة (IX-58)[6]:

(5) H. MINKOWSKI. Gött Nach. 1908, 53. Math. Ann., 68, 1910, 472.

(6) نجد فعلاً:

$$a^{0(0)}_{0} = u_0 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \quad a^{0(0)}_{p} = a^{p(0)}_{0} = u_p \qquad a^{r(0)}_{p} = a^{p\,(0)}_{r} = \delta^r_p + \frac{a u_p}{u_s u^s}\ u^r$$

وتقود هذه إلى الصيغ $(IX\text{-}59)_1$ أو $(IX\text{-}59)_2$.

$$(IX\text{-}59)_1 \qquad J_p = J^{(0)}_p - \nu_p \left\{ J^{(0)}_r \nu^r \frac{\alpha}{\nu^2} \quad - \frac{J^{(0)}_0}{c\sqrt{1-\beta^2}} \right\}$$

$$(IX\text{-}59)_2 \qquad J_0 = \frac{J^{(0)}_0 - \dfrac{J^{(0)}_r \nu^r}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

حيث:

$$(IX\text{-}60) \qquad \nu_2 \sum_r (\nu^r)_2 \quad , \quad \beta_2 = \frac{\nu^2}{c^2}$$

$$(IX\text{-}61) \qquad \alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad -1$$

وإذا رجعنا إلى صيغ السرعة الرباعية، تكتب المعادلات (IX-59) أيضاً(7):

$$(IX\text{-}62)_1 \qquad J_p = J^{(0)}_0 u_p + J^{(0)}_p + \frac{\alpha u_p}{u_s u^s} \left(J^{(0)}_r u^r\right)$$

$$(IX\text{-}62)_2 \qquad J_0 = J^{(0)}_0 u^r - J^{(0)}_r u^r$$

ويمكن أن نكتب أيضاً الصيغة $(IX\text{-}62)_1$ بالشكل التالي:

$$(IX\text{-}63) \qquad J_p = J^{(0)}_p + \rho_1 u_p$$

إذا حددّنا ρ_1 بأنها:

$$(IX\text{-}64) \qquad \rho_1 = J^{(0)}_0 + \frac{\alpha}{u_s\, u^s}\, J^{(0)}_r u^r$$

ولكن تجزيء J_p إلى $J^{(0)}_p$ و $\rho_1 u_p$ في (IX-63) ليس ثابتاً في تحويل لورنتـز(8) ويمكن أن نكتب الصيغ (IX-62) بطريقة ثابتة في التحويل u بوضع:

---

(7) طبعاً في حالة التحويل الخاص $u=u_1$ تصبح (IX-59):

$$J_1 = \frac{J^{(0)}_1 - \beta J^{(0)}_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \quad J_2 = J^{(0)}_2 \quad , \quad J_3 = J^{(0)}_3 \ , \quad J_0 = \frac{J^{(0)}_0 - \beta J^{(0)}_1}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

(8) انظر في الصفحة 197 من المرجع [16] C.MOLLER.

(IX-65) $$\boxed{J_\mu = J_0^{(0)} u_\mu + I_\mu}$$

حيث يرمز I_μ إلى المتجه الرباعي:

(IX-66) $$I_\mu = a_\mu^{r(0)} J_r^{(0)} = (a_p^{r(0)} J_r^{(0)}, - J_r^{(0)} u^r)$$

الذي يطابق $J_r^{(0)}$ في الهيكل الاسنادي الذاتي $(u^r = 0)$ إذ نجد:

(IX-67) $$I_\mu^{(0)} = (J_r^{(0)}, O).$$

هكذا حتى عندما تكون كثافة الشحن منعدمة في هيكل الاسناد الذاتي $(J_0^{(0)} = 0)$ نجد قيمة كثافة الشحن في هيكل اسناد غاليلي آخر مساوية لـ :

(IX-68) $$J_0 = I_0 = - J_r^{(0)} u^r$$

نتيجة لتيار النقل الكهربائي ذي القيمة $J_r^{(0)}$ في الهيكل الاسنادي الذاتي. أما إذا كان تيار النقل منعدماً في الهيكل الذاتي كما هو حال الأجسام الكهرنافذة $(J_r^{(0)} = 0)$ نجد في هيكل الاسناد الأخير:

(IX-69) $$J_\mu = J_0^{(0)} u_\mu$$

أي أن كثافة التيار متناسبة مع السرعة الرباعية للجسم.

ب ـ العلاقات بين المجال والتحريض:

خلافاً للمعادلات (I) و (III) الثابتة في التحويل لا تحافظ العلاقات (II) على صيغتها عند إجراء تحويل لورنتز. فالمعادلات $(M_4)^0$ صالحة فقط في الهيكل الاسنادي الذاتي للمادة. أما في الهياكل الأخرى فنحدِّد المتجهات الرباعية:

(IX-70) $$\overline{E}_\mu = \varphi_{\mu\rho} u^\rho \quad , \quad \overline{B}_\mu = \varphi_{\mu\rho} u^\rho$$

(IX-71) $$\overline{D}_\mu = f_{\mu\rho} u^\rho \quad , \quad \overline{H}_\mu = a^*_{\mu\rho} u^\rho$$

التي تدخل فيها الموتِّرات $\varphi_{\mu\rho}$ و $f_{\mu\rho}$ المحدَّدة بالمعادلات (IX-8) والموتِّرات الثُّنْويّة المحدَّدة بالمعادلات (IX-18).

فـإذا استعملنا الصيـغ (IX-8) للموتّـرات $\varphi_{\mu\rho}$ و $f_{\mu\rho}$ نلاحظ أن المـركّبـات $\bar{E}_\mu$ و $\bar{B}_\mu$ و $\bar{D}_\mu$ و $\bar{H}_\mu$ تكتب بالصيغ:

$$\text{(IX-72)} \qquad \bar{E}_\mu = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(\tilde{E}, \left(\tilde{E} \cdot \frac{v}{c} \right) \right)$$

$$\bar{B}_\mu = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(\tilde{B}, \left(\tilde{B} \cdot \frac{v}{c} \right) \right)$$

$$\text{(IX-73)} \qquad \bar{D}_\mu = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(\tilde{D}, \left(\tilde{D} \cdot \frac{v}{c} \right) \right) \quad ,$$

$$\bar{H}_\mu = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(\tilde{H}, \left(\tilde{H} \cdot \frac{v}{c} \right) \right)$$

حيث وضعنا:

$$\text{(IX-74)} \qquad \tilde{E} = E + \left(\frac{v}{c} \wedge B \right) \quad , \quad \tilde{B} = B + \left(\frac{v}{c} \wedge E \right)$$

$$\text{(IX-75)} \qquad \tilde{D} = D + \left(\frac{v}{c} \wedge D \right) \quad , \quad \tilde{H} = H + \left(\frac{v}{c} \wedge H \right).$$

أمـا في هيكل الاسنـاد الذاتي $(v = 0)$ فتصبـح المتجِهـات الـربـاعيـة في الصيغـة (IX-72) و (IX-73):

$$\text{(IX-76)} \qquad \bar{E}_\mu = (E^{(0)}, 0) \qquad \bar{B}_\mu = (B^{(0)}, 0)$$

$$\text{(IX-77)} \qquad \bar{D}_\mu = (D^{(0)}, 0) \qquad \bar{H}_\mu = (H^{(0)}, 0).$$

هكذا تكون صيغة المعادلتين الأوليَيْن (M_4) في أي هيكل إسناد غاليلي

$$\text{(IX-78)} \qquad \bar{D} = \epsilon \, \tilde{E} \quad , \quad \tilde{H} = \frac{1}{\mu} \, \tilde{B}$$

أي:

$$\text{(IX-79)} \qquad \bar{D}_\rho = \epsilon \, \bar{E}_\rho \quad , \quad \bar{H}_\rho = \frac{1}{\mu} \, \bar{B}_\rho$$

أو:

$$f_{\rho\sigma}\, u^{\sigma} = \epsilon \varphi_{\rho\sigma}\, u^{\sigma} \qquad \text{(IX-80)}$$

$$f^{*}_{\rho\sigma}\, u^{\sigma} = \frac{1}{\mu}\, \varphi^{*}_{\rho\sigma}\, u^{\sigma} \qquad \text{(IX-81)}$$

وتكتب أيضا الصيغة (IX-81) بالصيغة التالية

$$f_{\mu\nu}\, u_{\rho} + f_{\rho\mu}\, u_{\nu} + f_{\nu\rho}\, u_{\mu} = \frac{1}{\mu}\, (\varphi_{\mu\nu}\, u_{\rho} + \varphi_{\rho\mu}\, u_{\nu} + \varphi_{\nu\rho}\, u_{\mu}). \qquad \text{(IX-82)}$$

أما المعادلة الثالثة في (M_4) فتصبح:

$$J^{\rho} - u^{\rho}\, (J^{\mu} u_{\mu}) = - \frac{4\pi\sigma_c}{c}\, \varphi^{\rho\sigma}\, u_{\sigma}. \qquad \text{(IX-83)}$$

يمثل الجانب الأيسر لهذه المعادلة تيار النقل أي التيار العام J^{ρ} ينقص منه تيار التحرك:

$$u^{\rho}\, (J_{\mu} u_{\mu}) = u^{\rho}\, (J^{\mu} u_{\mu})^{(0)} = u^{\rho}\, j^{0(0)}. \qquad \text{(IX-84)}$$

فتعني المعادلة (IX-83) إذاً أن تيار النقل I^{ρ} $\frac{4\pi}{c}$ – متناسب مع المجال $\bar{E}^{\rho} = u_{\lambda}\, \varphi^{\rho\lambda}$ بمعامل نسبة σ_c $\frac{4\pi}{c}$ –. وهذه هي الصيغة النسبية لقانون أوم.

ويمكن أن نكتب الصيغ المتجهية التالية بحل المعادلات (IX-80) و (IX-82) بالنسبة إلى D و B:

$$D = \frac{1}{1-\epsilon\mu\beta^2} \left\{ \epsilon\, (1-\beta^2)\, E + (\epsilon\mu - 1) \left[\left[\frac{v}{c} \wedge H \right] - \epsilon\, \frac{v}{c} \left(\frac{v}{c} \cdot E \right) \right] \right\} \qquad \text{(IX-85)}$$

$$B = \frac{1}{1-\epsilon\mu\beta^2} \left\{ \mu\, (1-\beta^2)\, H - (\epsilon\mu - 1) \left[\left[\frac{v}{c} \wedge E \right] - \mu\, \frac{v}{c} \left(\frac{v}{c} \cdot H \right) \right] \right\} \qquad \text{(IX-86)}$$

وتشكل هذه المعادلات تعميما للصيغ المتجهية $(II)^0$ إلى هيكل إسناد غاليلي.

أما إذا كان الجسم غير مشتت:

$$\epsilon\mu = 1 \qquad \text{(IX-87)}$$

نجد أن العلاقات:

$$D = \epsilon E \quad , \quad B = \mu H \qquad \text{(IX-88)}$$

تبقى صالحة في جميع هياكل الاسناد الغاليلية.

إذا أردنا الاحتفاظ بالصيغ الموترية، يمكن أن نكتب[9] العلاقة بين $f_{\mu\nu}$ و $\varphi_{\mu\nu}$. لذلك نضرب المعادلة (IX-82) بالمتّجه u^ρ وندعم المؤشر ρ آخذين بعين الإعتبار علاقة التناظم:

$$u_\rho u^\rho = 1 \qquad \text{(VII - 13)}$$

فنجد:

$$f_{\mu\nu} + (f_{\rho\mu}u_\nu + f_{\nu\rho}u_\mu)\, u^\rho = \frac{1}{\mu}\, \varphi_{\mu\nu} + \frac{1}{\mu}\, (\varphi_{\rho\mu}u_\nu + \varphi_{\nu\mu}u_\mu)\, u^\rho \qquad \text{(IX-89)}$$

أي باستعمال الصيغة (IX-82):

$$\boxed{f_{\mu\nu} = \frac{1}{\mu}\, \varphi_{\mu\nu} + \left(\frac{1-\epsilon\mu}{\mu}\right) (\varphi_{\rho\mu}u_\nu + \varphi_{\nu\rho}u_\nu)\, u^\rho.} \qquad \text{(IX-90)}$$

والعلاقة العكسية هي:

$$\boxed{\varphi_{\mu\nu} = \mu f_{\mu\nu} - \left(\frac{1-\epsilon\mu}{\epsilon}\right) (f_{\rho\mu}u_\nu + f_{\nu\rho}u_\mu)\, u^\rho.} \qquad \text{(IX-91)}$$

أما إذا كان الجسم غير مشتت ($\epsilon\mu = 1$) فنجد:

$$f_{\mu\nu} = \epsilon\varphi_{\mu\nu} = \frac{1}{\mu}\, \varphi_{\mu\nu}. \qquad \text{(IX-92)}$$

---

(9) Cl. Phani Mau Quan J. Rat. Mech. Anal. 5, 1956, 473.

6) موتِّر الطاقة والزُّخم

لنحدد الموتِّر غير المتناظر من الرتبة الثانية:

$$(\tau\mu^{\nu})\,M = -\,\varphi_{\mu\rho}\,f^{\nu\rho} + \frac{1}{4}\,\delta^{\nu}_{\mu}\,\varphi_{\rho\sigma}\,f^{\rho\sigma} \qquad \text{(IX-93)}$$

الذي يطابق موتِّر ماكسويل في الفراغ (الخـلاء) $(f_{\mu\nu} = \varphi_{\mu\nu})$. وإذا حسبنا التبـاعد $\partial_{\nu}\tau^{\nu}_{\mu}$ كما فعلنا للمعادلة (IX-48) نجد:

$$\partial_{\nu}\,(\tau\mu^{\nu})_M = \varphi_{\mu\rho}\,J^{\rho} + \frac{1}{4}\,(\varphi^{\rho\sigma}\partial_{\mu}f_{\rho\sigma} - f_{\rho\sigma}\,\partial_{\mu}\,\varphi^{\rho\sigma}). \qquad \text{(IX-94)}$$

بدلاً من (IX-51). وإذا أخذنـا بعين الاعتبـار (IX-90) مفترضـين أن ϵ و μ ثابتـان نجد:

$$\varphi^{\rho\sigma}\,\partial_{\mu}\,f_{\rho\sigma} - f_{\rho\sigma}\,\partial_{\mu}\,\varphi^{\rho\sigma} = 4\left(\frac{1-\epsilon\mu}{\mu}\right)\varphi^{\rho\sigma}\,\varphi_{\sigma\lambda}\,u^{\lambda}\,\partial_{\mu}\,u_{\rho}. \qquad \text{(IX-95)}$$

ومن ثم:

$$\partial_{\nu}\,(\tau\mu^{\nu})_M = \varphi_{\mu\rho}\,j^{\rho} - \left(\frac{1-\epsilon\mu}{\mu}\right)\varphi^{\sigma\rho}\,\varphi_{\sigma\lambda}\,u^{\lambda}\,\partial_{\mu}\,u_{\rho}. \qquad \text{(IX-96)}$$

فإذا كان الجسم قليل التشتيت $(\epsilon\mu \neq 1)$ نجد كما في حالة موتِّر ماكسويل:

$$\partial_{\nu}\,(\tau\mu^{\nu})_M = \varphi_{\mu\rho}J^{\rho}. \qquad \text{(IX-97)}$$

لنحسب مركِّبات الموتِّر $(\tau^{\nu}_{\mu})_M$ منطلقين من:

$$(\tau\mu^{\rho})_M = g^{\rho\nu}\,(\tau_{\mu\nu})_M = \eta^{\rho\nu}\,(\tau_{\mu\nu})_M \quad , \quad \eta^{\rho\nu} = \delta^{\rho\nu}\,(-1\ -1\ -1 + 1) \qquad \text{(IX-98)}$$

مع:

$$(\tau_{\mu\nu})_M = \begin{vmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} & -4\pi s_{10} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} & -4\pi s_{20} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} & -4\pi s_{30} \\ -4\pi s_{01} & -4\pi 9_{02} & -4\pi s_{03} & 4\pi\omega \end{vmatrix} \qquad \text{(IX-99)}$$

فنجد استناداً إلى الصيغة (IX-93)

$$\tau_{pq} = -\,(E_pD_q + H_pB_q) + \frac{1}{2}\,\delta_{pq}\left[(E\cdot D) + (H\cdot B)\right] \qquad \text{(IX-100)}$$

$$(IX\text{-}101) \qquad s_{p0} = \frac{1}{4\pi}\,[B \wedge D]_p \quad , \quad s_{0p} = \frac{1}{4\pi}\,[E \wedge H]_p$$

$$(IX\text{-}102) \qquad W = \frac{1}{8\pi}\,(ED + HB).$$

يسمى موتِّر الصيغة (IX-93) موتِّر منكوفسكي. وقد اقتُرح استبداله بالموتِّر المتناظر من الرتبة الثانية:

$$(IX\text{-}103) \qquad (\tau^{\nu}_{\mu})_s = -\frac{1}{2}\,(\varphi_{\mu\rho}\, f^{\nu\rho} + f_{\mu\rho}\,\varphi^{\nu\rho}) + \frac{1}{4}\,\delta^{\nu}_{\mu}\,\varphi_{\rho\sigma}\, f^{\rho\sigma}$$

فنجد عندئذ بدلاً من (IX-94)

$$(IX\text{-}104) \qquad \partial_\nu\,(\tau^{\nu}_{\mu})_S = \varphi_{\mu\rho}\, J^{\rho} - \frac{1}{2}\,(f_{\mu\rho}\,\partial_\nu\,\varphi^{\nu\rho} - \varphi_{\mu\rho}\,\partial_\partial f^{\nu\rho})$$
$$- \frac{1}{4}\,(\partial_\nu f_{\mu\rho} + \partial_\rho f_{\nu\mu} + \partial_\mu f_{\rho\nu})\,\varphi^{\nu\rho}.$$

وإذا كان الجسم قليل التشتيت $(\epsilon\mu \neq 1)$ نجد:

$$(IX\text{-}105) \qquad (\tau^{\nu}_{\mu})_M = (\tau_{\mu}{}^{\nu})_s$$

وإذا كانت ϵ و μ ثابتتين إضافة إلى ذلك نجد

$$(IX\text{-}106) \qquad \partial_\nu\,(\tau^{\nu}_{\mu})_S = \partial_\nu\,(\tau^{\nu}_{\mu})_M = \partial_\nu\,\tau^{\nu}_{\mu} = \varphi_{\mu\rho} J^{\rho}.$$

7) استعمال الإحداثيات المنحنية

لقد درسنا حتى الآن الظواهر الكهرمغنطيسية باستعمال محاور متعامدة ومنظمة حسب القاعدة:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \quad , \quad \eta_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}\,(-1, -1, -1, +1)$$

فتكون الصيغة الأساسية ds^2 ثابتة في تحويل لورنتز وبالصيغة (22 - VI).

أ ـ معادلات ماكسويل:

تحافظ معادلات ماكسويل على صيغتها في جميع هياكل الاسناد المتعامدة والمنظَّمة. ولكنها لا تكون كذلك إذا استعملنا نظام إحداثيات منحنية بشكل عام، فتتغير عندئذ مركَّبات الموتِّر الأساسي $g_{\mu\nu}$ من نقطة إلى أخرى. لكتابة معادلات

ماكسويل بصيغة ثابتة في التحويل يجب كما رأينا في الفصل السادس أن نستبدل المشتقات العادية بالمشتقات الموافقة للتغيُّر. فنجد بدلاً من المعادلة (M_1):

$$\boxed{\nabla_\rho f^{\mu\rho} = J^\mu} \qquad \text{(IX-107)}$$

أما المعادلتان المتكافئتان equivalent:

$$\boxed{\partial_\rho \varphi_{\mu\nu} + \partial_\nu \varphi_{\rho\mu} + \partial_\mu \varphi_{\nu\rho} = 0} \qquad (M_2)$$

أو:

$$\boxed{\varphi_{\mu\nu} = \partial_\mu \varphi_\nu - \partial_\nu \varphi_\mu} \qquad (M_3)$$

فتبقيان صالحتين في الإحداثيات المنحنية[10].

ومن المناسب استبدال الموتِّر $f^{\mu\nu}$ والتيار J^μ بالكثافات الموتِّرية:

$$\mathcal{F}^{\mu\nu} = \sqrt{-g}\; f^{\mu\nu} \qquad (g = \det.\, g_{\mu\nu}) \qquad \text{(IX-108)}$$

$$\mathcal{J}^\mu = \sqrt{-g}\; J^\mu. \qquad \text{(IX-109)}$$

فتكتب معادلة ماكسويل (IX-107) بالصيغة[11]:

---

(10) في الصيغ (M_2) و (M_3) يمكن استبدال المشتقات الموافقة للتغيُّر بالمشتقات العادية بسبب التناظر في معاملات الاتصال إذ إن:

$$\nabla_\rho \varphi_{\mu\nu} + \nabla_\nu \varphi_{\rho\mu} + \nabla_\mu \varphi_{\nu\rho} \equiv \partial_\rho \varphi_{\mu\nu} + \partial_\nu \varphi_{\rho\mu} + \partial_\mu \varphi_{\nu\rho} +$$

$$\left\{ {\sigma \atop \mu\rho} \right\} \varphi_{\sigma\nu} + \left\{ {\sigma \atop \nu\rho} \right\} \varphi_{\mu\sigma} + \left\{ {\sigma \atop \rho\nu} \right\} \varphi_{\sigma\mu} + \left\{ {\sigma \atop \mu\nu} \right\} \varphi_{\rho\sigma} + \left\{ {\sigma \atop \rho\mu} \right\} \varphi_{\nu\rho} + \left\{ {\sigma \atop \nu\mu} \right\} \varphi_{\sigma\rho}.$$

ولكن الكميات التي تدخل فيها الرموز $\{\ \}$ تنعدم أزواجا بسبب تناظر هذه الرموز بالنسبة إلى المؤشرات السفلى والتناظر المتخالف لمؤشرات الموتِّر $\varphi_{\mu\nu}$. وكذلك نجد:

$$\varphi_{\mu\nu} = \nabla_\mu \varphi_\nu - \nabla_\nu \varphi_\mu = \partial_\mu \varphi_\nu - \partial_\nu \varphi_\mu + \left\{ {\sigma \atop \nu\mu} \right\} \varphi_\sigma - \left\{ {\sigma \atop \mu\nu} \right\} \varphi_\sigma = \partial_\mu \varphi_\nu - \partial_\nu \varphi_\mu.$$

(11) استنادا إلى المعادلة (XIV-132) نكتب:

$$\partial_\rho \mathcal{F}^{\mu\sigma} = \partial_\rho \left(\sqrt{-g}\; f^{\mu\rho}\right) = \sqrt{-g}\left(\partial_\rho f^{\mu\rho} + f^{\mu\rho} \frac{\partial_\rho \sqrt{-g}}{\sqrt{-g}} \right) = \sqrt{-g}\left(\partial_\rho f^{\mu\rho} + \left\{ {\rho \atop \sigma\rho} \right\} f^{\mu\sigma} \right).$$

$(\mathcal{M}_1) \qquad \partial_\rho \mathcal{F}^{\mu\rho} = J^\mu.$

ومن جهة ثانية يستبدل التحديد (IX-18) للموتِّرات الثُّنوية بالصيغ:

$$(IX\text{-}110) \qquad \varphi^{\mu\nu *} = \frac{1}{2\sqrt{-g}}\, \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\, \varphi_{\rho\sigma} \;,\; \varphi^*_{\mu\nu} = -\frac{\sqrt{-g}}{2}\, \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\, \varphi^{\rho\sigma}$$

حيث $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ هي رموز التبادل المحـدَّدة بالمعـادلة (IX-19). هكـذا يمكن أن نكتب المعادلة (M_2) بالصيغة:

$$(M_2)^* \qquad \partial_\rho (\sqrt{-g}\ \varphi^{\mu\rho *}) = 0$$

أو:

$$(IX\text{-}111) \qquad \nabla_\rho \varphi^{\mu\rho *} = 0$$

تكتب إذا معادلات ماكسويل بالصيغ:

$(M_1) \qquad \partial_\rho (\sqrt{-g}\ f_{\mu\rho}) = J^\mu$ أو $\nabla_\rho f^{\mu\rho} = J^\mu$

$(M_2)^* \qquad \partial_\rho (\sqrt{-g}\, \varphi^{\mu\rho *}) = 0$ أو $\nabla_\rho \varphi \mu^{\rho *} = 0$

ومنها نستنتج معادلة الاستمرارية:

$$(IX\text{-}112) \qquad \nabla_\mu J^\mu = 0.$$

ومن جهـة ثانيـة إذا كان الجسم قليـل التشتيت $\epsilon\mu = 1$ و ϵ و μ ثـوابت نجـد استنادا إلى (M_3):

$$(IX\text{-}113) \qquad \nabla^\nu \varphi_{\mu\nu} = \nabla^\nu \nabla_\mu \varphi_\nu - \nabla^\nu \nabla_\nu \varphi_\mu.$$

= ومن جهة ثانية:

$$\nabla_\rho f^{\mu\rho} \equiv \partial_\rho f^{\mu\rho} + \left\{ {\mu \atop \sigma\rho} \right\} f^{\sigma\rho} + \left\{ {\rho \atop \sigma\rho} \right\} f^{\mu\sigma}.$$

ولكن الحد الثاني من الجانب الأيمن ينعدم إذ إن الموتِّر $f^{\mu\rho}$ متخالف التناظر. نستنتج إذا:

$$\nabla_\rho f^{\mu\rho} \equiv \partial_\rho f^{\mu\rho} + \left\{ {\rho \atop \sigma\rho} \right\} f^{\mu\sigma}$$

فنجد:

$$\partial_\rho \mathcal{F}^{\mu\rho} = \sqrt{-g}\ \ \nabla_\rho f^{\mu\rho} = \sqrt{-g}\ \ J^\mu = J^\mu.$$

الجـانب الأيسر لهذه المعـادلة يكتب أيضـاً $\mu\nabla^\nu f_{\mu\nu} = \mu J_\mu$ استناداً إلى المعـادلات (IX-92) و (IX-107) فنجد في الفضاء الاقليدي[12]:

$$\mu J_\mu = \nabla_\mu \nabla^\nu \varphi_\mu - \Box \varphi_\mu \qquad \text{(IX-114)}$$

أو:

$$\Box \varphi_\mu = - \mu J_\mu \qquad \text{(IX-115)}$$

إذا فرضنا شرط لورنتز:

$$\nabla^\nu \varphi_\nu = 0 \qquad \text{(IX-116)}$$

وحدَّدنا الموتِّر operator $\Box$ بأنه:

$$\Box = \nabla^\rho \nabla_\rho = f^{\rho\sigma} \nabla_\rho \nabla_\sigma. \qquad \text{(IX-117)}$$

وإذا أحللنا الصيغة (IX-115) في (M_3) يمكن أن نكتب أيضاً:

$$\Box \varphi_{\mu\nu} = - \mu(\partial_\mu J_\nu - \varphi_\nu J_\mu). \qquad \text{(IX-118)}$$

ب ـ مسار شِحنة نقطية

استنـاداً إلى الميكانيـك النسبي تكتب معادلـة حركـة جسيم خـاضـع للقـوة F^μ بالصيغة:

$$F^\mu = m_0 c^2\, u^\rho \nabla_\rho u^\mu \qquad \text{(VIII - 159)}$$

حيث u^μ هو متجِه السرعة الرباعي في نظام الاحداثيات المنحنية بشكل عام

$$u^\mu = \frac{dy^\mu}{ds}. \qquad \text{(IX-119)}$$

وتكتب أيضاً المعادلة (VIII - 159) بالصيغة:

$$F^\mu = m_0 c^2 \left(\frac{d^2 y^\mu}{ds^2} + \left\{ {\mu \atop \sigma\rho} \right\} \frac{dy^\sigma}{ds} \frac{dy^\rho}{ds} \right). \qquad \text{(IX-120)}$$

---

(12) إذا كان الفضاء إقليديا (حيث كل المنحنيات منعدمة) يجوز تغيير ترتيب المشتقات الموافقة للتغير (انظر (XV-135)) اي:

$$\nabla^\nu \nabla_\mu \varphi_\rho = \nabla_\mu \nabla^\nu \varphi_\rho.$$

في حالة جسيم مشحون تكون F^{μ} قوة لورنتز:

$$f^{\mu} = \frac{1}{4\pi} \varphi^{\rho\mu} j_{\rho}. \tag{IX-35}$$

التي يمكن ربطها بموتِّر ماكسويل:

$$\tau_{\mu}{}^{\nu} = -\varphi_{\mu\rho}\, \varphi^{\nu\rho} + \frac{1}{4}\, \delta^{\nu}_{\mu}\, \varphi_{\rho\sigma}\, \varphi^{\rho\sigma} \tag{IX-39}$$

بالصيغة (أنظر (IX-53)):

$$4\pi f_{\mu} = -\nabla_{\nu}\, \tau^{\nu}_{\mu} \tag{IX-121}$$

فتكون معادلة المسار:

$$m_0\, c^2 \left(\frac{d^2y^{\mu}}{ds^2} + \left\{ {\mu \atop \sigma\rho} \right\} \frac{dy^{\sigma}}{ds} \frac{dy^{\rho}}{ds} \right) = \frac{1}{4\pi} \varphi^{\rho\mu} j_{\rho}. \tag{IX-122}$$

في الفراغ تكون كثافة التيار متناسبة مع سرعة الجسيم الرباعية كما رأينا في المعادلة:

$$j_{\rho} = 4\pi \rho_0 u_{\rho} \tag{IX-30}$$

فتكتب إذاً معادلة المسار (IX-122):

$$\frac{d}{ds} \left(u^{\mu} + \left\{ {\mu \atop \sigma\rho} \right\} u^{\sigma} dy^{\rho} \right) = \frac{\rho_0}{m_0\, c^2} \varphi^{\rho\mu} u_{\rho} \tag{IX-123}$$

أو:

$$\frac{dy^{\lambda}}{ds} \left(\sigma^{\lambda} u^{\mu} + \left\{ {\mu \atop \sigma\lambda} \right\} u^{\sigma} \right) = \frac{\rho_0}{m_0\, c^2} \varphi^{\rho\mu} u_{\rho} \tag{IX-124}$$

أي:

$$\boxed{u^{\lambda} \nabla_{\lambda} u^{\mu} = \frac{\rho_0}{m_0\, c^2} \varphi^{\rho\mu} u_{\rho}.} \tag{IX-125}$$

لقد كتبت المعادلات في هذا المقطع بنظام إحداثيات منحنية بشكل عام. وتحافظ هذه المعادلات على صيغتها في التحويل العام للإحداثيات.

$$y'^{\mu} = a^{\mu'}_{\nu}\, y^{\nu} \quad , \quad y^{\mu} = a^{\mu}_{\nu'}\, y'^{\nu}$$

حيث تخضع المعاملات $a^{\rho'}_{\mu}$ و $a^{\nu}_{\rho'}$ للشرط

$$a^{\rho'}_{\mu}\ a^{\nu}_{\rho'} = a^{\rho}_{\mu'}\ a^{\nu'}_{\rho} = \delta^{\nu}_{\mu}$$

ولكن $a^{\mu'}_{\nu} = \dfrac{\partial y'^{\mu}}{\partial y^{\nu}}$ و $a^{\mu}_{\nu'} = \dfrac{\partial y^{\mu}}{\partial y'^{\nu}}$ تتغير تبعاً لإحداثيات النقطة في الفضاء.

نشير إلى أنه في حالة الفضاء الإقليدي يمكن دائماً العودة إلى استعمال المحاور المستقيمة المتعامدة والمنظمة وفقاً للمعادلة (VI - 28). فتصبح معادلات ماكسويل بالصيغة (M_1) و (M_2) و (M_3). وتحافظ هذه المعادلات على هذه الصيغة في تحويلات لورنتز بمعامل $a^{\mu'}_{\nu}$ و $a^{\mu}_{\nu'}$ ثابتة وخاضعة للشروط $(VI\ \text{-}42)_b$ التي تميز تحويلات هياكل الاسناد الغاليلية.

ب ـ امتدادات نظرية ماكسويل

8) استخلاص معادلات ماكسويل من مبدأ الفعل المستقرّ Stationary action

لننطلق من التكامل المكتوب بإحداثيات منحنية بشكل عام.

$$\mathscr{A} = \int \mathscr{L}\, d\tau \quad , \quad d\tau = dy^1 \wedge dy^2 \wedge dy^3 \wedge dy^0 \qquad \text{(IX-126)}$$

والمحسوب من الكثافة العددية[13] (السلّمية).

$$\mathscr{L} = \sqrt{-g}\ L. \qquad \text{(IX-127)}$$

نفترض أن الدالة L ثابتة في التحويل وتتغير تبعاً للكمون φ_μ مباشرة أو من خلال المجال الكهرمغنطيسي:

$$\varphi_{\mu\nu} = \partial_\mu \varphi_\nu - \partial_\nu \varphi_\mu. \qquad \text{(IX-128)}$$

لنعط المتغيرات φ_μ تغيراً $\delta\varphi_\mu$ منعدماً على حدود التكامل، ولنفرض الشرط:

$$\delta\mathscr{A} = 0 \qquad \text{(IX-129)}$$

---

(13) باستعمال الكثافة العددية نؤمن ثبات $\mathscr{L} d\tau = L.\sqrt{-g}\, d\tau$ في التحويل إذ إن $\sqrt{-g}\, d\tau$ ثابتة في التحويل (ارجع إلى المعادلة (XIV-128)) والكثافة $\mathscr{L}$ تطابق L إذا كان هيكل الاسناد متعامداً ومنظماً.

لكل تغيّر $\delta\varphi_\mu$. نحدِّد الكميات:

$$(IX\text{-}130) \qquad \mathscr{F}^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi_{\mu\nu}} \quad , \quad J^\mu = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi_\mu} .$$

فنجد(14):

$$(IX\text{-}131) \quad \delta\mathscr{A} = \int \delta\mathscr{L} d\tau = \int \Big(\frac{1}{2} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi_{\mu\nu}} \delta\varphi_{\mu\nu} + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi_\mu} \delta\varphi_\mu \Big) d\tau$$

$$= \int \Big(\frac{1}{2} \mathscr{F}^{\mu\nu} \delta\varphi_{\mu\nu} - J^\mu \delta\varphi_\mu \Big) d\tau$$

وإذا حسبنا التكامل بالتجزىء نجد:

$$(IX\text{-}132) \qquad \delta\mathscr{A} = \int \Big[\frac{1}{2} \mathscr{F}^{\mu\nu} (\partial_\mu \delta\varphi_\nu - \partial_\nu \delta\varphi_\mu) - J^\mu \delta\varphi_\mu \Big] d\tau$$

$$= - \int \partial_\nu (\mathscr{F}^{\mu\nu} \delta\varphi_\mu) d\tau + \int (\partial_\nu \mathscr{F}^{\mu\nu} - J^\mu) \delta\varphi_\mu d\tau$$

يمكن تحويل التكامل الأول في الجانب الأيمن إلى تكامل على السطـح المحيط بالحجم الرباعي الذي نحسب عليه التكامل فلا يعطي أيَّة مساهمة لأن $\delta\varphi_\mu$ منعدمة على هذا السطح كما افترضنا أعلاه. يقود الشرطان (IX-129) إذاً إلى المعادلة:

$$(IX\text{-}133) \qquad \partial_\nu \mathscr{F}^{\mu\nu} = J^\mu .$$

هكذا نحصل على معادلة ماكسويل (IX-133) إذا افترضنا التحـديد في الصيغـة (IX-128) للمجال الكهرمغنطيسي ومبدأ الفعل المستقر (IX-129) مطبقاً على الكثافـة العددية $\mathscr{L}$ دون أي تحديد لصيغة هذه الكثافة. ونستطيع أن نكتب أيضاً:

$$(IX\text{-}134) \qquad d\mathscr{L} = \frac{1}{2} \mathscr{F}^{\mu\nu} d\varphi_{\mu\nu} - J^\mu d\varphi_\mu$$

دون أي تحـديد إضـافي للدالّـة $\mathscr{L}$. والصيغة (IX-134) هي تعبـير عن التحديـدات (IX-130).

في الفراغ ($\epsilon = \mu = 1$) نجد $f_{\mu\nu} = \varphi_{\mu\nu}$. وإذا لم يكن هنـاك شِحن كهربـائية أو

(14) إن المتغيرات التي تدخل في تغير $\delta\mathscr{L}$ ليست مستقلة لأن $\varphi_{\mu\nu} = -\varphi_{\nu\mu}$ لذلك ظهر المُعامل $\frac{1}{2}$.

تيار يمكن أن نختار الصيغة:

$$L = \frac{1}{4} \varphi^{\mu\nu} \varphi_{\mu\nu} \qquad \text{(IX-135)}$$

للكثافة العددية وما هذه إلّا الثابت $H^2 - E^2$ في هياكل الاسناد المتعامدة والمنظمة.

إنطلاقاً من الكثافة الاختيارية $\mathscr{L}(\varphi_{\mu\nu}, \varphi_\mu)$ نحصل على المعادلة (IX-133) أيّ معادلة ماكسويل ($\mathscr{M}_1$) ولكن لا يمكن أن نستخلص أيّة علاقة بين التحريض والمجال تميّز النظرية الكهرمغنطيسية. لهذه الغاية يجب أن نختار الدالّة $\mathscr{L}$ المتغيِّرة تبعاً للمجالات والكمون بطريقة مناسبة.

هكذا إذا استعملنا الصيغة (IX-135) نجد:

$$\mathscr{F}^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi_{\mu\nu}} = \sqrt{-g}\ \varphi^{\mu\nu} \qquad \text{(IX-136)}$$

ولكن استعمال مبدأ الفعل المستقر لا يقود حتماً إلى المعادلات الخطية بين التحريض والمجال كما في نظرية ماكسويل. بل العكس من ذلك إذا اخترنا $\mathscr{L}$ بطريقة مناسبة يمكن أن نصل إلى علاقات غير خطية فنتحاشى بذلك بعض صعوبات نظرية ماكسويل. ونظريات مي Mie وبورن ـ إنفلد Born-Infeld تدخل في هذا النطاق.

9) نظرية مي Mie[15]:

تتمثل كثافة الطاقة الكهرمغنطيسية في نظرية ماكسويل بالمركّبة τ_0^0 لموتّر منكوفسكي (IX-93) حتى في حال تواجد المادة. ولكن هذا الموتّر يشمل فقط التفاعلات الكهرمغنطيسية ولا يأخذ بالحسبان طاقة وزخم المادة ذاتها. والنسبية العامة لا تغيِّر هذا المفهوم كما سنرى لاحقاً بل تحافظ على علم التحريك وعلم التحريك الكهربائي مستقلين الواحد عن الآخر.

ومن الممكن عكس ذلك أن نلغي هذه الثنائية ونفترض أن الطاقة الميكانيكية والطاقة الكهرمغنطيسية ليستا متغايرتين بل إن لهما جذوراً كهرمغنطيسية واحدة. هذا هو مبدأ نظرية مي. وتطمح هذه المحاولة إلى تعليل وجود الشحن الكهربائية وميزاتها استناداً إلى خصائص المجال. بالعكس من ذلك لا تستطيع نظرية لورنتز

(15) G.MIE. Ann. d. Phys. 37, 1912, 511; 39, 1912, 1; 40, 1913, 1.

تفسير وجود الشحن الكهربائية إلّا بتأثير قوى غير كهرمغنطيسية. لتحاشي إدخال هذه القوى ينطلق مي من مفهوم غير ثنائي للمجال والمادة.

يفترض مي أن المجال محدّد تماماً بعشر كميات فيزيائية. فاختار في البدء الكميات الأساسية التالية: التحريض الكهربائي D والتحريض المغنطيسي B والكمون المتجهي A وكثافة الشحن ρ، أما الكميات الأخرى E و H والكمون العددي V وكثافة التيار I فتتغير تبعاً للكميات D و B و A و ρ. وافترض القوانين التالية لتغيير هذه الكميات مع الوقت:

$$\frac{1}{c}\ \frac{\partial D}{\partial t} - \text{curl}\, H = -\frac{4\pi}{c}\ I \qquad \text{(IX-137)}$$

$$\frac{1}{c}\ \frac{\partial B}{\partial t} + \text{curl}\, E = 0 \qquad \text{(IX-138)}$$

$$\frac{1}{c}\ \frac{\partial A}{\partial t} + \text{grad}\, V = -E \qquad \text{(IX-139)}$$

$$\frac{1}{c}\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}\, \frac{I}{c} = 0 \qquad \text{(IX-140)}$$

وتتطابق هذه القوانين مع المعادلات (I) و (IV) و (III) في نظرية ماكسويل. ولكن هذه الأخيرة تفترض أن (IX-139) و (IX-138) تستخلص من المعادلتين $B = \text{curl}\, A$ و $\text{div}\, D = 4\pi\rho$ التي ليس لهما مثيل في نظرية مي. إذ إن الكميات B و D و A و ρ مستقلة.

والمعادلة (IX-97) في نظرية ماكسويل التي تعبِّر عن قانون حفظ الطاقة في الأجسام القليلة التشتيت تصبح إذاً $\mu = 1$ المعادلة المتجهية:

$$H\cdot\frac{1}{c}\ \frac{\partial B}{\partial t} + E\cdot\frac{1}{c}\ \frac{\partial D}{\partial t} + \text{div}\,[E \wedge H] = -\frac{4\pi}{c}\ (I\cdot E). \qquad \text{(IX-141)}$$

ونحصل على المعادلة ذاتها في نظرية مي إذا حسبنا الجداء العددي لجانبي المعادلة (IX-137) بالمتَّجه E والمعادلة (IX-138) بالمتَّجه H وجمعنا النتيجتين. ومن جهة ثانية إذا حسبنا الجداء العددي للمعادلة (IX-139) بالمتجه $\frac{4\pi}{c}\ I$ وضربنا المعادلة (IX-140) بالكمية $4\pi\, V$ وجمعنا النتيجتين نجد:

$$4\pi\left(\frac{I}{c^2}\ \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{v}{c}\ \frac{\partial \rho}{\partial t}\right) + \frac{4\pi}{c}\ \text{div}\,(I\cdot V) = -\frac{4\pi}{c}\ (I\cdot E). \qquad \text{(IX-142)}$$

ولكن تأويل هذه المعادلة يختلف تماماً عما هو في نظرية ماكسويل. إذ إن الحد $IE \frac{4\pi}{c}$ -(الذي كان يعبر عن توليد طاقة غير كهرمغنطيسية من تغيُّرات طاقة المجال) لا يمكن أن يكون له معنى فيزيائي في نظرية مي التي تعتبر كل أنواع الطاقة كهرمغنطيسية. ولكن إذا طرحنا المعادلة (IX-142) من المعادلة (IX-141) نحصل على معادلة لا يظهر فيها الحد $(IE) \frac{4\pi}{c}$ − فتكون هذه هي معادلة حفظ الطاقة الكهرمغنطيسية بالصيغة:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \omega}{\partial t} + \operatorname{div} \Sigma = 0$$

حيث

$$dW = EdD + HdB - 4\pi\left(\frac{1}{c} dA + Vd\rho\right)$$

$$\Sigma = [E \wedge H] - \frac{4\pi}{c} (I.V)$$

فالمسألة إذاً هي إيجاد W وهذا ما يعادل تحديد الدالة

$$L = -(E.D) + 4\pi pV + \omega$$

انطلاقاً من العلاقة

$$dl = HdB - DdE + 4\pi\left(\rho dV - \frac{1}{c} dA\right) = \frac{1}{2} f^{\mu\nu} d\varphi_{\mu\nu} - J^{\mu} d\varphi_{\mu}$$

آخذين بالحسبان التحديدات (IX-8) و (IX-2).

وهكذا يرجع استنتاج معادلات المجال من الكثافة العددية

$$d\mathscr{L} = d\sqrt{-g}\, L(\varphi_{\mu\nu}, \varphi_{\mu}) = \frac{1}{2} \mathscr{F}^{\mu\nu} d\varphi_{\mu\nu} - J^{\mu} d\varphi_{\mu} \quad \text{(IX-148)}$$

ذات الصيغة غير المحدَّدة إلى استعمال طريقة المقطع السابق. وتكون العلاقات المستخلصة من (IX-148) باستعمال مبدأ الفعل المستقر صالحة «خارج الشحن الكهربائية». ولكن في نظرية مي نفترض أنه ليس هناك «خارج الشحن الكهربائية». فالشرط $J_{\mu} = 0$ هو حالة حديَّة. لذلك يجب استبدال الكثافة العددية (IX-148) بالدالّة:

$$L_m = \frac{1}{4} \varphi_{\mu\nu}\varphi^{\mu\nu} - f(\pm\sqrt{\varphi_{\mu}\varphi^{\mu}}) \quad \text{(IX-149)}$$

حيث f هي دالّة عددية تتغير تبعاً للكمون الكهرمغنطيسي ولا تتغير من هيكل إسناد إلى آخر باستعمال تحويل لورنتز.

الحالة الخاصة للسكون مع تناحٍ كروي

في حالة السكون تقبل المعادلات من (IX-137) إلى (IX-140) الحل:

$$\text{(IX-150)} \qquad E = -\operatorname{grad} V \quad , \quad H = I = 0$$

ووفقاً للمعادلات (IX-30) و(IX-150) نجد $\dfrac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi_p} = \dfrac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi_{pq}} = 0$ (p.q = 1. 2. 3) مما يعني أن الثابت في التحويل L_m يصبح في حالة السكون:

$$\text{(IX-151)} \qquad L_m = -\frac{1}{2} \sum_r \varphi_{r0}\varphi_{r0} - f(V) \quad , \quad \varphi_0 = -V.$$

وإذا طبقنا التحديدات (IX-130) على الصيغة (IX-151) نجد:

$$\text{(IX-152)} \qquad f^{p0} = \frac{\partial l_m}{\partial \varphi_{p0}} = \varphi^{p0}$$

$$\text{(IX-153)} \qquad j^0 = 4\pi p = -\frac{\partial l_m}{\partial \varphi_0} = f'(\varphi_0) = -f'(V).$$

أما المعادلات (IX-137) ـ (IX-140) التي تعادل في هذه الحالة $\operatorname{div} D = 4\pi p$ فتكتب استناداً إلى المعادلات (IX-152) و(IX-150) و(IX-153).

$$\text{(IX-154)} \qquad \operatorname{div} E = -\operatorname{div} \operatorname{grad} v = -f'(V).$$

فإذا كان مصدر المجال ذا تناحٍ كروي نستعمل الإحداثيات القطبية فنجد:

$$\text{(IX-155)} \qquad \operatorname{div} \operatorname{grad} V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) = f'(V).$$

إذاً يجب أن نبحث عن حلول المعادلة (IX-154) المتناهية والمتواصلة والخاضعة للشرط الحدي $V \to 0$ إذا $r \to \infty$. أما شِحنة الجسيمة فتحسب بتكامل كثافة الشحنة الكهربائية على كامل الفضاء أي[16]:

---

(16) في الإحداثيات الكروية:

$$ds^2 = -dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2) + c^2 dt^2 \qquad ١$$

$$g_{11} = -g_{00} = -1 \quad , \quad g_{22} \sin^2\theta = g_{33} = -r_3 \sin^2\theta \quad , \quad \sqrt{-g} = r^2 \sin\theta.$$

$$\text{(IX-156)} \qquad q = \int\int\int \rho \sqrt{-g}\, dr\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int\int\int r^2 f'(V) \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \int_0^\infty r^2 f'(V)\, dr = \int \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) dr$$

$$= \left[r^2 \frac{\partial D}{\partial t} \right]_0^\infty .$$

ومن جهة ثانية تحسب كتلة الجسيم بتكامل كثافة الطاقة على كامل الفضاء:

$$\text{(IX-157)} \qquad m = \frac{1}{c^2} \int\int\int W \sqrt{-g.}\, dr\, d\theta\, d\varphi = \frac{4\pi}{c^2} \int_0^\infty W r^2 dr.$$

حيث استناداً إلى المعادلات (IX-146) و (IX-149) و (IX-153) نجد أن:

$$\text{(IX-158)} \qquad W = \frac{E^2}{2} - f(V) + Vf'(V).$$

وأن:

$$\text{(IX-159)} \qquad m = \frac{4\pi}{c^2} \int r^2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)^2 - f(V) + Vf'(V) \right] dr.$$

وإذا حسبنا التكامل بالتجزيء آخذين بعين الاعتبار (IX-155) نجد:

$$\text{(IX-160)} \quad \int r^2 \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)^2 dr = \int \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 V - \frac{\partial V}{\partial r} \right) \left(- V \frac{\partial}{\partial r} \right) \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) \right] dr$$

$$= - \int V r^2 f'(V)\, dr.$$

مما يعطي:

$$\text{(IX-161)} \qquad m = \frac{4\pi}{c^2} \int r^2 \left[\frac{V}{2} f'(V) - f(V) \right] dr.$$

يعني هذا أن خصائص الجسيم الذي هو مَصدر المجال مثل كتلته وشحنته يمكن حسابهما من دالّة الكمون العددي V في حالة السكون. حسب مفهوم مي ليس الإلكترون جسيماً منحصراً في نقطة معينة بل يمتد ليشمل كل الفضاء. وباختيار مناسب للدالّة f(V) يمكن استنتاج تكامُلات فضائية متناهية وقادرة على تمثيل الشحنة الكهربائية والكتلة للإلكترون.

أحد الإعتراضات الأساسية على هذه النظرية يتعلق بالدور البارز التي يعطيه للكمون الكهربائي. ففي النظرة العادية للكهرمغنطيسية ليس للكمون الكهربائي معنى فيزيائي مباشر مثل المجال. ولا يحدَّد بدقة إذ يمكن أن يزاد عليه تدرج أيّة دالّة عددية. ومن جهة ثانية فإن الصيغة (IX-149) للدالّة L_m تبقى اصطناعية والدالّة f تبقى فيها اختيارية.

وقد أتت نظرية بورن ـ انفلد Born-Infeld لتعالج هذه الصعوبات المهمة وذلك بحساب خصائص المَصدر بالنسبة إلى المجال الكهرمغنطيسي وليس الكمون. ولكن دالّة الفعل تبتعد جذرياً عن الصيغ الماكسويلية الثابتة في التحويل وليس فقط بزيادة الدالّة f الاختيارية. بيد أن الاختيار الطبيعي لدالّة فعل مناسبة واستبعاد الفرضيات غير المعلَّلة المرتبطة باختيار الدالّة f(V) هي تعديلات أساسية بدأت مع نظرية بورن ـ انفلد وتحققت بطريقة أفضل مع نظرية أينشتاين ـ شرودنغر الموحدة.

10) نظرية بورن ـ انفلد[17]

1 ـ لنحدِّد نظام إحداثيات اختيارية $x^\mu(x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z, x^0 = ct)$ مع $g_{\mu\nu}$ كموتِّر القياس. ونفترض أن الكميات الفيزيائية الأساسية في النظرية هي المركِّبات الست للمجال الكهرمغنطيسي $\varphi_{\mu\nu}$ (وليس المركّبات العشر $\varphi_{\mu\nu}$ و φ_μ كما في نظرية مي) أما المركِّبات المخالفة للتغيُّر للمجال فهي:

$$\varphi^{\mu\nu} = g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \varphi_{\rho\sigma} \qquad \text{(IX-162)}$$

ونحدِّد المجال الثُنوي بالصيغ العادية:

$$\varphi^{\mu\nu*} = \frac{1}{2\sqrt{-g}} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varphi_{\rho\sigma} \quad , \quad \varphi^*_{\mu\nu} = -\frac{\sqrt{-g}}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \varphi^{\rho\sigma} \ , \qquad \text{(IX-163)}$$

$$(\varphi^{\mu\nu*} = g\mu\rho\, g^{\nu\sigma}\, \varphi a^*_{\rho\sigma})$$

حيث $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \pm 1,0$ هو رمز ليفي Levi وسيفيتا Civita للتبادل.

يستعمل بورن وانفلد دالّة الفعل وهي دالّة عددية:

---

(17) M. BORN. Proc. Roy. Soc., A. 143, 1934, 410. Ann. Inst. H. Poincaré. 1973; M. Born et L. INFELD. Proc. Roy. Soc. A, 144, 1934, 425.

(IX-164) $$\mathscr{L}_B = (\sqrt{-\pi} - \sqrt{-g})$$

حيث g هو محدِّد déterminant المركِّبات $g_{\mu\nu}$ لموتِّر القياس و π هو محدِّد الموتِّر:

(IX-165) $$\pi_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \varphi_{\mu\nu}.$$

ويمكن أن نحسب π تبعاً للمحدِّدات g و φ. لذلك نحدِّد المركِّبات المخالفة للتغيُّر $g^{\mu\nu}$ لموتِّر القياس حسب المعادلة ($g_{\mu\rho}g^{\nu\rho}= \delta^{\nu}_{\mu}$) أي:

(IX-166) $$gg^{\mu\nu} = \text{mineur } g_{\mu\nu},$$

فنجد بحساب بسيط للمحدِّدات أن:

(IX-167) $$\pi = g + \varphi + \frac{g}{2} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \varphi_{\mu\nu} \varphi_{\rho\sigma}.$$

وتكتب (IX-165) أيضاً بالصيغة:

(IX-168) $$\boxed{\mathscr{L}_B = \sqrt{-g}\,(L_B - 1)}$$

حيث[18]:

(IX-169) $$\boxed{L_B = \left(1 + \frac{\varphi}{g} + \frac{1}{2} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \varphi_{\mu\nu} \varphi_{\rho\sigma}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

ونلاحظ أن L_B ترتبط بكميتين أساسيتين في نظرية ماكسويل وثابتتين في التحويل من هيكل إسناد إلى آخر، وتساوي هاتان الكميتان

(IX-170) $$F = H^2 - E^2 = \frac{1}{2} \varphi_{\mu\nu}\varphi^{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} \varphi_{\mu\nu}\varphi_{\rho\sigma}.$$

(IX-171) $$G(E\cdot H) = \frac{1}{4} \varphi_{\mu\nu}\varphi^{\mu\nu^*} = \frac{1}{8\sqrt{-g}} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varphi_{\mu\nu}\varphi_{\rho\sigma} = \sqrt{\frac{\varphi}{-g}}$$

(18) إذا كان المجال ضعيفاً ($\varphi_{\mu\nu} \leqslant 1$) نجد:

$$L_B \simeq 1 + \frac{1}{4} \varphi_{\mu\nu}\varphi^{\mu\nu}$$ و: $$\mathscr{L}_B = \frac{\sqrt{-g}}{4} \varphi_{\mu\nu}\varphi^{\mu\nu}$$

أي صيغة نظرية ماكسويل في حالة الفراغ (الخلاء).

فتكتب L_B:

(IX-172) $$L_B = (1 + F - G^2)^{\frac{1}{2}} .$$

ويمكن أن نحدِّد المجال المرافق conjugate

(IX-173) $$\sqrt{-g}\ f^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}_B}{\partial \varphi_{\mu\nu}} = \sqrt{-g}\left(2\ \frac{\partial L}{\partial F}\ \varphi^{\mu\nu} + \frac{\partial L}{\partial G}\ \varphi^{\mu\nu*}\right)$$

أيّ:

(IX-174) $$\boxed{f^{\mu\nu} = \frac{\varphi^{\mu\nu} - G\varphi^{\mu\nu*}}{L}}$$

مما يعني أن المجالين المترافقين $f^{\mu\nu}$ و $\varphi_{\mu\nu}$ يرتبطان بعلاقات غير خطية (IX-174).

2 ـ لنفترض أن المجال الأساسي $\varphi_{\mu\nu}$ يخضع للعلاقة:

(IX-175) $$\varphi_{\mu\nu\rho} \equiv \partial_\mu \varphi_{\nu\rho} + \partial_\rho \varphi_{\mu\nu} + \partial_\nu \varphi_{\rho\mu} = 0$$

أو:

(IX-176) $$\partial_\rho\,(\sqrt{-g}\ \varphi^{\mu\rho*}) = 0.$$

مما يعني أن المجال $\varphi_{\mu\nu}$ يشتق من كمون φ_ν أي:

(IX-177) $$\varphi_{\mu\nu} = \partial_\mu \varphi_\nu - \partial_\nu \varphi_\mu .$$

فإذا طبقنا مبدأ التغيُّرات variation principle على الدالة $\mathcal{L}_B$ نصل إلى نتائج قريبة من نتائج المقطع الثامن من هذا الفصل. إذ يمكن تطبيق هذه النتائج على الكثافة $\mathcal{L}_B$ التي تتغير تبعاً للكمون φ_μ من خلال المجال $\varphi_{\mu\nu}$. فإذا وضعنا:

(IX-178) $$\sqrt{-g}\ f^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}_B}{\partial \varphi_{\mu\nu}}$$

نجد بدلاً عن المعادلة (IX-133) المعادلة:

(IX-179) $$\partial_\rho\,(\sqrt{-g}\ f^{\mu\rho}) = 0.$$

مما يعني أن معادلات ماكسويل (IX-133) قد استبدلت بالمعادلات (IX-179) التي تختلف عنها بانعدام الجانب الأيمن لأن الكمون φ_μ لا يدخل مباشرة في دالّة الفعل. ولكن الصيغة (IX-172) للدالّة L_B تقود إلى العلاقات (IX-174) بين التحريضات والمجالات. وهي علاقات غير خطية خلافاً لفرضيات ماكسويل.

3 ـ تحدُّد كثافة التيار بالمتَّجِه الرباعي:

$$J^\mu = \partial_\rho (\sqrt{-g}\ \varphi^{\mu\rho}). \qquad \text{(IX-180)}$$

ولكن استناداً إلى المعادلة (IX-179) نجد:

$$\partial_\rho (\sqrt{-g}\ f^{\mu\rho}) = \partial_\rho \left[\sqrt{-g} \left(2\ \frac{\partial L}{\partial F}\ \varphi_{\mu\rho} + \frac{\partial L}{\partial G}\ \varphi^{\mu\rho^*} \right)\right] = 0. \qquad \text{(IX-181)}$$

فإذا أخذنا بعين الاعتبار المعادلة (IX-181) نجد:

$$- J^\mu = \frac{1}{\dfrac{2\,\partial L}{\partial F}} \left[2\varphi^{\mu\rho}\partial_\rho \left(\frac{\partial L}{\partial F} \right) + \varphi^{\mu\rho^*}\partial_\rho \left(\frac{\partial L}{\partial G} \right)\right]. \qquad \text{(IX-182)}$$

4 ـ الحالة الخاصة لمجال دائم ذي تناحٍ كروي

لنفترض أن المجال الكهرمغنطيسي ناتج عن توزيع ثابت للشحن الكهربائية بتناحٍ كروي. من المستحسن في هذه الحالة أن نستعمل الإحداثيات الكروية:

$$y^1 = r \ ,\ y^2 = \theta \ ,\ y^3 = \varphi \ ,\ y^0 = ct. \qquad \text{(IX-183)}$$

فنجد:

$$ds^2 = - dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta\ d\varphi^2) + c^2dt^2 \qquad \text{(IX-184)}$$

التي تُستنتج من الصيغة العامة:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\ dy^\mu\ dy^\nu \qquad \text{(IX-185)}$$

بوضع:

$$g_{11} = \frac{1}{g^{11}} = -1 \ ,\ g_{22} = \frac{1}{g^{22}} = r^2 \ , \qquad \text{(IX-186)}$$

$$g_{23} = \frac{1}{g^{23}} = - r^2 \sin^2\theta \quad , \quad g_{00} = \frac{1}{g^{00}} = 1,$$

$$\text{(IX-187)} \qquad \sqrt{-g} = r^2 \sin\theta.$$

باستعمال هذه الإحداثيات ينحصر المجال الدائم $\varphi_{\mu\nu}$ بالمركّبات $\varphi_{\mu 0}$ والتحـريض $f^{\mu\nu}$ بالمركبات $f^{\mu 0}$. ومن جهة ثانية ينحصر التناحي الكروي بالمركّبات φ_{10} و f^{10} فقط. نجد إذاً استناداً إلى الصيغ (IX-179) و (IX-187) أن:

$$\text{(IX-188)} \qquad \partial_1 (r^2 f^{01}) = \partial_1 (r^2 g^{00} g^{11} f_{01}) = \partial_1 (r^2 f_{10}) = 0$$

ومن ثم:

$$\text{(IX-189)} \qquad f_{10} = g_{11}\, g_{00}\, f^{10} = - f^{10} = \frac{k}{r^2}$$

حيث k هي ثابت التكامل Integration constant.

في هـذه الحالـة الخاصـة تكتب العـلاقـات غـير الخطيـة في الصيغـة (IX-174) بالصيغة:

$$\text{(IX-190)} \qquad f^{10} = \frac{\varphi^{10}}{\sqrt{1 + \varphi^{10}\varphi_{10}}} \quad , \quad G = 0.$$

فنجد هكذا أن:

$$\text{(IX-191)} \qquad f^{10} f_{10} = \frac{\varphi^{10}\, \varphi_{10}}{1 + \varphi^{10}\varphi_{10}}$$

ونتيجة لذلك نجد:

$$\text{(IX-192)} \qquad \varphi_{10}\varphi^{10} = \frac{f^{10} f_{10}}{1 - f^{10} f_{10}}$$

أي إذا أخذنا بعين الاعتبار الصيغة (IX-189) نجد:

$$\text{(IX-193)} \qquad \varphi_{10} = -\varphi^{10} = \frac{f^{01}}{\sqrt{1 - f^{01} f_{01}}} = \frac{k}{r^2}\, \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{k^2}{r^4}}}$$

لنُسَمِّ b النسبة بين صيغة المجالات بالوحدات العاديـة أي E, B, H, D وصيغها

$(\varphi_{\mu\nu}, f^{\mu\nu})$ بالوحدات الطبيعية أي:

$$\text{(IX-194)} \quad E = b\,(\varphi_{10}, \varphi_{20}, \varphi_{30}) \;, \qquad B = b\,(\varphi_{23}, \varphi_{31}, \varphi_{12})$$

$$\text{(IX-195)} \quad D = b\,(f_{10}, f_{20}, f_{30}) \;, \qquad H = b\,(f_{23}, f_{31}, f_{12}).$$

فنجد استناداً إلى (IX-189) و (IX-193):

$$\text{(IX-196)} \qquad D_r = bf_{10} = b\frac{k}{r^2}$$

$$\text{(IX-197)} \qquad E_r = b\varphi_{10} = \frac{b\,k}{r^2}\,\frac{1}{\sqrt{1-\frac{k^2}{r^4}}}$$

وإذا وضعنا:

$$\text{(IX-198)} \qquad kb = q \quad , \quad b = \frac{q}{r_0^2} \quad ,$$

نجد الصيغ التالية للمركّبات الشعاعية:

$$\text{(IX-199)} \qquad D_r = \frac{q}{r^2} \quad , \qquad E_r = \frac{q}{r_0^2}\,\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{r}{r_0}\right)^4}}$$

يكون المجال E_r متناهياً في المركز $(r = 0)$ إذ تبلغ قيمته:

$$\text{(IX-200)} \qquad b = \frac{q}{r_0^2} = (E_r)_{r=0}.$$

فالثابت b يمثل «المجال المطلق».

يمكن إذاً أن نعتبر مصدر المجال إما كنقط شاذة (مفردة) singular points تكوِّن مجال تحريض D_r لا متناه في مركز المصدر، وإما كتوزيع متواصل في كل الفضاء يولِّد مجالاً E_r متناهياً في المركز. طبعاً التأويل الثاني هو الذي يعبِّر عن لا ثنائية المجال والجسيم. فانكار التباين بين المجال والمصدر هو من النتائج الأساسية لنظرية بورن. ويعود هذا إلى لا خطية العلاقات بين المجال والتحريض التي هي بدورها نتيجة للصيغة (IX-165) أو (IX-172) التي نختارها لدالّة لاغرانج lagrangian في هذه النظرية.

في هذه النظرية تمتد الشحنة الكهربائية مبدئياً لتشمل كل الفضاء. وجميع

ميّزاتها تحدَّد تبعاً للمجال (وليس الكمون كما في نظرية مي). كذلك تتيح الكثافة المتجهية J^{μ} المحدَّدة بالصيغة (IX-180) أن نربط الكثافة الحرة للشحنة والتيار الحر تبعاً للمجال (وليس الاحداثيات).

وبشكل خاص يمكن أن نحدِّد شحنة الجسيم بحساب التكامل للكثافة الحرة J^0 على كامل الفضاء (بما فيه مركز الشحنة). والقيمة المتناهية للمجال في المركز تتيح للتكامل أن يكون بقيمة متناهية وقادراً بالتالي على تمثيل الشحنة الكهربائية q.

وفعلاً إذا كان المجال دائماً بتناحٍ كروي تصبح الصيغة (IX-182) كما يلي:

$$-j^0 = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{k^2}{r^4}}} \quad \varphi^{01} \cdot \partial_1 \left(\sqrt{1+\frac{k^2}{r^4}}\right) \tag{IX-201}$$

$$= \frac{k}{r^2} \frac{1}{1+\frac{k^2}{r^4}} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\sqrt{1+\frac{k^2}{r^4}}\right)$$

وإذا استعملنا المعادلات (IX-186) و (IX-187) و (IX-183) تكتب المعادلة (IX-201) كما يلي:

$$j^0 = \frac{2k^3}{r^7\left(1+\frac{k^2}{r^4}\right)^{3/2}} = \frac{2}{r\left(1+\frac{r^4}{k^2}\right)^{3/2}} \tag{IX-202}$$

وتكون قيمة الكثافة:

$$\rho = \frac{b}{4\pi} \; J^0 = \frac{b}{4\pi} \; \sqrt{-g} \; J^0 = \frac{qr^2 \sin\theta}{r_0^2 .\, 2\pi r\left(1+\frac{r^4}{r_0^4}\right)^{3/2}} \tag{IX-203}$$

وإذا حسبنا التكامل على كل الفضاء (بما فيه المنطقة المحيطة بالمركز) نجد:

$$\int \rho \, dr \, d\theta \, d\varphi = \int_0^{\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \rho \, dr \, d\theta \, d\varphi \tag{IX-204}$$

$$= \frac{2q}{r_0^3} \int_0^{\infty} \frac{r^2 \, dr}{\frac{r}{r_0} \left(1+\frac{r^4}{r_0^4}\right)^{3/2}}$$

$$= q \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi \, d\psi = q$$

حيث وضعنا:

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{r^2}{r_0^2} \qquad \text{(IX-205)}$$

هكذا يقود تـوزيع الشحنـة بالكثـافة الحـرة ρ إلى صيغة متنـاهية لشحنـة الجسيم بحساب التكامل على كـل الفضاء. هـذه النتيجة ومفـاهيم الشحنة التي تنتـج عنها ترتبط في هذه النظرية بكون العلاقات بين التحريض والمجالات لا خطية.

الفصل العاشر

الاثباتات التجريبية للنسبية الخاصة

مقارنة نظرية النسبية الخاصة مع التجربة لا تشمل فقط اثبات صحة مبادىء النظرية بل تتعدى ذلك إلى كل الاستنتاجات والتوقعات المستخلصة من هذه النظرية، وتشمل حاليا هذه المقارنة جزءاً كبيراً من الفيزياء الكلاسيكية والكمومية. فقد استعملت مبادىء النسبية الخاصة كأساس لبناء أو تحوير نظريات فيزيائية عديدة. وتشكل نتائج هذه النظريات عند مقارنتها بالتجربة محكاً لصحة الفرضيات الأساسية للنسبية الخاصة.

ومن أكثر هذه النظريات شهرة هي النظرية الكمومية النسبية للإلكترون كما صاغها ديراك عام 1932. وتطبق هذه النظرية على كل جسيم مشحون ذي سرعة عالية ودومة $\frac{1}{2}$. وتقود هذه النظرية النسبية مباشرة إلى توقع عزم مغنطيسي ذاتي للالكترون كان يفترض اعتباطياً في النظريات غير النسبية. فتجد الظواهر المتعلقة بالدومة مكاناً بصورة تلقائية في هذه النظرية النسبية، واثباتات هذه الظواهر تجريبياً تشكِّل إثباتاً غير مباشر لنظرية النسبية الخاصة. وبشكل خاص فقد أجريت قياسات على البنية الدقيقة fine structure للأشعة H_α للهيدروجين أو D_α للدوتريوم deuterium. وتتفق القيم التجريبية تماماً مع التوقعات النظرية المتعلقة بتوزيع شدة الإشعاع حسب النظرية النسبية للبنية الدقيقة.

كما أن نظرية ديراك المعدَّلة يمكن أن تستعمل لبناء نظرية نسبية للجسيمات بأي دومة سواء أكانت صحيحة أو نصف صحيحة. وبطريقة أخرى استطاعت النظرية الكمومية للمجالات أن تصل إلى صياغة نسبية مقبولة بأعمال شوينغر Schwinger وفاينمان Feynman ودايسون Dyson. والتحريك الكهربائي الكمومي

هو حالة خاصة للنظرية الكموميــة للمجالات ويشكـل امتداداً للتحـريك الكهـربائي النسبي.

لن نتطرق هنا إلى الترابط ولا إلى النتائج التجريبية للتوسعات المنبثقة مباشرة أو غير مباشرة عن النسبية الخاصة. بل سنكتفي بـدراسة بعض الإثبـاتات التجـريبية للمبادىء الأساسية للنسبية الخاصة. وقد ذكرنا بعضاً منهـا في الفصول السـابقة. سنكتفي هنا بعرض مفصَّل للبعض الآخر.

أ ـ تباطؤ الساعات

يرتبط الوقت الذاتي Δ_τ الذي تقيسه ساعـة ثابتـة في هيكل اسنـاد S' بالـوقت t الذي يقيسه مشاهد في هيكل إسناد غاليلي آخر S بالعلاقة (V - 44) أي:

$$\Delta t = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1-\beta^2}} > \Delta_\tau. \qquad \text{(X-1)}$$

مما يعني أن فاصلاً زمنيًّا Δ_τ مَقيسـاً في هيكل الاسنـاد الذاتي هـو دائماً أقـل من قيمته Δt إذا قيس في هيكل آخر: فالساعات في هيكل إسناد متحرك تتباطـأ بالنسبـة إلى مشاهد في هيكل إسناد غاليلي آخر.

1) ظاهرة دوبلر وتباطؤ الساعات

لنتفحص ساعة مؤلَّفة من ذرة تحدث فيها ارتجاجات بتردد ذاتي ν_0 (وهو التردد المقيس في هيكل الاسناد المرتبط بالذرة). أما في هيكل اسناد آخر فيكون هـذا التردد استناداً إلى الصيغة (X-1) بقيمة:

$$\nu = \nu_0\sqrt{1-\beta^2} < \nu_0 \qquad \text{(X-2)}$$

أي أن المشاهد يلاحظ نقصاناً في تردد (أي زيادة في طول موجة) الإشعـاع الصادر عن الذرة المتحرِّكة بالنسبة إلى المطياف ويظهر هذا بانزياح هذه الأشعة نحو الأحمر red shift.

ولكن إضافة إلى التغيُّر (X-2) في التردد (وهو من الدرجة الثانية أي أنه متناسب مع β^2) هناك ظاهرة دوبلر الكلاسيكية (التقليدية) (انظر المقطـع الثالث من الفصـل الخامس) التي هي من الدرجة الأولى وبالتالي تغطي على التباطؤ النسبي (X-2).

إذا كانت θ هي الزاوية بين اتجاه انتشار الأشعة واتجاه حركة مَصـدرها يكـون

التردد حسب ظاهرة دوبلر الكلاسيكية:

$$\nu = \frac{\nu_0}{1 - \beta \cos \theta} \qquad \text{(X-3)}$$

فـإذا أضفنا ظـاهرة التبـاطؤ النسبي (X-2) إلى ظاهـرة دوبلر الكـلاسيكيـة (X-3) نحصل على الصيغة التالية للتردد المقيس:

$$\boxed{\nu = \frac{\nu_0 \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos \theta}} \qquad \text{(X-4)}$$

وبشكل خاص إذا كانت الزاوية $\theta = \frac{\pi}{2}$، تختفي ظاهرة دوبلر الكـلاسيكية ويبقى فقط التباطؤ النسبي (X-2). لذلك يسمى التباطؤ النسبي في الصيغة (X-2) ظاهـرة دوبلر المستعرضة transversal.

ويمكن أن نحصل على الصيغة (X-4) مباشرة من نظرة إجماليـة ونسبية لظـاهرة دوبلر. وذلك بتطبيق قواعد المقطع 8 من الفصل السابع في الحـالة الخـاصة $n = 1$ أي لانتشار الموجات في الخلاء (أو في الهواء تقريباً). لذلك نفترض أن مصدر الموجة يتحرك باتجـاه Ox وأن الموجـة تنتشر بالإتجـاه on ($\widehat{xOn} = \theta$) (انظر الـرسم 30) ليلتقطها مشاهد في النقطة P من هيكـل الاسناد S(Ox, Oy). إحـداثيات النقطـة P هي (x, y) في S و (x′, y′) في هيكـل الاسنـاد S′(O′x′, O′y′) المـرتبط بـالمَصـدر المتحرك. نفترض أن S′ يتحرك بسرعة ω بحيث يتطابق المحور O′x′ مـع المحور Ox ويتطابق الهيكلان الاسناديان في الوقت $t = t' = 0$.

الوقت اللازم كي يصل صدر الموجة الأولى من O إلى P هو:

$$t_1 = \frac{l}{c} = \frac{x\cos\theta + y\sin\theta}{c} \qquad \text{(X-5)}$$

فيكون عدد الموجات التي وصلت في الوقت t إلى النقطة P من S:

$$\nu(t - t_1)$$

وهذا العدد لا يتغيَّر من هيكل إلى آخر فنجد إذاً العلاقة:

$$\nu\left(t - \frac{l}{c}\right) = \nu'\left(t' - \frac{l'}{c}\right) \qquad \text{(X-6)}$$

حيث ν' هو تردد الموجات في هيكل الاسناد الذاتي S' للمصدر أي:

$$\nu' = \nu_0. \quad \text{(X-7)}$$

ومن جهة ثانية $\frac{l'}{c}$ تمثل الوقت اللازم للموجة OM كي تصل إلى النقطة P، كما يقاس في هيكل الاسناد S'. يمكن أن نكتب لهذا الوقت صيغة مشابهة للصيغة (X-5) تبعاً للإحداثيات $x'y'$ للنقطة P في S':

$$\frac{l'}{c} = \frac{x'\cos\theta' + y'\sin\theta'}{c} \quad \text{(X-8)}$$

حيث θ' هي زاوية الإنتشار في S'.

باستعمال (X-8) يمكن أن نكتب (X-6) كما يلي:

$$\nu\left(t - \frac{x\cos\theta + y\sin\theta}{\theta}\right) = \nu'\left(t' - \frac{x'\cos\theta' + y'\sin\theta'}{c}\right) \quad \text{(X-9)}$$

وإذا استعملنا قانون تحويل لورنتز الخاص:

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad y = y', \quad t = \frac{t' + \frac{\beta}{c}x'}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{(X-10)}$$

نصل إلى معادلة تطابقية يجب أن يتساوى فيها معامل المتغيِّرات x' و y' و t' لأن ν' و θ' هي طبعاً مستقلة عن موقع النقطة P. فنجد:

$$\frac{\nu(1-\beta\cos\theta)}{\sqrt{1-\beta^2}} = \nu', \qquad \frac{\nu(\beta - \cos\theta)}{\sqrt{1-\beta^2}} = -\nu'\cos\theta' \quad \text{(X-11)}$$

$$\nu\sin\theta = \nu'\sin\theta'$$

وما هذه إلّا العلاقات (VII - 67) و (VII - 68) و (VII - 69) التي اثبتناها في الفصل السابع في الحالة الخاصة $n = 1$ أي $u = u' = c$ ومنها نستخلص العلاقات التالية:

$$\boxed{\nu' = \frac{\nu(1-\beta\cos\theta)}{\sqrt{1-\beta^2}}} \quad \text{(X-12)}$$

$$\text{tg}\ \theta' = \frac{\sqrt{1-\beta^2}\sin\theta}{\cos\theta - \beta} \qquad \text{(X-13)}$$

أيّ:

$$\cos\theta' = \frac{\cos\theta - \beta}{1 - \beta\cos\theta}\ , \qquad \sin\theta' = \frac{\sqrt{1-\beta^2}\sin\theta}{1 - \beta\cos\theta}$$

ولكن $\nu' = \nu_0$ أيّ التردد الذاتي للذرة. فنجد إذاً:

$$\nu = \frac{\nu_0\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \beta\cos\theta} \qquad \text{(X-14)}$$

وتغيُّر التردد من ν_0 إلى ν هو ظاهرة دوبلر في النظرية النسبية. أما تغيُّر الزاوية θ' إلى θ فهو ظاهرة الزيغ أي التغير في اتجاه الأشعة بسبب حركة المَصْدر بالنسبة إلى المشاهد.

وإذا كانت المشاهدة تتم في اتجاه حركة المصدر (ظاهرة دوبلر الطولية longitudinal) تكون $\theta = 0$، ونستخلص من الصيغة (X-11) أن:

$$\theta' = 0 \quad , \quad \nu = \nu_0 - \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \qquad \text{(X-15)}$$

فليس هناك ظاهرة زيغ في هذه الحالة.

أما إذا كانت المشاهدة بالإتجاه العمودي على حركة المصدر (ظاهرة دوبلر المستعرضة) $\theta = \frac{\pi}{2}$ فنجد:

$$\cos\theta' = -\beta \quad , \quad \nu = \nu_0\sqrt{1-\beta^2}. \qquad \text{(X-16)}$$

فتكون ظاهرة دوبلر عندئذ نتيجة لتباطؤ الساعات فقط.

2) تجارب ايفز وستيلول

تظهر مقارنة المعادلات (X-15) و (X-16) أن ظاهرة دوبلر غير النسبية هي من الدرجة الأولى بينما التصحيح الناتج عن تباطؤ الساعات هو من الدرجة الثانية. طبعاً يمكن أن نلغي الظاهرة من الدرجة الأولى بالمشاهدة في اتجاه عمودي على

حركة المصدر. ولكن أي خطأ في تقدير الزاوية θ يغطي تماماً على مساهمة الكميّات النسبية من الدرجة الثانية ويجعل اثبات نظرية النسبية خداعاً.

أما في تجربة إيفز وستيلول[1] فيشاهد في الوقت ذاته الاشعاعان الصادران عن المصدر ذاته باتجاهين متعاكسين. فنحصل على الترددين:

$$\text{(X-17)} \qquad \nu_1 = \frac{\nu_0 \sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta\cos\theta}, \qquad \nu_2 = \frac{\nu_0 \sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta\cos\theta}$$

عملياً تكون زاوية المشاهدة صغيرة جداً. أما أطول موجات المشاهدة فتخضع للعلاقة:

$$\text{(X-18)} \qquad \frac{\lambda_1+\lambda_2}{2} = \frac{\lambda_0(1-\beta\cos\theta)}{2\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{\lambda_0(1+\beta\cos\theta)}{2\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

فيكون الفرق بين هذه القيمة الوسطية وطول الموجة الذاتي (أيّ إذا كانت الذرة ساكنة):

$$\text{(X-19)} \qquad \Delta_2\lambda = \frac{\lambda_1+\lambda_2}{2} - \lambda_0 \simeq \lambda_0\frac{\beta^2}{2}$$

ومن جهة ثانية تتيح مشاهدة الأشعة الصادرة بزاوية θ صغيرة جداً قياس الظاهرة من الدرجة الأولى (أيّ الظاهرة الكلاسيكية تقريباً):

$$\text{(X-20)} \qquad \Delta_1\lambda \simeq \lambda_0\beta.$$

فتقارن التجربة بين $\Delta_1\lambda$ و $\Delta_2\lambda$.

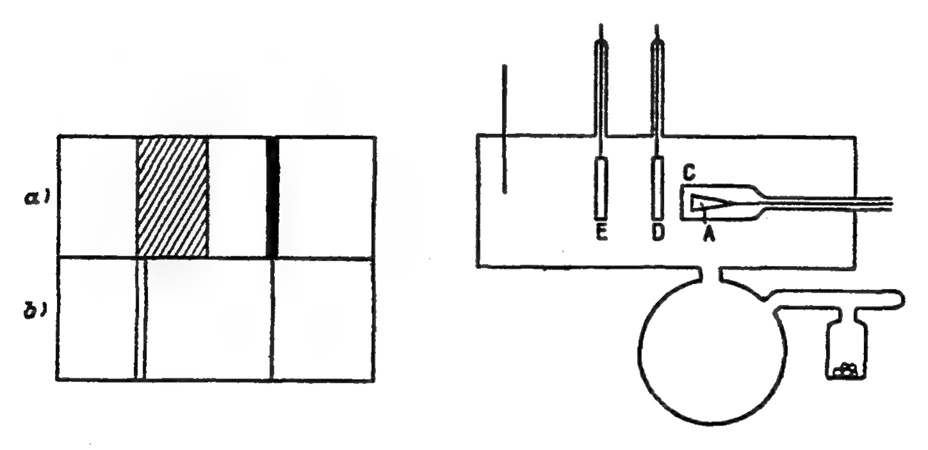
استعمل إيفز وستيلول مصابيح أشعة الأقنية كما عدلها باتو Batho وديمبستر[2] Dempster. تتيح هذه المصابيح الحصول على ذرات متحرِّكة بسرعة واحدة. لكي يكون قياس $\Delta_2\lambda$ ممكناً يجب أن نختار ذرات تصدر عنها أشعة ذات طول موجة λ_0 دقيق جداً. لذلك تشرَّد ذرات الهيدروجين بواسطة الإلكترونات الصادرة عن سلك

---

(1) H.E.IVES et G.R. STILLWELL. Journ. Opt. Soc. America, 28, 1938, 215; H.E. IVES. Journ. Opt. Soc. Amreica. 31, 1941, 369; R. LENNUIER. Revue Scientifique. 85, 1947, 740.

(2) H.F. BATHO et A.J. DEMPSTER. Astr. Journ. 75, 1932, 34.

ترفع حرارته كهربائياً، ثم تسرَّع جزيئيات الهيدروجين بواسطة كمون عالٍ (يصل إلى 40 000 فلط) بين مسريين متقاربين D و E (انظر الرسم 33). ويكون ضغط الهيدروجين ضعيفاً جداً كي لا يحصل أيّ تصادم أو تبدل في الشحن في الفسحة الصغيرة DE (نحصل على هذا الضغط الضعيف بتغطيس أنبوب من الفحم في الهواء السائل). ثم تنفصل الجزيئيات المشرَّدة H_2 و H_3 إلى ذرات غير مشحونة. بهذه الطريقة يمكن الحصول على ذرات ذات سرعة واحدة ونشاهد إشعاعها (إشعاعات سلسلة بالمر Balmer).



الشكل 33 ـ تجربة ايفز وستيلول

في الأجهزة العادية لأشعة القناة لا تكون للذرات سرعة واحدة، فتتوسع أشعتها بظواهر دوبلر من الدرجة الأولى. فيبدو طيف الأشعة الذاتية للذرات والأشعة المشاهدة المزاحة بتأثير دوبلر كما في الصورة (a). أما في جهاز ايفز وستيلول فيكون الطيف دقيقاً لدرجة أنه يمكن قياس الإزاحة $\Delta_2\lambda$ التي هي من الدرجة الثانية كما في الرسم (b) الذي يظهر خطين متقاربين ناتجين عن الجزيئيات H_2 و H_3 المسرَّعة.

وقد شوهد الإشعاع تحت زاوية 7° مع اتجاه أشعة القناة. وتستقبل الأشعة هذه لتدخل المطياف الموضوع في مركز مرآة مقعَّرة صغيرة M محورها باتجاه المشاهدة. فتسلك الأشعة الصادرة عن كل ذرة الخطوط المستقيمة التي تصل المرآة إلى مدخل المطياف وذلك بالإتجاهين. وتتوفر هكذا ظروف لتطبيق القاعدة (X-18).

وعند وضع فرق الكمون لتسريع الذرات تُسبِّب ظاهرة دوبلر من الدرجة الأولى انزياحاً مقداره $\Delta_1\lambda = 20A$ للأشعة $H_B = 4.861\ A$. مثلاً فرق الكمون 20 000 فلط

الـذي استعمله ايفـز وستيلول يسبب انتقـالاً مقداره مليمتـران في الجهـاز. فنجـد استناداً إلى (X-20).

$$\beta \neq \frac{20}{5000} = 0.004. \qquad \text{(X-21)}$$

ونتوقع انزياحاً ناتجاً عن ظاهرة الدرجة الثانية قيمته:

$$\Delta_2\lambda = \frac{\lambda_0}{2}\ \beta^2 = \frac{\Delta_1\lambda}{2}\ \beta = \frac{20}{2} \times 0.004 = 0.04\ \text{A}. \qquad \text{(X-22)}$$

مما يقود إلى انتقال قيمته:

$$\frac{2 \times 0.04}{20} = 0.004\ \text{mm.}$$

ولكن هـذا الانتقال هـو بمقدار نصف وسـع الأشعـة H_β المستعملـة إذ إن البنيـة الدقيقة لا تظهر. ويمكن أن نتساءل عما إذا كانت الظاهرة المقيسة ناتجة عن الفرق بين الشدَّة النسبية للمركِّبات غير المفصولة للأشعة H_β. لـلإجابـة على هـذا الانتقاد أعاد إيفز وستيلول تجربتهما باستعمال فرق كمون قيمته 43.000 فلط.

مع كل هذه الاحتياطـات (واحتياطـات أخرى) فقـد ظهر اتفـاق ممتاز بـين $\Delta_2\lambda$ المتوقعة استناداً إلى المعادلة (X-19) والقيم المقيسة وذلـك لعدة قيم لكمـون التسريع أي لعدة قيم لـ β تصل $\beta = 0.007$. فتكون الظاهرة المشاهـدة متفقة مـع توقعـات النسبية الخاصة.

3) العمر الوسطي للميزونات[3]

الميـزونات Meson المكتشفـة في الأشعة الكـونية هي جسيمـات مشحونـة أو غير مشحونة تتراوح بين كتلة الإلكترون وكتلة البروتون. والميزون μ (بكتلـة تساوي 200 ضعف كتلة الإلكترون) يتفتت بعـد عمر وسطي τ إلى إلكتـرون ونيوتـرينو neutrino (وهو جسيم غير مشحون وبدون كتلة). وقد شوهد هذا التفتت على صور التقطت في حجرة ولسون[4] أو بواسطة عدّادات أوجيه[5].

---

(3) انظر أيضاً: R. LENNUIER. Revue Scientifique, fasc. 12, 1947, p.740.

(4) WILLIAMS et ROBERTS. Nature, 145, 1940, 102.

(5) P. AUGER et MAZE. C.R. Ac. Sc. 213, 1941, 381; MAZE et CHAMINADE. C.R. Ac. Sc. 214, 1942, 266; CHAMINADE, FRÉON et MAZE. C.R. Ac. Sc., 218, 1944, 402.

فالعدادات تتيح قياس العمر الوسطي τ_0 للميزونات الساكنة. لذلك يـوقف الميزون في قطعة معدنية. ويمكن بواسطة عدادات تسجيل دخول الميزون الساقط عـلى المعدن وخروج الإلكترون الناتج عن التفتت. عملياً يؤخّر انطلاق عدّاد الدخول كي يتـوافق مع انطلاق عدّاد الخروج. ممـا يتيح معـرفة عـدد الميزونـات $N(\Delta t)$ التي تتفتت في الوقت t. فنجد:

$$\text{(X-23)} \qquad y = \log\frac{N\,(\Delta t)}{t} \qquad \text{حيث وضعنا:} \qquad y = -\frac{\Delta\, t}{\tau^0} + c^{ie}$$

وإذا قيس انحنـاء الخط $y = -\frac{1}{\tau_0}\,\Delta\, t$ نعرف قيمـة العمـر الـوسطي τ_0 للميـزون السـاكن. فنجـد قيمـاً تتـراوح بـين $\tau_0 = 2.15 \pm 0.07.10^{-6}$ sec. [6] و $\tau_0 = 2.7 \pm 0.5.10^{-6}$ sec. [7]. فتكون القيمة التقريبية لعمر الميزون:

$$\text{(X-24)} \qquad \tau_0 \neq 2.2.10^{-6}\ \text{sec.}$$

ويتحرك الميزون في الفضـاء الأعلى بسرعـة قريبـة من سرعة الضـوء ويتمكن من اختـراق عدة كيلـومترات قبـل التفتت. لذلـك يجب أن نفترض أن حيـاة الميزون في الفضاء الأعلى تزيد كثيراً عن قيمتها عندما يكون الميزون سـاكناً كي تتيـح له قطـع هذه المسافات. فالعمر الوسطي $\tau_0 = 2.2.10^{-6}$ sec. يناسب مسافة وسطية:

$$\text{(X-25)} \qquad L = \nu \cdot \tau_0 \simeq c \cdot \tau_0 \simeq 3.10^8.2.2.10^{-6} = 600\ \text{métres.}$$

ولكن τ_0 هو في الواقع العمر الوسطي في هيكل الإسناد الذاتي للميزون. أما في هيكـل إسناد آخر يتحرك فيه الميزون بسرعة v فيكون عمره الوسطي:

$$\text{(X-26)} \qquad \tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

حسب توقعات النسبية الخاصة لتمدّد الفترات الزمنية. ويناسب هذا مسافة وسطية مساوية لـ :

$$\text{(X-27)} \qquad L = \tau\,\nu \simeq \frac{\tau_0 c}{\sqrt{1-\beta^2}} = W\frac{\tau_0}{m_0 c}$$

---

(6) NERESON et ROSSI. Phys. Rev. 64, 1943, 199.

(7) CACCIAPUOTI et RICCIONI. Rucerca Sc. 12, 1941, 874.

حيث W هي طاقة الميزون أي:

$$W = \frac{W_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} . \tag{X-28}$$

فنجد إذاً:

$$\frac{L}{W} = \frac{\tau_0}{m_0c} = c^{ie}. \tag{X-29}$$

وبعد ثبوت هذه القاعدة تجريبياً، قام روسي Rossi وهـول Hall[8] بقياس المسـافة L لميزونات بطاقة $W = (5.0 \pm 0.7).10^8$ e.v فوجدا أن:

$$L = (4.5 \pm 0.6)\ 10^5 \text{ cm} \tag{X-30}$$

مما يعطي إذا كانت كتلة الميزون 200 ضعف كتلة الالكترون[9]:

$$\tau_0 = 2.4 \pm 0.3.10^{-6} \text{ sec.} \tag{X-31}$$

ولكن الطاقة $W = 5.10^8$ e. تناسب استناداً إلى الصيغة (X-27):

$$\sqrt{1-\beta^2} = \frac{\tau_0 c}{L} = \frac{2.4.10^{-6}.3.10^{10}}{4.5.10^5} \tag{X-32}$$

أي: $\beta = 0.99$.

هكذا يكون قانون تباطؤ الساعات مثبتاً تجريبياً من السرعة الخفيفة:

$$\beta = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \simeq \frac{1}{250} \simeq 0.004$$

في تجربة إيفز وستيلول إلى السرع العالية ($\beta = 0.99$).

---

(8) ROSSI et HALL. Phys. Rev. 59, 1941, 223.

(9) L. LEPRINCE-RINGUET et S. CORODETZKY. C.R. Ac. Sc., 213, 1941, 756.

ب ـ تغيير الكتلة مع السرعة

4) حركة جسيم مشحون في مجال كهرمغنطيسي

تتحرك الجسيمات في مجال قوة وفقاً للقانون النسبي (24 - VIII):

$$t = \frac{dp}{dt}$$

فإذا كان الجسيم مشحوناً ويتحرك في مجال كهرمغنطيسي يخضع لتأثير قوة لورنتـز التي تكتب استناداً إلى الصيغ (25 - VIII) و (35 - IX) و (30 - IX) بالصيغة:

$$\text{(X-33)} \qquad F^p = \frac{f^p}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \frac{1}{4\pi} \quad \varphi^{\rho p} j_\rho = \rho \varphi^{\rho p} u_\rho.$$

ولكن استناداً إلى (12 - VII):

$$\text{(X-34)} \qquad u^\rho = \frac{\nu^\rho}{c\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \quad \beta^2 = \frac{\nu^2}{c^2} = \Sigma_p \frac{(\nu^{\,\rho})^2}{c^2}$$

حيث وضعنا:

$$\text{(X-35)} \qquad u^\rho = \frac{dx^\rho}{ds} \quad , \quad \nu^\rho = \frac{dx^\rho}{dt} .$$

فتكتب الصيغة (X-33) أيضاً:

$$\text{(x-36)} \qquad f^p = \frac{\rho}{c} \; \varphi^{\rho p} \nu_\rho.$$

وتكون معادلة حركة الجسيم المشحون في المجال الكهرمغنطيسي:

$$\text{(X-37)} \qquad \frac{d}{dt} \frac{m_0 \nu^p}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{q}{c} \; \varphi^{\rho p} \nu_\rho.$$

لنضرب المعادلة (X-37) بالمركّبة ν_p ونجمع كل المؤشرات p فنجد:

$$\text{(X-38)} \qquad \nu_p \frac{d}{dt} \quad \frac{m_0 \nu^p}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{q}{c} \; \nu_p \varphi^{\rho p} \nu_\rho = \frac{q}{c} \; \nu_\rho \varphi^{0p} \nu_0.$$

ولكن:

$$\text{(X-39)} \qquad \nu_p \nu^p = -\, \Sigma_p \, (\nu^p)^2 = -c^2 \beta^2$$

$$\text{(X-40)} \qquad \varphi^{p0} = \partial^p \varphi^0 - \partial^0 \varphi^p.$$

فتكتب المعادلة (X-38) بالصيغة:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0c^2\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)-\frac{m_0c^2}{2\sqrt{1-\beta^2}}\frac{d\beta^2}{dt}=q\,(\nu_p\partial^p\varphi^0)-q(\nu_p\partial^0\varphi^p) \tag{X-41}$$

أو:

$$m_0c^2\frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}=q\left(\frac{\partial\varphi^0}{dt}-\frac{\partial\varphi^0}{\partial t}\right)-\frac{q}{c}\,\nu_p\frac{\partial\varphi^p}{\partial t}\,. \tag{X-42}$$

إذ ان:

$$\frac{d\varphi^0}{dt}=\frac{\partial\varphi^p}{\partial t}+\nu^p\frac{\partial\,\varphi^0}{\partial\,x^p}\,. \tag{X-43}$$

فتصبح معادلة حركة الجسيم المشحون في المجال الكهرمغنطيسي:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}+q\varphi^0\right)=q\left(\frac{\partial\varphi^p}{\partial t}-\frac{\nu^p}{c}\frac{\partial\varphi^p}{\partial t}\right). \tag{X-44}$$

لنفترض أن الجسيم بدأ الحركة بدون سرعة في مجال كهربائي يشتق من دالّة الكمون V (كما هو الحال في أجهزة فان دوغراف van de Graaf مثلاً) فنجد مباشرة من المعادلة (X-44):

$$\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}+q\varphi^0=c^{ie} \tag{X-45}$$

أي إذا أخذنا بعين الإعتبار الشروط الابتدائية:

$$m_0c^2+qV=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\,. \tag{X-46}$$

ومنها نستنتج أن:

$$\nu=\frac{\sqrt{\frac{2qV}{m_0}\left(1+\frac{qV}{2m_0c^2}\right)}}{1+\frac{qV}{m_0c^2}} \tag{X-47}$$

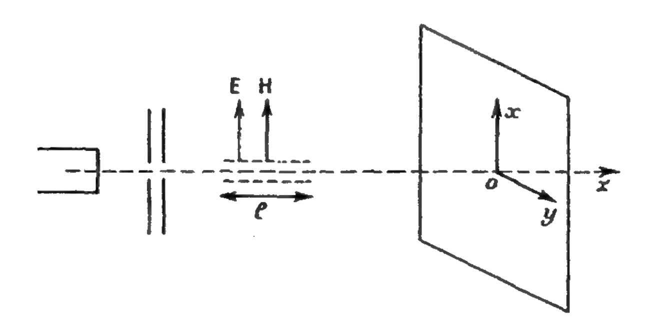
5) انحراف جسيمات مشحونة تحت تأثير مجال كهربائي ومجال مغنطيسي متوازيين ومتعامدين على السرعة الابتدائية(10):

تتوقع نظرية لورنتز في الإلكترونات تغيُّر الكتلة مع السرعة حسب القاعدة:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \text{(X-48)}$$

وتجربة رايلي Rayleigh وبراس Brace التي حاولت الكشف عن ريح الأثير كانت ترمي حقيقة إلى تحديد تأثير تقلص الطول على قرينة الإنكسار لجسم شفاف متحرِّك. والنتيجة السلبية لهذه التجربة يمكن أن تفسَّر بالافتراض أن تغيُّر الكتلة وفقاً للمعادلة (X-48) يعوِّض تماماً عن تأثير التقلص في الطول.

ولكن العلاقة (X-48) تستخلص مباشرة من نظرية الإلكترون ذي الشكل المتبدل التي اقترحها لورنتز بدلاً عن نظرية ابراهام حول الإلكترون المتماسك. والتجارب التي كانت ترمي إلى التأكد من العلاقة (X-48) كان من الممكن أن تفصل بين هاتين النظريتين للإلكترون. وأكثر هذه التجارب(11) كانت بإخضاع حزمة من الأشعة المهبطية محدَّدة جانبيًا بحواجز لتأثير مجال كهربائي E ومجال مغنطيسي H متوازيين الواحد على الآخر ومتعامدين على الإتجاه الابتدائي للحزمة (الرسم 34).



الشكل 34 ـ انحراف حزمة الكترونية في مجال كهربائي ومجال مغنطيسي متوازيين.

(10) Cf. W. GERLACH. Handbuch der Phys. XXII Berlin 1926. p.61-82.

(11) W. KAUFMANN. Gött. Nachr. Math. nat. Klasse, 1901, 143; A.H. BUCHERER. Vern. d. Deutschen, Phys. Ges., 6, 1908, 688; G.NEUMANN. Ann. d. Phys., 45, 1914, 529; Ch. E. Guye et Ch. LAVANCHY. Arch. ds Genève., 41, 1916, 353 et 441; W.GERLACH, H. d. Phys. 22, 1926, 61.

بغياب المجال تسقط حزمة الأشعة المهبطية في النقطة O. ولكن المجال الكهربائي E يحدث انحرافاً $x = \frac{1}{2}\ \frac{e}{m}\ E\frac{l^2}{\nu^2}$ حيث l هي المسافة التي يمتد عليها المجالان E و H. أما المجال المغنطيسي H فيحدث انحرافاً عمودياً على السطح المحدد بالمجال H وباتجاه الحزمة $y = \frac{1}{2}\ \frac{e}{m\,c}\ H\frac{l^2}{\nu}$. واشتراك المجالين يولّد انحرافين x و y خاضعين للمعادلة:

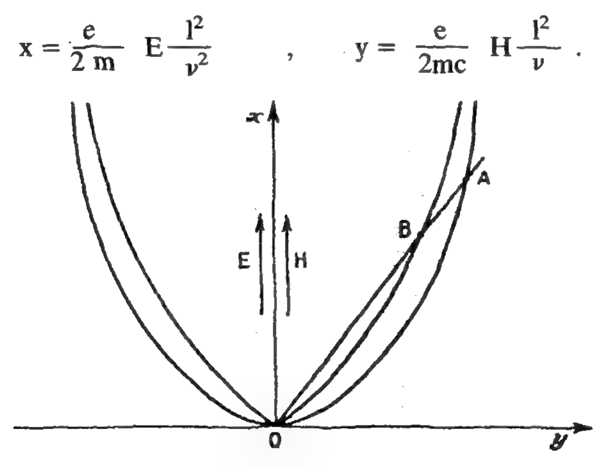
$$\frac{y^2}{x} = \frac{1}{2}\ \frac{e}{m}\ \frac{H^2}{E}\ \frac{l^2}{c^2}\ . \qquad \text{(X-49)}$$

فالجسيمات التي لها النسبة $\frac{e}{m}$ ذاتها ولكنها بسرع مختلفة تقع في مواقع على القطع المكافىء:

$$\frac{y^2}{x} = \frac{e}{m}\ \frac{H^2}{E}\ \frac{l^2}{2c^2} = c^{ie} \qquad \text{(X-50)}$$

مع

$$x = \frac{e}{2\,m}\ E\frac{l^2}{\nu^2}\ , \qquad y = \frac{e}{2mc}\ H\frac{l^2}{\nu}\ .$$



الشكل 35 ـ توزيع مواقع الجسيمات التي لها ذات النسبة $\frac{e}{m}$

أما إذا كانت الكتلة تتغيَّر مع السرعة فلا تقع الجسيمات التي لها النسبة $\frac{e}{m}$ ذاتها على القطع المكافىء بل على منحنٍ من الدرجة الرابعة نحصل عليه بإلغاء ν بين المعادلتين:

$$x = \frac{e\,E}{2\,m}\ \frac{l^2}{\nu^2}\ \sqrt{1-\beta^2} \qquad \text{(X-51)}_1$$

(X-51)₂ $$y = \frac{e\,E}{2'\,mc} \quad \frac{l^2}{\nu} \quad \sqrt{1-\beta^2}$$

فنجد:

(X-52) $$\frac{y^2}{x} = \left(\frac{y^2}{x}\right)_{parab.} \cdot \sqrt{1-\beta^2}$$

لا تمس هذه الخطوط المحور Oy في نقطة الأصل O ولا تقع الجسيمات في O إذا كانت السرعة ν لا متناهية كما في النظريات غير النسبية بل إذا بلغت سرعة الضوء c. ويشكّل الخط المستقيم المماس على الخط المقوّس في النقطة O زاوية α مع المحور Ox بقيمة:

(X-53) $$tg\,\alpha = \left(\frac{y}{x}\right)_{\nu \to c} = \frac{H}{E}$$

ومن جهة ثانية تتوزّع الجسيمات ذات السرعة الواحدة والكتل المتنوعة على الخطوط المستقيمة المنطلقة من نقطة الأصل:

(X-54) $$\frac{y}{x} = \frac{H}{E} \; \frac{\nu}{c}$$

وإذا تغيّرت الكتلة مع السرعة كما في نظرية النسبية الخاصة يكون موقع الجسيم ذو السرعة المعينة v على مقطع الخط المستقيم$_2$(X-54) المناسب لهذه السرعة وللقطع المكافىء الكلاسيكي بشرط أن نقلص الكمية $\frac{y^2}{x}$ بالنسبة $\sqrt{1-\beta^2}$ وفقاً للمعادلة (X-52). فينتقل هكذا الموقع من A إلى النقطة B.

في تجربة غاي Guye ولافانشي Lavanchy[12] يغيِّر المجالان الكهربائي والمغنطيسي للحصول على انحرافات متساوية لحزمتين من الأشعة المهبطية بسرع مختلفة. فيمكن هكذا استنتاج نسبة الكتلتين m و m′ من نسب المجالات. وكانت قياساتهما ممكنة لإلكترونات ذات سرعة تتراوح بين 0.22c و 0.49c.

وقد حسَّن هذه القياسات ناكن Nacken[13] عام 1935 باستعمال إلكترونات ذات طاقة 200 كيلو فلط أي $\beta \simeq 0.7$.

فتبين أن الصيغة (X-48) متّفقة تماماً مع التجربة. بينما التوقعات غير النسبية

---

(12) GUYE et LAVANCHY. Arch. Sc. Phys. Nat. Genève, 41, 1916, 286, 353 et 441.

(13) M. NACKEN. Ann. d. Phys., 25, 1935, 313.

المبنية على فرضيات أبراهام لا تتفق أبداً مع هـذه التجارب. ممـا يعني صحة تغـيُّر الكتلة مع السرعة.

وتثبت أيضـا صحة هـذا التغيير وسـائل تسريـع الجسيمات الثقيلـة (بروتـونات وإلكتـرونـات وجسيمـات) بـواسطـة المجـال المغنطيسي في السيكلـوتـرون (المسرِّع الحلقي) cyclotron. تتبع هذه الجسيمات مساراً دائرياً تحت تأثير المجال المغنطيسي المتعامد على سرعة الجسيمـات. ويكون التـردد ثابتـاً إذا لم تتغيَّر الكتلـة[14] ويزداد الشعاع ($v = r\omega$) مع كل دفع لهذه الجسيمات. وإذا وصلت الجسيمات إلى السرع العـالية (تبلـغ β القيمة 0.145 للـدوتيرونـات ذات الطاقـة 20 MeV) يبـدأ التـردد بالتناقص بسبب زيادة $m(v)$. مما يسبب نوعاً من كبـح السرعة يمكن التغلب عليـه بتـوافق المجال المسرِّع مـع حركـة الجسيم المشحـون سـواء بتغيـير شـدة المجـال المغنطيسي الـذي يجب أن يزداد كلمـا ازدادت الكتلة [السنكـروترون synchrotron (مسرِّع تزامني)] أو بتغيير تـردد المجال المسرِّع فيخفض هـذا التردد كلمـا ازدادت الكتلة (وتسمى هذه الأجهزة سنكروسيكلوترون (synchrocyclotron أو مسرِّعاً حلقيًّا متزامناً)].

6) التصادم المرن بين الجسيمات

لندرس التصادم المـرن elastic collision لجسيمين بكتلـة ذاتية متسـاوية m_0 في هيكل إسناد المختبـر S. يكون أحـد هذين الجسيمـين P_0 ساكِنـاً في النقطة 0، أمـا الثـاني P_1 فيتحرك بسرعـة v_1. بعد التصـادم في النقطة O يسـير الجسيمـان عـلى الخطين OP'_1 و OP'_2 بالسرعتين V'_1 و V'_2 في الهيكل الاسنادي S.

نختار المحاور Ox و Oy في السطح المستوي (OP_1, OP'_1) بحيث يكون المحور Ox باتجاه OP'_1 أي V'_1. إستناداً لمبدأ حفظ الـزَّخم تكون السرعـة V'_2 أيضاً في السطـح xOy. واتجاه السرع V_1 و V'_1 و V'_2 يعني اتجاه الزَّخم P_1 و P'_1 و P'_2.

لتكن φ و θ زاويتي المحـاور OP_1 و OP'_2 مـع Ox. فتكـون θ أيضـاً الـزاويـة $\widehat{OP'_1, OP'_2}$ بين مساري الجسيمين بعد التصادم. إستناداً إلى مبدأ حفظ الزَّخم نجد بالإسقاط على المحاور Ox و Oy.

---

(14) نجد استناداً إلى (IX-34):

$$f = m\dot{v} = \frac{e}{c}\,[V \wedge h] \quad \text{أو:} \quad m\omega^2 r = \frac{e}{c}\,\omega r H \quad \text{أو:} \quad v = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{eH}{2\pi mc}$$

(X-55) $$P_1 \cos\varphi = P'_1 + P'_2 \cos\theta$$

(X-56) $$P_1 \sin\varphi = P'_2 \sin\theta.$$

فينتج عن هاتين المعادلتين:

(X-57) $$2P'_1 P'_2 \cos\theta = P_1^2 - P_1'^2 - P_2'^2$$

ومن جهة ثانية يعطي قانون حفظ الطاقة العلاقة:

(X-58) $$m_1 + m_0 = m'_1 + m'_2.$$

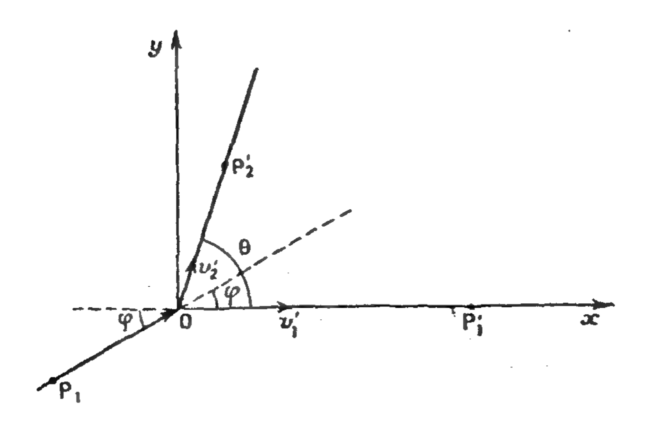
ويجب أن نأخذ بعين الاعتبار العلاقة:

(X-59) $$\frac{p^2}{c^2} = m^2 - m_0^2$$ أو: $$\frac{W_2}{c^2} = p^2 + m_0^2 c^2$$

فتصبح المعادلة (X-57):

(X-60) $$\frac{2}{c^2} P'_1 P'_2 \cos\theta = (m_1^2 - m_0^2) - (m_1'^2 + m_2'^2 - 2m_0^2)$$

$$= m_1^2 + m_0^2 - m_1'^2 - m_q'^2{}_2$$



الشكل 36 ـ التصادم المرن لجسيمين

ولكن استناداً إلى (X-58) نكتب

(X-61) $$m_1 = m'_1 + m'_2 - m_0$$

مما يعطي

$$\frac{2}{c^2} P'_1 P'_2 \cos\theta = 2\,(m_0^2 + m'_1 m'_2 - m'_1 m'_0 - m'_2 m'_0) \qquad \text{(X-62)}$$

أي:

$$\frac{P'_1 P'_2}{c^2} \cos\theta = (m'_2 - m_0)\,(m'_1 - m_0) \qquad \text{(X-63)}$$

أ ـ في الميكانيك غير النسبي $m_0 = m'_1 = m'_2$ فنجد:

$\cos\theta = 0$ (إذا $P'_1 P'_2 \neq 0$) أي:

$$\theta = \frac{\pi}{2} \qquad \text{(X-64)}$$

مما يعني أن الجسيمين يتبعان مسارين متعامدين بعد التصادم.

ب ـ في الميكانيك النسبي يشكّل المساران بعد التصادم زاوية θ بحيث إن:

$$\cos\theta = \frac{(m'_2 - m_0)\,(m'_1 - m_0)}{\sqrt{(m'^2_1 - m_0^2)\,(m'^2_2 - m_0^2)}} = \sqrt{\frac{(m'_2 - m_0)\,(m'_1 - m_0)}{(m'_2 + m_0)\,(m'_1 + m_0)}} \qquad \text{(X-66)}$$

ولكن إذا $P'_1 P'_2 \neq 0$ نجد:

$$m'_2 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta_2^2}} > m_0 \quad , \quad m'_1 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta_1^2}} > m_0 \qquad \text{(X-67)}$$

أي:

$$(m'_2 - m_0)\,(m'_1 - m_0) > 0 \qquad \text{(X-68)}$$

ومن ثم:

$$\cos\theta > 0 \quad , \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \qquad \text{(X-69)}$$

فتكون زاوية المسارين بعد التصادم دائماً زاوية حادة.

ويمكن كتابة هذه النتائج بصيغ مختلفة قليلاً وذلك باستعمال الزوايا φ و ψ التي

تشكلها OP'_1 و OP'_2 مع المسار الأصلي OP_1 فنجد:

$$\theta = \varphi + \psi \tag{X-70}$$

مما يعطي:

$$\text{tg}\,\varphi\,\text{tg}\,\psi = \text{tg}\,\varphi\,\text{tg}\,(\theta - \varphi) = \frac{\text{tg}\,\varphi\,\text{tg}\,\theta - \text{tg}^2\,\varphi}{\text{tg}\,\varphi + \text{tg}\,\theta\,\text{tg}^2\,\varphi} \tag{X-71}$$

ولكن استناداً إلى المعادلات (X-66) و (X-55) و (X-56) و (X-59):

$$\text{tg}^2\,\theta = \frac{2m_0\,(m'_1 + m'_2)}{(m'_2 - m_0)\,(m'_1 - m_0)} \tag{X-72}$$

$$\text{tg}^2\,\varphi = \frac{\sin^2\theta}{\left(\dfrac{P'_1}{P'_2} + \cos\theta\right)^2} = \frac{2m_0\,(m'_2 - m_0)}{(m'_1 - m_0)\,(m'_1 + m'_2)} \tag{X-73}$$

فتصبح الصيغة (X-71) بعد أخذ الصيغة (X-58) بالحسبان:

$$\text{tg}\,\varphi\,\text{tg}\,\psi = \frac{2m_0}{m'_1 + m'_2} = \frac{2m_0}{m_0 + m_1} \tag{X-74}$$

وإذا كانت للجسيمات P_0 و P_1 كتل متساوية في حالة السكون نجد:

$$m_1 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v_1^2}{c^2}}} \quad \left(\beta = \frac{v_1}{c}\right). \tag{X-75}$$

أي:

$$\text{tg}\,\varphi\,\text{tg}\,\psi = \frac{2\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \sqrt{1-\beta^2}} \tag{X-76}$$

وفي الحدود غير النسبية $(\beta \to 0)$ نحصل على النتيجة الكلاسيكية (X-64):

$$\text{tg}\,\theta = \text{tg}(\varphi + \psi) \to \infty \quad \text{أي:} \quad \theta = \varphi + \psi \to \frac{\pi}{2} \tag{X-77}$$

وتتفق تماماً هذه النتائج مع التجربة. فإذا كانت السرعة الأصلية قليلة بالمقارنة مع c نلاحظ وفقاً للميكانيك الكلاسيكي أن المسارات النهائية OP'_1 و OP'_2 متعامدة.

وهـذا ما نحصـل عليه فعـلاً في حجرة ولسـون إذا اصطدمت جسيمـة α مع نـواة الهليوم.

أما إذا كانت سرعة القذيفة غير قليلة بالنسبـة إلى سرعة الضـوء، تُظهر التجـربة صحة توقعات النسبية الخاصة. وإذا اصطدم إلكترون سريع بالكتـرون ساكن مثـلاً في حجرة ولسون نلاحظ أن المسارات تشكِّل زاوية حادة بعد الاصطـدام. وقد أثبتت تجارب تشامبيون[15] صحة الصيغ (X-69) وذلك بقيـاس مباشر للـزوايا θ و φ لعـدة سُرع أصلية. وأكدت ذلك صور رائعة أخذت في حجـرة ولسون. وتظهـر إحدى هـذه الصور[16] اصطدام إلكترون سريع ($\beta = 0.968$) بالكترون سـاكن فيشكل الإلكتـرون بعد الإصطدام زاوية 60°. وتظهر صورة أخرى[17] أيضـاً اصطدامـاً مرنـاً لإلكترون سريع ($\beta = 0.93$) بالكترون ساكن فيشكِّل الإلكترونان بعد الاصطدام زاوية 72°.

7) ظاهرة كمبتون

لندرس الآن اصطدام فوتون طاقته:

$$E = h\nu. \tag{X-78}$$

بإلكترون ساكن. لا نستطيع أن نطبِّق على الفوتون القواعد النسبية التي تدخل فيها الكمية $\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ لأن $\beta_{photon} = 1$ للفوتون. بيد أن العلاقة

$$\frac{W_2}{c^2} = P^2 + \mu_0^2 c^2 \tag{X-79}$$

تبقى صحيحـة للفوتـون وبشكل عـام للجسيمات ذات الكتلـة الذاتيـة μ_0 المنعدمـة فتصبح تلك العلاقة في حالة الفوتون γ ($\mu_0 = 0$):

$$P = \frac{W}{c} = \frac{h\,\nu}{c}. \tag{X-80}$$

لنفتـرض أن الفوتـون يسقط باتجـاه MM' متواز مـع المحور Ox. بعـد الإصطدام يخرج الفوتون باتجاه $O\gamma$ بينما يتراجع الإلكترونً الساكن في E قبل الاصطدام على المسار $E\epsilon$.

(15) F.C. CHAMPION, Proc. Roy. Soc. A 136, 1932, 630.
(16) Mme P. CURIE. Radioactivitè. t. I Paris 1935, PI. XVI.
(17) L. LEPRINCE RINGUET. Thèse Paris, 1936, PI.VI.

نرمز بالكميات ν و W و P إلى تردد وطاقة وزخم الفوتون قبل الاصطدام و ν' و W' و P' إلى هذه الكميات بعد الاصطدام وترمز m_0 إلى كتلة الإلكترون و v إلى سرعته بعد الاصطدام. تكتب قوانين حفظ الطاقة والزخم بالصيغ:

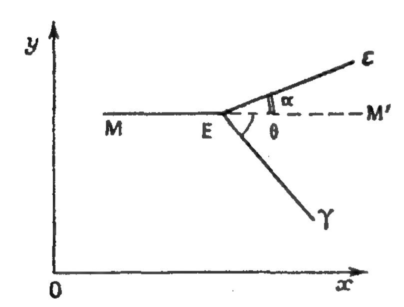
$$(X\text{-}81) \qquad W + m_0c^2 = W' + \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \left(\beta = \frac{v}{c}\right)$$

$$(X\text{-}82) \qquad P = P' + \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

إذا أسقطنا المعادلة (X-82) على المحاور Ox و Oy نجد (أنظر إلى الرسم 37):

$$(X\text{-}83)_1 \qquad P = P'\cos\theta + \frac{m_0\nu}{\sqrt{1-\beta^2}}\cos\alpha$$

$$(X\text{-}83)_2 \qquad 0 = -P'\sin\theta + \frac{m_0\nu}{\sqrt{1-\beta^2}}\sin\alpha.$$



الشكل 37 ـ اصطدام فوتون بإلكترون

وإذا شكّلنا استناداً إلى العلاقات $(X\text{-}83)_1$ و (X-83) الصيغة $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha$ وأحللنا في النتيجة الزّخمين P و P' بقيم الصيغة (X-80) نجد:

$$(X\text{-}84) \qquad \frac{m_0^2\nu^2c^2}{1-\beta^2} = h^2(\nu^2 + \nu'^2 - 2\nu\nu'\cos\theta).$$

ولكن من جهة ثانية تكتب المعادلة (X-81) بالصيغة:

$$(X\text{-}85) \qquad \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = h(\nu - \nu') + m_0c^2.$$

فإذا حسبنا تربيع هذه المعادلة وطرحنا من المعادلة (X-84) نجد:

$$(X\text{-}86) \qquad m_0^2c^4 = -2h^2\nu\nu'(1-\cos\theta) + m_0c^2[m_0c^2 + 2h(\nu - \nu')].$$

أيّ:

$$2h\nu\nu' \sin^2 \frac{\theta}{2} = m_0 c^2 (\nu - \nu'). \qquad \text{(X-87)}$$

وإذا استبدلنا ν و ν' بالكميات $\frac{c}{\lambda}$ و $\frac{c}{\lambda'}$ نجد:

$$\lambda' - \lambda = \frac{2h}{m_0 c} \sin^2 \frac{\theta}{2}. \qquad \text{(X-88)}$$

ويسمى هذا التغيير في قيمة طول الموجة ظاهرة كمبتون Compton ويبلغ مداه الأعلى إذا كانت الزاوية $\theta = \pi$ أي إذا تراجع الفوتون في الإتجاه المعاكس لإتجاه السقوط. فيصبح عندئذ طول موجته:

$$\lambda' = \lambda + \frac{2h}{m_0 c}. \qquad \text{(X-89)}$$

أما إذا انحرف الضوء بزاوية قائمة $\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right)$ فيزداد طول موجته بالمقدار:

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_0 c} \qquad \text{(X-90)}$$

وتسمى هذه الكمية طول موجة كمبتون Compton wavelength.

إن تكيف النظريات الكمومية مع الصياغة النسبية يعطي عدداً كبيراً من التطبيقات التي تشكّل إثباتاً من هذه النظريات. ولكي لا نبتعد عن النظريات الكلاسيكية عرضنا هنا أبسط هذه الإثباتات وهي ظاهرة كمبتون. فالتكوين الدقيق لطيف الهيدروجين (سومرفلد Sommerfeld) والميكانيك الموجي النسبي وإدخال دومة الإلكترون (ديراك) وأخيراً الصياغة النسبية للنظريات الكمومية للمجالات تشكّل كلها امتدادات مثمرة وبديعة للنسبية الخاصة.

ج ـ تعادل الكتلة والطاقة

8) نقص الكتلة والطاقة النووية

تتوقع نظرية النسبية (كما رأينا في الفصل الثامن المقطع 6) أن تكون الكتلة M_0 لتشكيل ثابت من الجسيمات المترابطة أقل من مجموع كتل الجسيمات التي تكوِّنه. ونقص الكتلة:

$$\Delta m = \Sigma_i (m_i)_0 - M_0 = \frac{\Delta E}{c^2} > 0 \qquad \text{(X-91)}$$

يتناسب مع طاقة الترابط ΔE بين الجسيمات (وهي الطاقة التي يجب إمدادها للجسم كي ينقسم إلى الجسيمات التي تكوّنه).

أما إذا كان التشكيل غير ثابت فتكون كتلته أكبر من مجموع كتل الجسيمات التي تكوّنه (أو التشكيلات التي يمكن أن ينقسم إليها) أي أن:

(X-92) $$\Delta m = \Sigma_i (m_i)_0 - M_0 = - \frac{\Delta E}{c^2} < 0.$$

ويمكن أن يتفتت الجسم إلى مركّباته فيعطي الطاقة ΔE.

وقد ثبت فعلاً وجود نقص في كتل النواة الذرية الثابتة إذ تكون طاقة ترابط النُوَيّات مرتفعة جداً. وباستعمال مطياف الكتلة mass spectrograph للنواة الأكثر ثباتاً (أي ذات طاقة الارتباط العالية) تأكدت تجريبياً صحة العلاقة:

(X-93) $$\Delta m = \Sigma_i (m_i)_0 - M_0 > 0.$$

وأبسط مثل على ذلك هو الدوتيرون deutéron$^1_2$D وهو نواة الهيدروجين الثقيل[18]. فكتلته (في نظام للوحدات تكون فيه كتلة الأكسجين 16 UM) هي:

$$M_0 = 2.01417 \text{ UM}$$

ولكن نواة الدوتيرون تتألف من بروتون $(m_R = 1.00893)$ ونيوترون $(m_n = 1.00757)$ فنجد إذاً:

$$\Delta m = \Sigma m_i - M_0 = 0.00233 \quad \text{UM}$$

أي:

$$\Delta m = 0.0387 \times 10^{-25} \text{ gr.}$$

9) ميزانية التفاعلات النووية

يمكن أن نتأكد من صحة العلاقة النسبية:

(X-94) $$\Delta E = \Delta m \cdot c^2$$

من القياسات المتعلّقة بالتفاعلات النوويّة التي تحوّل تشكيلاً له نقص كتلة معين إلى

---

(18) H.A. BETHE. Elementary nuclear theory, p.23-25.

تشكيلات أخرى بفرق كتلة مختلف. فتكون الخسارة في الكتلة الناتجة عن التفاعل النووي معادلة لربح في الطاقة في هذا التفاعل.

أ ـ من المعروف أن الليتيوم $^{7}_{3}Li$[19] يتحول إلى تشكيل غير ثابت إذا رجم ببروتونات سريعة، وينقسم هذا التشكيل إلى جسيمين α:

$$^{7}_{3}Li + ^{1}_{1}H \longrightarrow ^{4}_{2}He + ^{4}_{2}He. \quad \text{(X-95)}$$

يعطينا مطياف الكتلة للنوى $^{7}_{3}Li$ و $^{1}_{1}H$ و $^{4}_{2}H$ (بنظام الوحدات $0 = 16$) فرق الكتلة[20]:

$$\Delta m = 7.0166 + 1.0076 - (2 \times 4.0028) = 0.0186 \text{ UM} \quad \text{(X-96)}$$

أي:

$$\Delta m = 0.309 \times 10^{-25} \text{ gr.} \quad \text{(X-97)}$$

$$\Delta m \cdot c^2 = 27.7 \times 10^{-6} \text{ erg.} \quad \text{(X-98)}$$

وتمثل الطاقة (X-98) فرق الطاقة الحركية للجسيمات α الناتجة عن التفاعل والطاقة الحركية للبروتون الراجم. وتثبت التجربة أن الفرق في هذه الطاقات الحركية هو[21]:

$$\Delta E = 17.28 \pm 0.03 \text{ MeV} = (27.6 \pm 0.05) \times 10^{-6} \text{ erg.} \quad \text{(X-99)}$$

فتكون مقارنة الصيغ (X-98) و (X-99) تأكيداً رائعاً لصحة العلاقة (X-94).

ب ـ لنفترض أن نواة N_0 ساكنة في هيكل الإسناد S تُقذف بجسيمات سريعة P_1. فيتحول التشكيل غير الثابت من هذه الجسيمات إلى نواة نهائية N_3 وجسيم خفيف P_2. فيُكتب التفاعل:

$$N_0 + P_1 \longrightarrow N_3 + P_2. \quad \text{(X-100)}$$

للتأكد من صحة العلاقة (X-94) بين الكتلة والطاقة يجب أن نقيس الفرق في الكتلة

(19) J.D. COCKROFT et G.T.S. WALTON. Proc. Roy. Soc. A 137, 1932, 229.

(20) K.T. BAINBRIDGE et E.B.JORDAN , Phys. Rev., 51, 1937, 384; H.BETHE et M.S. LIVINGSTON, Rev. Mod. Phys., 9, 1937, 370.

(21) N.M. Smith. Phys. Rev., 56, 1939, 548.

بواسطة مطياف الكتلة وأن نقيس الطاقة الناتجة عن التفاعل النـووي. هذه الطـاقة هي الفرق بين الطاقة الحركية بعد وقبل التفاعل. وتكتب قوانين حفظ الطاقة والزَّخم بالصيغ التالية:

$$(X\text{-}101) \qquad E = T_2 + T_3 - T_1 \qquad (T_0 = 0)$$

$$(X\text{-}102) \qquad P_3 = P_1 - P_2 \qquad (P_0 = 0)$$

حيث ترمز T_0 و T_1 و T_2 و T_3 إلى الطاقات الحـركية وتـرمز P_0 و P_1 و P_2 و P_3 إلى زخم الجسيمات N_0 و P_1 و P_2 و N_3. لنفترض أن النواة النهائية N_3 ثقيلة وسرعتهـا خفيفة بحيث انه يمكن حساب طاقتها بالصيغة الكلاسيكية فنجد:

$$(X\text{-}103) \qquad P^2 = m^2v^2 = 2mT.$$

ومن جهة ثانيـة إذا كانت θ الـزاوية التي يشكِّلهـا الجسيم الأخير P_2 مـع الجسيم الراجم P_1 تكتب المعادلة (X-102) بالصيغة:

$$(X\text{-}104) \qquad P_3^2 = P_1^2 + P_2^2 - 2P_1P_2 \cos\theta$$

أي إذا استعملنا (X-103):

$$(X\text{-}105) \qquad m_3T_3 = m_1T_1 + m_2T_2 = 2\sqrt{m_1 T_1 m_2 T_2}\ \cos\theta.$$

في أكثـر الأحيان يـدرس إصدار الجسيمـات بزاويـة $\theta = \frac{\pi}{2}$ فتكون طـاقـة هـذه الجسيمات:

$$(X\text{-}106) \qquad T_3 = \frac{m_1T_1 + m_2T}{m_3}$$

وإذا أحللنا هذه النتيجة في (X-101) نجد:

$$(X\text{-}107) \quad E = T_2 + \frac{m_1T_1 + m_2T_2}{m_3} - T_1 = \frac{(m_3 + m_2)}{m_3}T_2 - \frac{(m_3 - m_1)}{m_3}T_1.$$

لتحديد E يكفي إذاً أن نقيس الطاقات T_1 و T_2 للجسيم الـراجم والجسيم الصادر. إذا كان الجسيم مشحوناً، يكون قياس طاقته بقياس المسافة الوسطية التي تقطعهـا في مادة معينة. فالدراسة المسبقة للإصدار الاشعاعي radioactive emmisions تتيح

معرفة العلاقة بين الطاقة والمسافة التي يقطعها البروتون والدوتيرون إذ تقاس طاقتها مباشرة بالإنحراف المغنطيسي. ولا يمكن استعمال هذه الطريقة لقياس طاقة جسيمات غير مشحونة مثل النيوترونات. فهذه تقاس غير مباشرة من المسافة الوسطية التي تقطعها بروتونات متراجعة ناتجة عن رجم مادة تحتوي على الهيدروجين بهذه النيوترونات.

تتفق النتائج التجريبية دائماً مع التوقعات المستندة إلى العلاقة (X-94) بين الطاقة والكتلة بدقة تصل إلى 1% لعدد كبير من التفاعلات المتنوعة.

ج ـ أخيراً تجارب تكوين ازواج من الجسيمات ذات الشحن المتقابلة والطاقة $2m_0c^2$ من إشعاع كهرمغنطيسي بطاقة $E_0 = h\nu_0$ والتفاعل المعاكس أي اختفاء الأزواج إلى فوتونات $2m_0c^2 \to h\nu_0$ تعطي علاقة تعادل الطاقة والكتلة (X-94) معنى خاصاً في حالة التحوُّل الكامل لطاقة الإشعاع إلى كتلة أو العكس.

مسألة:

يتحرك جسيم من جسيمات الإشعاع الكوني بسرعة قريبة من سرعة الضوء.

أ ـ إحسب مركِّبات المجالين الكهربائي E والمغنطيسي H اللذين يكونهما هذا الجسيم.

ب ـ إثبت أن هذا المجال يطابق مجال حزمة قصيرة للموجات الأحادية اللون (انظر المرجع p. G. BERGMANN. [9] P.138).

الحل:

أ ـ نحسب أولاً المجال في هيكل إسناد الجسيم الذاتي S' وهو مجال كهربائي بحت:

$$(1) \qquad \varphi'^{p0} = \partial'^{p}\left(\frac{q}{r'}\right) = \frac{q\,x'^{p}}{r'^{3}} \qquad (r'^2 = \Sigma_p\,(x'^p)^2).$$

ثم ننتقل إلى هيكل إسناد المختبر S المتحرك بسرعة $-v$ بالنسبة إلى S'. نختار Ox باتجاه v فتكتب العلاقات (IX - 5) كما يلي:

$$(2) \qquad \varphi^{10} = \varphi'^{10}\ ,\ \varphi^{20} = \frac{\varphi'^{20}}{\sqrt{1-\beta^2}}\ , \qquad \varphi^{30} = \frac{\varphi'^{30}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\varphi^{23} = 0 \quad , \quad \varphi^{31} = -\frac{\beta\varphi'^{20}}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \qquad \varphi^{12} = \frac{\beta\varphi'^{30}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

ثم نستعمل قوانين التحويل الخاص لكتابة صيغة φ^{p0} في أي هيكل إسناد غاليلي:

$$\varphi'^{10} = q \left[\frac{(x-\nu t)^2}{(1-\beta^2)} + y^2 + z^2 \right]^{-\frac{3}{2}} \frac{x-\nu t}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\varphi'^{20} = qy \left[\frac{(x-\nu t)^2}{1-\beta^2} + y^2 + z^2 \right]^{-\frac{3}{2}}$$

$$\varphi'^{30} = qz \left[\frac{(x-\nu t)^2}{1-\beta^2} + y^2 + z^2 \right]^{-\frac{3}{2}}$$

فإذا أحللنا هذه الصيغ في (2) نجد:

$$\varphi^{10} = q \frac{(x-\nu t)^2}{\rho^2} \ , \ \varphi^{20} = \frac{q\,y}{\rho^2} \quad , \quad \varphi^{30} = \frac{q\,z}{\rho^2} \quad ,$$

$$\varphi^{23} = 0 \quad , \quad \varphi'^{31} = -\frac{\beta q y}{\rho^3} \quad , \qquad \varphi'^{12} = \frac{\beta q z}{\rho^2}$$

حيث:

$$\rho = (1-\beta^2)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{(x-\nu t)^2}{1-\beta^2} + y^2 + z^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

ب ـ في الحالة $\nu = c$ يبلغ $|E| = \sqrt{\Sigma_p E_p{}^2}$ مداه الأعلى إذا $t_0 = \frac{x}{\nu}$. إذا وضعنا $t = t_0$، نجد $|E| = |H|$ ويكون E باتجاه Ox وعموديًا على H.

الجزء الثالث

النسبية العامة

الفصل الحادي عشر

النسبية العامة

أ ـ قانون نيوتن للجاذبية

1) قانون نيوتن للجاذبية والتجربة

يعطي قانون نيوتن صيغة قوة التجاذب بين جسمين. فإذا كان الجسمان نقطتين يبعدان مسافة r تكون القوة متناسبة عكسياً مع r^2 ومتناسبة مع ثابتين M و 'M يميِّزان الجسمين:

$$F = -K\ \frac{MM'}{r^2} \qquad \text{(XI - 1)}$$

تمثل M كتلة جاذبية الجسم الأول و 'M كتلة جاذبية الجسم الثاني. أما K فهي ثابت عام وقيمته تتغير تبعاً لنظام الوحدات المستعمل لقياس الكتلة.

1.1 ـ الاختلافات بين قانون نيوتن والتجربة

لقد حقق قانون نيوتن نجاحاً كبيراً. فقد قال بوانكاريه مثلاً إن الميكانيك السماوي celestial mechanics لم يكن يرمي إلّا للتأكد من صحة قانون نيوتن للجاذبية. وبين مجموعة الإثباتات الساطعة كانت الاختلافات الوحيدة التي ظهرت في منتصف القرن التاسع عشر تتعلق بحركة الكواكب الكبيرة[1].

(1) Cf. G. CHAZY [19] v.1, p.140.

فقـد استأنف لـو فيريـه Le Verrier عام 1850 أعمـال لابلاس بـدراسة حـركة الكـواكب المعروفـة في ذلك العصر. وأثبت بشكـل خاص أن نقطـة رأس perihelion عُطارد Mercury تتقدم بـزاوية قـدرها 38 ثـانية كـل قرن بـالمقارنـة مع التـوقعات النيوتنية. وأكدت حوالي عام 1880 أعمال نيـوكمب Newcomb بقياسـات أكبر وأدق نتيجة لوفيريه وقدّر تقدم نقطة رأس عطارد بقيمة 42 ثانية من الزوايا كل قـرن. كما أشار نيوكمب إلى خلافين آخرين محتملين مع نظريـة نيوتن وهمـا تقدم نقطـة رأس المريخ التي تزيد بقيمة 8 ثوانٍ من الزوايا كل قرن عن القيم المحسوبة استنـاداً إلى نظرية نيوتن (وهذا يزيد عن ثلاثة أضعاف الخطأ المحتمل في القياس)، وتقدم نقطة عقدة node مسار كوكب الزهرة وقيمته 10 ثـوانٍ كل قـرن (وهذا يـزيد عن خمسـة أضعاف الخطأ المحتمل)[2].

عدا هذه الاختلافات الثـلاثة المتعلقـة بحركـة الكواكب الكبـيرة كانت اختـلافات أخرى غير أكيدة. وأهم اثنين منها كانـا يتعلقان بحـركة القمـر وحركـة مذنّب إنكي Encke.

فالإختلاف البسيط في حركة القمر (وقد أشار إليه هالي Halley عام 1693) يمكن تفسيره بفرضية تغير انحراف مركز eccentricity شكل الأرض (لابلاس)، أو بتباطؤ حركة الأرض بسبب المد والجزر مما يسبب تسارعـاً متغيّراً في حـركة القمـر. كذلـك تظهر حركة مذنب إنكي تسارعاً متغيراً قد يكون عائداً إلى تيارات النيازك.

نوجز فنقول إن الاختلاف الأساسي والذي لا تفسـير له بـين التوقعـات النيوتنيـة والتجربة يتعلق بحركة الكواكب الكبيرة وخصوصاً تقدم نقطة رأس عطارد.

2.1 ـ التفسيرات «النيوتنية» لهذه الاختلافات

لتفسـير ابتعاد التـوقعات النيـوتنية عن التجـربة اقتـرحت عدة فـرْضيات يمكن وصفها بأنها «نيوتنية» بمعنى أنها لا تغير قانون نيوتن الأساسي المستند إلى التفاعل عن بعد.

حلقة من الكواكب الصغيرة: افترض لوفيريه وجود كـوكب أقرب إلى الشمس من

(2) أكدت أيضا هذه الأرقام أعمال دوليتل DOOLITTLE عـام (1912) وأعمال روس ROSS وقـد اعتبر بوانكاريه أن الخلاف بين نظرية نيوتن والتجربة أكيـد في حالـة مسار عطـارد ومحتمل في حـالة مسـار الزهرة ومشكوك فيه كثيرا في حالة مسار المريخ.

كوكب عطارد مما يسبب تقدم نقطة رأس عطارد. ولكن هذا الكوكب لم يشاهد رغم أن خصائصه المقترحة تجعل ذلك ممكناً. لذلك افترض بعضهم وجود حلقة من الكواكب الصغيرة أقرب إلى الشمس من كوكب عطارد. هذه الفرضية يمكن أن تفسِّر خروج حركة المريخ عن القاعدة ولكنها لا تستطيع تفسير الإختلافات في مسارات الزهرة والمريخ في الوقت ذاته.

لا كُروية الشمس أو الطوق الشمسي: لتفسير تقدم نقطة رأس عطارد يكفي ألّا تكون الشمس كروية تماماً. ولكن مقابلة قطر الشمس القطبي وقطرها الإستوائي (قياسات أورز Auwers عام 1832) لا تؤيد هذه الفرضية كما يبدو. ومن جهة ثانية إذا كانت هذه الفرضية صحيحة فإنها تقود إلى تباطؤ عقدة عطارد التي تساوي تقريبا تقدم نقطة أوج مساره وهذا ما لم يشاهد.

ضوء البروج zodiacal light وفَرْضية سيليجر Seeliger: إن وجود ضوء البروج يشير إلى أن الشمس تحيط بها مادة منتشرة بشكل عدسة محدَّبة الوجهين biconvex. وهذه المادة تمتد بكثافة متناقصة إلى أبعد من مدار الأرض. ويشكل مسطح البروج سطح التناظر لهذه المادة. ويكفي وجود هذه المادة لتقدم نقطة رأس عطارد. ولا تستطيع هذه الفرضية كما أحياها سيليجر أن تفسِّر بالوقت ذاته الاختلافات في حركة الكواكب الكبيرة إلّا إذا حدد توزيع كثافة هذه المادة كي تسبب ضوء البروج. وهذا التوزيع غير الصحيح على الأرجح هو اعتباطي. وتعادل هذه الفرضية جزئياً على الأقل فرضية حلقة الكواكب داخل مسار عطارد وتماثلها بغياب التبريرات.

يبدو إذاً أن الفرْضيات النيوتنية لتفسير الإختلافات الثلاثة الأساسية بين نظرية نيوتن للجاذبية والتجربة هي غير كافية واعتباطية بالوقت ذاته.

3.1 ـ القوانين غير النيوتنية للجاذبية

من الممكن أن نحاول تفسير الإختلافات بين قانون نيوتن للجاذبية والتجربة بتعديل خفيف لهذا القانون للإلتقاء بالنتائج التجريبية.

قانون هول Hall: أول قانون غير نيوتني للجاذبية اقترحه هول عام (1895) والذي اقترح استبدال قانون نيوتن بالقانون:

$$F(r) = -K\frac{MM'}{r^N} \qquad \text{(XI-2)}$$

فنجد فعلاً تقدماً أو تباطؤاً لنقطة رأس الكواكب تبعاً لاختيار N أكبر أو أصغر من العدد 2[3].

ويُستخلص من تقدم نقطة رأس عطارد أن $N = 2.000.000 \times 16$. ولكن إذا حافظنا على قيمة K ذاتها لا ينطبق هذا القانون على حركة القمر.

قانون نيوتن مع حد تصحيحي: يمكن اقتراح زيادة حد تصحيحي إلى قانون نيوتن الأساسي $\frac{1}{r^2}$. ويكون هذا الحد التصحيحي $\frac{1}{r^2}$ مع $(n = 3,4,5)$:

$$F = -K \frac{MM'}{r^2} \left(1 + \frac{\alpha}{r^n}\right) \qquad \text{(XI-3)}$$

ويجب أن يكون المُعامل α إيجابياً كي يسبب تقدم نقطة الرأس (وليس تباطؤها). ولكن تبين أنه ليس هناك معامل α يعطي نتيجة مقبولة لتقدم نقطة رأس عطارد والكواكب الأخرى، ولتقدم حضيض القمر perigee (وهي أقرب نقطة من مساره إلى الأرض). وقد طرح ديكومب Decombes الصيغة

$$F(r) = -K \frac{MM'}{r^2} \left(1 + \frac{\alpha}{r^3}\right) \qquad \text{(XI-4)}$$

التي يمكن ربطها، حسب واضعها، بالتفاعلات الكهربائية. ويتغيَّر المعامل α تبعاً لكتلة الكوكب وشعاعه والتحريض الكهربائي.

ونشير أيضاً إلى صيغة أخرى لقانون الجاذبية:

$$F(r) = -K \frac{MM'}{r^2} e^{-\alpha r}. \qquad \text{(XI-5)}$$

اقترحها لابلاس وتذكِّرنا بصيغة مماثلة لتحوير قوة كولون كي تصبح قوة يوكاوا Yukawa للتفاعلات النووية.

استعمال فضاء غير إقليدي: أخيراً يمكن أن نفترض أن قانون نيوتن يطبَّق في فضاء إهليلجي أو كروي أي غير إقليدي بشكل عام. عندئذ يجب استبدال المسافة r بين الجسمين المتجاذبين بصيغتها في الفضاء الإهليلجي أو الكروي. فإذا كان الفضاء كروياً بشعاع R تصبح المسافة $R \arcsin \frac{r}{R}$ فنجد القوة:

---

(3) يكون تقدم نقطة الرأس $\pi(N-2)$ لكل الكواكب.

(XI-6) $$F(r) = -\frac{KMM'}{R^2\left(\arc\sin\frac{r}{R}\right)^2} \simeq -\frac{KMM'}{r^2}\left(1+\frac{r^2}{3R^2}\right).$$

ولكن يصعب الاحتفاظ بهذه الصيغة لأنه يجب أن تعطى R كمية غير معقولة للحصول على تقدير صحيح لتقدم نقطة الرأس.

2) كمون الجاذبية وخصائصه ـ تعادُل الكتلة الجاذبية والكتلة العطالية

تدخل في صيغة قانون نيوتن للتفاعل عن بعد

(XI-1) $$\boxed{F = -K\frac{MM'}{r^2}}$$

الكتلة M و 'M للجسمين. وتسمى هذه «الكتلة الجاذبية» وتلعب دوراً مماثلاً لدور الشِحن الكهربائية في قانون كولون.

ومن جهة ثانية تدخل في صياغة القانون الأساسي للميكانيك الكلاسيكي:

(XI-7) $$\boxed{F = m\gamma}$$

كتلة m تميِّز جسم الإختبار وتمثل نوعاً ما «معارضة الجسم للتسريع» وتسمى «الكتلة العطالية».

ونعلم أن الأجسام تسقط في الفراغ بالسرعة ذاتها مهما كانت كتلتها. فإذا قارنّا (XI-1) و (XI-7) نستنتج أن هذه الخاصة المُثْبَتة تجريبياً تعني أن تسارع الجسم الساقط يساوي $\gamma = -\frac{M}{m}\left(K\frac{M'}{r^2}\right)$. ويكون هذا التسارع متساوياً بين كل الأجسام إذا كانت الكتلة الجاذبية متناسبة مع الكتلة العطالية بنسبة واحدة لكل الأجسام:

(XI-8) $$\frac{M}{m} = C$$

فيكتب قانون نيوتن للجاذبية (XI-1):

$$F = -KC^2\frac{mm'}{r^2} = -G\frac{mm'}{r^2}$$ مع:

(XI-9) $$G = KC^2$$

وإذا افترضنا مع نيوتن تطابق الكتلة الجاذبية مع الكتلة العطالية نجد:

ومن ثم $G = 1 \ , \ M = m \ , \ K = G$

$$F = -G \frac{MM'}{r^2} \tag{XI-10}$$

هذا هو الاصطلاح المستعمل عادة[4]. على كل حال يأخذ قانون نيوتن الصيغة التالية باستعمال الكتلة العطالية m و m'

$$\boxed{F = -G \frac{mm'}{r^2}} \tag{XI-11}$$

ويمكن أن نكتب أيضا:

$$\boxed{F = m \text{ grad } U} \tag{XI-12}$$

مع:

$$\boxed{U = G \frac{m'}{r}} \tag{XI-13}$$

وتسمى G ثابت نيوتن للجاذبية وقيمته العددية:

$$\boxed{G = 6.664 \times 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ gr}^{-1} \text{ sec}^{-2}} \tag{XI-14}$$

أما الدالّة U فتسمى كمون نيوتن للجاذبية. ويساوي تدرُّج هذه الدالّة تسارع جسم الإختبار الناتج عن قوى الجاذبية. ولا يتغيَّر هذا التسارع مع طبيعة جسم الاختبار وبالتالي كتلته:

$$\gamma = \text{grad } U. \tag{XI-15}$$

تقود إذاً فرْضية نيوتن (XI-8)، بتساوي كتلة الجاذبية وكتلة العطالة، إلى تسارع γ مستقل عن جسم الإختبار.

---

(4) طبعا يمكن أن نختار مثلاً:

$$K = 1 \Rightarrow F = -\frac{M M'}{r^2} \qquad C = \sqrt{G} \ , \quad M = \sqrt{G}\ m$$

من الناحية النظرية هذه النتيجة مميزة[5]. وقد جاءت نتيجةً لتجارب كلاسيكية عن سقوط الأجسام. هذه التجارب التي دعمت فرضية نيوتن (XI-8) كانت أولاً بسيطة وغير متقنة. وأعيدت الدراسة التجريبية لتعادل الكتلة العطالية والجاذبية بأساليب متنوعة مثل تجارب نيوتن وبسل Bessel حول اهتزاز النَّواس وبطرق مختلفة تماماً مع تجارب أوتفوس Eötvös وزيمان Zeeman وساوزرنز Southerns[6]. تَستعمل تجارب ساوزرنز خصائص الإشعاع لنواة أوكسيد اليورانيوم ذي النقص الكبير في الكتلة. بيد أن أكثر التجارب حسماً في هذا الموضوع كانت تجارب أوتفوس[7] وزيمان[8]. نوضح هنا باختصار مبدأ هذه التجارب لأن نتيجتها كانت أساس مفهوم أينشتاين للجاذبية[9].

يوضع جسمان A_1 و A_2 بكتلتي جاذبية متقاربتين M_1 و M_2 وكتلتي عطالة m_1 و m_2 على طرفي ذراع ميزان التوائي torsion balance. يخضع الجسمان إلى قوة الجاذبية الأرضية باتجاه مركز الأرض ومتناسبة مع الكتلة الجاذبية أي:

$$F_1 = M_1\gamma \quad , \quad F_2 = M_2\gamma \qquad \text{(XI-16)}$$

ومن جهة أخرى يخضعان إلى القوة الطاردة centrifugal force بسبب دوران الأرض حول ذاتها. وتتناسب هذه القوة مع الكتلة العطالية للجسم وبالإتجاه HA_1 نحو محور الأرض. فإذا كانت ω السرعة الزاوية لهذا الدوران و φ زاوية خط العرض في مكان التجربة تكون هذه القوى:

$$f_1 = m_1\omega^2 A_1H = m_1\omega^2 R\cos\varphi \qquad f_2 = m_2\omega^2 R\cos\varphi \qquad \text{(XI-17)}$$

---

(5) تختلف هذه النتيجة تماماً عن تلك التي نجدها في الكهرباء السكونية مثلاً. إذ نجد في هذه الحالة:

$$F = -q \,\text{grad}\, V \quad \text{و:} \quad F = m\gamma$$

ومن ثم:

$$\gamma = -\frac{q}{m}\,\text{grad}\, V.$$

مما يعني أن التسارع يتغيَّر مع النسبة $\frac{q}{m}$. فهو يتغيَّر إذا من جسم إختبار إلى آخر.

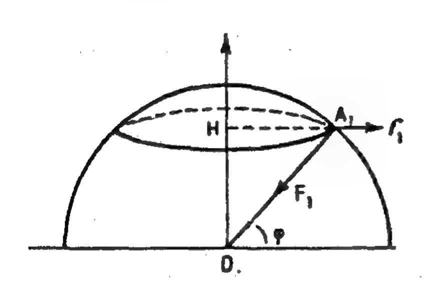
(6) L. SOUTHERNS. Proc. Roy. Soc. London. A84, 1910, 325.

(7) R.V. EOTVOS. Math, u. Naturw. Ber. aus. Ungarn., 8, 1890, 65; Ann. d. Phys., 59, 1896, 354; R. V. EOTVOS, D. Pekar et E. FEKETE, Ann. d. Phys, 68, 1922, 11.

(8) P. ZEEMAN. Proc. Roy. Amst. 20, 1917, 542.

(9) يمكن الإطلاع على تفصيل أكبر حول هذه التجربة في المرجع M.VON LAUE, [24] V.II.

وتتوازن القوى F و f مع شد خيط الميـزان الالتـوائي. ونـلاحظ أن العـزم الـزاويّ الإجمـالي لهـذه القـوى يسبب ليّ الخيط فيدور ذراع الميزان بزاوية α. وإذا بـدّلنا مواقع الجسمـين A_1 و A_2 تصبح زاويـة الـدوران $-\alpha'$. ويتيح الفـرق $\alpha - \alpha'$ أن نقيس الفرق $\frac{M_1}{m_1} - \frac{M_2}{m_2}$. وقد أثبتت التجـارب التي أجريت بهـذه الطريقـة أن الزوايا α و α' متساوية بـدقة عـالية ممـا يثبت أن النسبة M/m متسـاويـة لكـل الأجسام مهما كـان اتجاه هـذه الأجسام بالنسبة للأرض.



الشكل 38 ـ تجربة اوتفوس وزيمان

3) قانون بواسون

لنطبِّق قانون غاوس على تـوزيع من الكتـل m_i في حجم $\mathscr{V}$ داخل سطـح S_1 فنجد النتيجة التالية المشابهة لتلك التي وجدناها في الكهرباء السكونيـة[10]: يتناسب تـدفق قوى الجاذبية على السطح S مع مجموع الكتل داخل السطح S:

$$\int_S \gamma_n \, dS = 4\pi G \Sigma m_i \tag{XI-18}$$

حيث n هو المتّجِه الأحادي العمودي على جزء السطح dS.

لإثبات ذلك ننطلق من المعادلة:

$$\int_S \gamma_n \, dS = \int_S |\gamma| \cos(\gamma, n) \, dS = \int_S |\gamma| \, dS_n = \int_\omega |\gamma| \, r^2 d\omega,$$

حيث dS_n هي إسقاط dS على السطح المستوي العمـودي على γ، و dω هي الـزاوية المجسَّمة التي يشاهد بها الجزء dS من السطح.

(10) يستنتج هنا قانون غاوس بالصيغة (XI-18) أو (XI-19) من الصيغ (XI-13) و (XI-15) لقانون نيوتن. عكس ذلك إذا رفضنا أن نبني نظرية ماكسويـل على مبـدأ التفاعـل عن بعد يجب أن نفتـرض قانـون غاوس في الكهرباء السكونية (وهو مثبت تجريبيا) ومنه نستنتج قانون كولون.

ولكن باستعمال (XI-13) و (XI-15) أي قانون نيوتن نجد:

$$|\gamma| = |\text{grad U}| = G\frac{m_1}{r^2} \ .$$

وبالتالي:

$$\int_S \gamma_n \, dS = Gm_i \int_S d\omega = 4\pi \, Gm_i.$$

وإذا كان توزيع الكتل متواصلاً بكثافة μ في وحدة الحجم نجد بطريقة مماثلة:

$$\int_S \gamma_n \, dS = 4\pi G \int_{\mathcal{V}} \mu d\mathcal{V}. \quad \text{(XI-19)}$$

مما يعطي:

$$\int_{\mathcal{V}} \text{div}\, \gamma \, d\mathcal{V} = 4\pi G \int_{\mathcal{V}} \mu \, d\, \mathcal{V}. \quad \text{(XI-20)}$$

ومنها نستخلص العلاقة المحلية:

$$\text{div}\, \gamma = 4\pi G\mu \quad \text{(XI-21)}$$

أو باستعمال العلاقة (XI-15):

$$\text{div grad U} = 4\pi G\mu \quad \text{(XI-22)}$$

أي:

$$\boxed{\Delta\, U = 4\pi G\mu}$$

مع:

$$\Delta = \sum_p \frac{\partial^2}{(\partial x^p)^2} \quad , \quad p = 1, 2, 3. \quad \text{(XI-23)}$$

وهذا هو قانون بواسون. وإذا استعملنا تحديد U نجد أن قانون بواسون يعادل قانون نيوتن للتفاعل عند بعد. والقانونان ثابتان في تحويل غاليليو وليس في تحويل لورنتز.

4) قانون نيوتن ومبدأ النسبية الخاصة

لا يتفق قانون نيوتن مع متطلبات النسبية الخاصة. من الطبيعي إذاً أن نبحث عن صيغة لقانون الجاذبية لا تتغير بتحويل لورنتز. فيكون قانون نيوتن صيغة

تقريبية لها. ولكن الصياغة النسبية لقانون الجاذبية ليس عملاً سهلاً. والنموذج الذي يقدمه علم التحريك الكهربائي الكلاسيكي بنظرية لورنتز في الإلكترونات مثلاً لا يمكن تقليده بسهولة لصياغة قانون تفاعل الكتل.

وبشكل خاص أي تعميم نسبي لقانون بواسون (XI-23) يكون باستبدال مؤثر لابلاس $\Delta \equiv \Sigma_p \frac{\partial^2}{(\partial x^p)^2}$ بمؤثر دالمبرت $\square \equiv \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$ فنجد في نظام متعامد للإحداثيات أن:

$$\eta^{\rho\sigma}\,\partial_\rho\,\partial_\sigma\,U = 4\pi G\mu \qquad (\rho, \sigma = 1, 2, 3, 0). \qquad \text{(XI-24)}$$

تدخل في قانون غاوس للكهرباء السكونية كثافة الشِّحَن الكهربائية ρ بدلاً من كثافة الكتلة μ. والكثافة ρ هي المركِّبة الرابعة للمتَّجِه الرباعي j^μ والتعميم النسبي لقانون غاوس يكون بتوسيع الكمون الكهربائي V إلى الكمون المتجِهي الرباعي A^μ. ولكن نتائج علم التحريكِ النسبي للأجسام المتواصلة مختلفة تماماً عن علم التحريك الكهربائي. فالكثافة μ لا تظهر كدالّة عددية ولا كمركِّبة متَّجِه رباعي. إستناداً إلى النسبيّة الخاصة ترتبط الكمية μc^2 بكثافة الطاقة W أي المركِّبة M_{00} للموتِّر المتناظر من الرتبة الثانية $M_{\mu\nu}$ (انظر المعادلة (VIII - 147)). يجب إذاً أن يكون الكمون الجاذبي أيضاً موتراً من الرتبة الثانية ويكون جهد الجاذبية U أحد مركِّباته. سنرى أن هذه النتيجة هي التي تستخلص من النسبية العامة.

في الواقع لقد استنتج أينشتاين القانون النسبي للجاذبية من تعميم لمبدأ النسبية. فهو ليس تصحيحاً لقانون موجود مسبقاً بل امتداد طبيعي للأفكار الرئيسية في النسبية الخاصة.

ب ـ مبدأ التكافؤ واستعمال الفضاء غير الإقليدي

يقول مبدأ النسبية بتكافؤ هياكل الإسناد لدراسة الظواهر الفيزيائية وصياغة القوانين التي تسيِّرها. وتحصر النسبية الخاصة هذا التكافؤ بهياكل الاسناد الغاليلية، أما النسبية المعمَّمة فتوسعه ليشمل الهياكل المتسارعة. فيتيح مبدأ التكافؤ equivalence principle هذا (أو مبدأ النسبية العامة) احتواء الظواهر الناتجة عن القوى الوهمية fictive forces أي القوى التي يسببها استعمال هياكل الاسناد المتسارعة ولكنه يقود كما سنرى لاحقاً إلى ظهور بنية غير إقليدية للفضاء.

ولكن مبدأ التكافؤ المعمَّم هذا يبقى محصوراً في قوى العطالة ويترك القوى

«الحقيقية» ومنها قوى الجاذبية خارج هذه الصياغة الهندسية. في الواقع أن مبدأ التكافؤ كما جاء في التوسيع الأول لمبدأ النسبية (عام 1911) على يد أينشتاين ما هو إلّا دمج محلي لقوى الجاذبية وقوى العطالة. وهذا التكافؤ المحلي أتاح بعد ذلك (عام 1916) إعطاء مبدأ النسبية المعمَّمة كل معناه: وهو دمج هياكل الاسناد العطالية وهياكل الاسناد المتسارعة أي احتواء قوى العطالة في بنية غير إقليدية للمكان والزمان. مما يقود إلى اعتبار قوى الجاذبية بنية محلية غير إقليدية. ويعبِّر عن قانون الجاذبية بشروط البنية الهندسية.

لقد تكوَّن إذاً مبدأ التكافؤ بالتدرج فرضية فوق فرضية. فاعتبار قوى الجاذبية قوى عطالية يلغي جزئيًا التمييز بين القوى الحقيقية والقوى الوهمية ويتيح تفسير تأثير قوى الجاذبية بظهور تسارعات مناسبة. ثم إن فرضية التكافؤ بين هياكل الاسناد العطالية وهياكل الاسناد المتسارعة وبالتالي بين هياكل الاسناد العطالية والهياكل التي تظهر فيها قوى الجاذبية تشكِّل مبدأ للنسبية المعمَّمة وتتيح تأويلاً جديداً لهذه القوى. أما قوة لورنتز والقوى النووية فتحافظ طبعاً في النسبية العامة على تأويلها الظاهري phenomenologic أي الخارج عن الصياغة الهندسية. ثم يأتي دور النظريات الموحدة لتحاول الصياغة الهندسية العامة الذي يفترضها المبدأ العام للنسبية وبالوقت ذاته لتحاول صياغة نظرية كاملة للمجال البحت.

5) هياكل الإسناد المتسارعة وقوى العطالة الوهمية ـ صدور مبدأ النسبية الخاصة

نعبِّر عن مبدأ النسبية الخاصة بمحافظة القوانين الفيزيائية على صيغها في تحويل لورنتز. كما يفترض هذا المبدأ استحالة الكشف عن الحركة المستقيمة بسرعة ثابتة لأي هيكل اسناد بإجراء أية تجربة فيزيائية. طبعاً هذه الاستحالة لا تشمل هياكل الإسناد المتسارعة[11]. إذ إن حركة هذه الهياكل يمكن الكشف عنها بواسطة تجربة ميكانيكية (نوَّاس فوكو Foucault) أو ضوئية (تجربة هارس Harress وسانياك Sagnac).

1.5 ـ نوَّاس فوكو

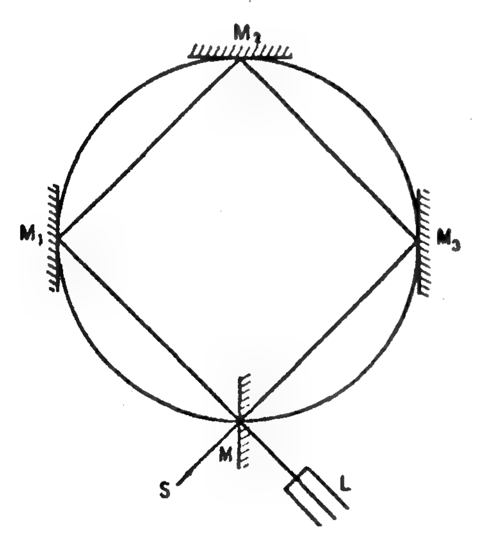
إذا كان النوَّاس يهتز في القطب بدون احتكاك يدور سطح اهتزازه °360 خلال 24

(11) لدراسة التأثيرات الضوئية للحركات المتسارعة يرجع إلى:
E. DURAND, Ann. de Phys. 20, 1945, 535 à 544; 21, 1946, 216 à 231.

ساعة بالإتجاه المعاكس لدوران الأرض. أما إذا أجريت التجربة في نقطة أخرى من سطح الأرض، فإن سطح الإهتزاز يدور بسرعة مغايرة. فتظهر هذه التجربة دوران الأرض حول نفسها. مما يدل على أن تجربة ميكانيكية يمكن أن تظهر دوران هيكل الاسناد الذي يستعمل لدراستها إذا كان متسارعاً.

2.5 ـ تجارب هارس وسانياك وبوغاني

تشكّل هذه التجارب النظير الضوئي لتجربة فوكو الميكانيكية وترمي إلى إظهار دوران طبق بواسطة تجربة ضوئية. تسقط حزمة ضوئية على مرآة نصف شفافة M تحت زاوية °45 فتنفصل الحزمة إلى حزمتين تتبعان المسار المغلق ذاته ولكن بالإتجاهين كما في الرسم 39. ثم يتم انسحاب هذا المسار مع دوران الطبق بسرعة ثابتة. ويمكن أن يكون هذا المسار داخل منشورات prisms من الزجاج[12]، أو أنبوب مملوء ماء ومثبت إلى الطبق الدائر (بوغاني Pogany). ويمكن أيضاً استعمال مرايا موضوعة على إطار الطبق[13] (انظر الرسم 39). فيتبع الضوء مساراً متعدِّد الأضلاع ليصبح في حال عدد كبير من المرايا دائرة تحيط بمساحة y. ويمكن تحديد الفرق في الوقت الذي تستغرقه الحزمتان لاجتياز هذا المسار في الإتجاهين بواسطة جهاز للتداخل. ويثبت مصدر الضوء وجهاز التداخل إلى الطبق الدائر ويؤلفان مع المرايا تشكيلاً ضوئيّاً واحداً يدور بسرعة ثابتة. وتثبت مراقبة هدب التداخل في هيكل الإسناد المرتبط بالطبق قبل وخلال الدوران أن الشعاع الذي يتبع المسار في اتجاه دوران الطبق يستغرق وقتاً أقل من الشعاع المنتشر في الإتجاه المعاكس كي يقطع المسار. إذا كانت ω هي السرعة الزاويّة الثابتة لدوران الطبق يكون الفرق في الوقت في هيكل إسناد الطبق مساوياً لـ:



الشكل 39 ـ تجربة سانياك

(12) F. HARRESS. Dissertation. Iena. 1912.
(13) G.SAGNAG. C.R. Ac. Sc., 157, 1913, 708 et 1410; J. Phys., 4, 1914, 177.

$$\Delta t = 4 \frac{\omega y}{c^2} \qquad \text{(X-25)}$$

فنستخلص النتيجة التالية عن هياكل الاسناد المتسارعة:

تبدو الحركات المتسارعة كأنها تقود إلى تحديد للحركة المطلقة. وفي حال غياب هياكل إسناد محدَّدة بأجسام صُلبة أخرى قد نضطر إلى القبول بأن هذه الحركة هي مطلقة (دوران الأرض مثلاً من تجربة فوكو) بالنسبة إلى «شكل» فارغ هو الفضاء المطلق.

ولكن بعد التحليلات التي وردت في النسبية الخاصة تبدو هذه النتيجة غير مقنعة تماماً. وقد نتساءل عما إذا كانت هذه الحركة المطلقة مرتبطة حتماً بوجود أجسام أخرى أي وجود أجسام سماوية بعيدة. هذا هو على الأقل رأي ماخ E.Mach.

6) التكافؤ المحلي لقوى الجاذبية وقوى العطالة

1.6 ـ سابقان لأينشتاين: هرتز وماخ

لقد ميَّز نيوتن بين القوى الحقيقية الناتجة عن الخصائص الفيزيائية للأجسام التي تولِّدها والقوى الوهمية الناتجة عن استعمال هيكل إسناد متسارع.

وتتميز قوى العطالة (القوة الطاردة وقوة كوريوليس) بأنها تولِّد تسارعاً مستقلاً عن خصائص جسم الإختبار التي تؤثر عليه (ومنها طبعاً كتلته). ومن هنا تسمية هذه القوى بأنها وهمية إذ إنه يمكن إلغاؤها باختيار هيكل إسناد مناسب. والفضاء المطلق هو الهيكل المميَّز الذي يتيح إلغاء القوى العطالية الوهمية التي أُدخلت اصطناعياً لأخذ تسارع الهيكل المستعمل بعين الإعتبار. وتبقى في هيكل الإسناد المطلق فقط القوى الحقيقية. وتتخذ فيه القوانين الفيزيائية صيغتها الطبيعية. ويضمن مفهوم الفضاء المطلق إذاً صحة مبدأ العطالة وإمكانية التمييز بين القوى الحقيقية والقوى الوهمية.

وقد رفض هرتز ثم ماخ القبول بفكرة الفضاء المطلق وذلك بمحاولة تبرير القوى العطالية باعتبارات أخرى. فقد أراد هرتز تحويل التفاعلات الكهربائية والمغنطيسية عن بعد إلى تفاعلات تماسّ contact actions. وحاول تطبيق الطريقة ذاتها على قوى الجاذبية. ولكن الحركة المستقيمة للأجسام الحرة هي نتيجة لمبدأ العطالة. والحركات المختلفة المتأتية عن تأثير قوى العطالة ناتجة عن تفاعلات مع أجسام

أخرى حسب هرتز. وهذه التفاعلات تحدِّد المسارات وفقاً لمبدأ غاوس في الإكراه الأقل القائل بأن المسار الفعلي الذي يتبعه الجسم هو الذي يبتعد أقل ما يكون عن الحركة المستقيمة وبسرعة ثابتة. فيكون مبدأ العطالة حالة خاصة لمبدأ الإكراه الأقل فهو لا يكون في غياب القوى بل في غياب الكتل المخبأة.

وتعلل انتقادات ماخ الصفة المميزة لهياكل الإسناد العطالية بتدخل الكتل البعيدة التي لا يمكن إلغاء تأثيرها. فإذا كانت الأرض وحيدة في الفضاء بغياب الأجرام السماوية الأخرى مثلاً تكون كل الهياكل متكافئة أي هياكل إسناد عطالية. فلا يمكن إذاً مشاهدة دوران نوَّاس فوكو في هذه الحالة المثالية.

هكذا ظهر مبدأ التكافؤ الممكن بين القوى العطالية الوهميَّة وقوى الجاذبية الحقيقية بتأثير الأجرام السماوية البعيدة. وسيكون التكافؤ هذا أساس نظرية أينشتاين.

2.6 ـ صيغة مبدأ التكافؤ المحلي لقوى العطالة وقوى الجاذبية[14]

تبيِّن انتقادات أينشتاين أن التمييز بين قوى العطالة الوهمية وقوى الجاذبية هو خداع إذا تفحصنا منطقة محدودة من المكان والزمان. وتنشأ هذه النتيجة عن خاصية أساسية لقوى الجاذبية ح فهي تماماً مثل قوى العطالة تعطي أجسام الإختبار تسارعاً مستقلاً عن كتلة هذه الأجسام. فيكون التكافؤ بين الكتلة الجاذبية والكتلة العطالية (المؤكد تجريبياً) هو الذي يبطل أساس كل تمييز محلي بين القوى العطالية وقوى الجاذبية.

في هذه الحالة يمكن أن نتوقع أن قوى الجاذبية (مثلها مثل القوى العطالية) يمكن تعديلها وحتى إلغاؤها باختيار مناسب لهياكل الإسناد. لنذكر المثل التقليدي لجسم يسقط داخل مصعد يسقط سقوطاً حراً. إذ يبدو الجسم ثابتاً بالنسبة للمصعد أي على ارتفاع ثابت فوق أرضية المصعد. أما إذا كان المصعد يسقط بتسارع أكبر من تسارع الجاذبية g، فإن الجسم يرتفع داخل المصعد ليلتصق بسقفه. وإذا كان تسارع المصعد أقل من g فإن الجسم يسقط حتى الأرضية. فاختيار هيكل إسناد متسارع مناسب (هيكل إسناد المصعد في المثل) أي ظهور قوى العطالة يعدل إذاً (ويلغي أحياناً) تأثير الجاذبية كما يراها مشاهد في هذا الهيكل.

---

(14) A. EINSTEIN. Jahrb. F. Rad. und El. 4, 1907, 411; Ann, d. Phys., 35, 1911, 898; 38, 1912, 443; Phys. Zs., 14, 1913, 1249.

بتعبير آخر لا يمكن الكشف عن حركة هيكل إسناد متسارع بواسطة تجربة داخل هذا الهيكل، إذ إن الأمر سيان بين أن يكون هذا الهيكل متحركاً بتسارع أو ثابتاً شرط تغيير قيمة الجاذبية. لا نستطيع إذن أن نميِّز في منطقة محدودة من الفضاء بين القوى العطالية الوهمية وقوى الجاذبية الحقيقية فهي متكافئة تماماً.

أما في المناطق الواسعة فإن هذا التكافؤ يختفي جزئياً. فوجود مجال جاذبية في منطقة واسعة يسبِّب تقارب خطوط القوى مثلاً. فلا يمكن اخفاء مجال الجاذبية تماماً لصالح مجال عطالة. وبدون الفصل الكامل لتأثيرات كل من هذين المجالين يمكن فقط أن نؤكد أن مجموعهما ليس عطاليًا تماماً.

ونصيغ مبدأ التكافؤ المحلي كما يلي:

في منطقة محدودة من الفضاء هناك تكافؤ بين مجال الجاذبية ومجال القوى الناتج عن حركة متسارعة (مجال تسارع)، ولا يمكن التمييز بين هذين المجالين بواسطة أيّة تجربة محلية.

هذه هي صيغة مبدأ النسبية المعمَّمة. فالنسبية الخاصة تنص على تكافؤ هياكل الاسناد الغاليلية فيكون مفهوم السرعة نسبياً. أما الصيغة السابقة لمبدأ التكافؤ فتفترض التكافؤ المحلي بين هياكل الإسناد المتسارعة وذلك بإدخال قوى الجاذبية أو كما سنرى لاحقاً بتغيير الهندسة. فيصبح التسارع نسبياً أيضاً.

7) مبدأ استعمال الفضاء غير الإقليدي

مع بداية عام 1913 بدأ أينشتاين يفكر أن التكافؤ بين قوى الجاذبية وقوى العطالة يجب أن يؤدي إلى تعديل الهندسة. فتوصَّل إلى افتراض وجود فضاء غير إقليدي. بيد أن التعبير عن قانون الجاذبية بشروط تُفرض على التكوين الهندسي لفضاء ريمان Riemann (1917)، لا يمكن أن يستنتج بدقة من المبادىء الأولية التي طرحها أينشتاين عام 1911. بل هو نتيجة حدس رائع intuition يتيح ترتيباً منطقياً للنتائج المعروفة حتى ذلك الوقت.

وقبل عرض النظرية الريمانية للجاذبية سنثبت في هذا المقطع والمقطع التالي كيف أصبحت صياغة نظرية غير إقليدية ضرورية. أي كيف أن التكافؤ المحلي لقوى الجاذبية وقوى العطالة ثم التكافؤ المعمَّم بين كل هياكل الإسناد المتسارعة يقودان حتماً إلى الهندسة غير الإقليدية.

بدون أن نبتعد عن الميكانيك النيوتني يمكن أن نثبت أن تأثير قوة F يمكن

صياغته بتكوين هندسي[15]. تستند صياغة مبدأ النسبية على مفهوم هياكل الإسناد الغاليلية المتكافئة. فإذا كان جسيم يتحرك تحت تأثير مجال قوة F يمكن أن نحافظ على صيغة مبدأ العطالة إذا درسنا الحركة في هيكل إسناد بطريقة مناسبة.

لذلك نفترض أن السرعة هي v و v + Fdt في الوقتين t و t + dt في هيكل الإسناد الثابت S_0. لنفترض أن هيكلاً S(t) يتحرك بالسرعة u بالنسبة إلى S_0 ويصبح S′(t + dt) متحركاً بالسرعة u′ بالنسبة إلى S_0. تتساوى سرعة الجسم v − u بالنسبة إلى S(t) مع سرعته v + Fdt − u′ بالنسبة إلى S′(t + dt) إذا:

$$\text{(XI-26)} \qquad u' - u = F\,dt.$$

عندئذ يكون مبدأ العطالة صحيحاً لأن سرعة الجسم المتحرك تبقى ذاتها بالنسبة إلى الهيكلين الإسناديين المتكافئين S equipollent و S′. ولكن في صياغة هذا المبدأ يجب تحوير معنى تكافؤ الهياكل: فالهيكلان S و S′ بأصلي محاور O و O′ متقاربين تفاضلياً يعتبران متكافئين إذا كانا محددين بمحاور متوازية بالمعنى الهندسي للكلمة ويتحرك الواحد بالنسبة إلى الآخر بحركة مستقيمة وبسرعة F dt.

في حالة مجال جاذبية غير متسق non uniform يكون تكافؤ هيكلين محدداً تدريجيّاً من نقطة إلى نقطة قريبة. وقد يتغير مع المسار المتبع من أصل محاور الأول O إلى أصل محاور الثاني O′. ويقول كارتان E.Cartan «إذا أردنا أن نكون دقيقين في تحليلنا يكون كل ما قمنا به هو اختيار اصطلاح لكلمة. ولكن هذا يثبت أهمية اختيار الكلام المناسب في تقدم العلوم».

بيد أن الميكانيك النيوتني يفرض تحديداً للتكافؤ متناقضاً مع مبادىء النسبية الخاصة. إذ يعبِّر عن التعادل بطريقة مخالفة تماماً عما هي في الفضاء الرباعي للزمان والمكان. فإذا كانت $e_p(e_1\, e_2\, e_3)$ هي المتَّجهات الأحادية لمحاور الفضاء و e_0 هو المتجِه الأحادي لمحور الوقت يكون التكافؤ العادي في غياب أي تغير de_p. فنجد العلاقات:

$$\text{(XI-27)} \qquad de_p = 0 \quad , \quad de_0 = F^p e_p\, dt.$$

(15) نستعيد هنا تحليلاً طرحه كارتان في:

E. CARTAN. «Les variétés à connexion affine et la Relativité générale». Ann. Ec. Norm. 40, 1923.

ولا يستمر هذا التحديد للتكافؤ في التحويلات النسبية التي تمزج تغيرات الزمان بتغيرات المكان. مما يعني أن التكافؤ الذي كان يتيح صياغة مبدأ العطالة المعمَّم في نطاق الميكانيك النيوتني لا يتفق مع مبدأ النسبية. وإذا جعلنا من مبدأ النسبية قانوناً أساسياً كما فعل أينشتاين يجب أن نحور في قانون الجاذبية كي يحافظ على صيغته في كل هياكل الإسناد الغاليلية. فيبدو هذا القانون كعلاقة بين كميات فيزيائية في فضاء غير إقليدي. سنرى أن صياغة هذا القانون تحتاج فقط إلى تقوُّس curvature الفضاء الرباعي للزمان والمكان. فنستبدل مجال الجاذبية بتحديد الخطوط الكونية للجسيمات المادية أي الخطوط التقاصرية للفضاء الرباعي. وهذه الطريقة ترجع عملياً إلى استبدال علم التحريك بعلم الحركية. ولكن علم الحركية هذا يحتوي ما يعادل مفهوم القوة من خلال الهندسة التي تفرضها على الفضاء.

باستبدال قوى العطالة وبالتالي قوى الجاذبية بتحويرات في بنية الفضاء الهندسية نفترض وجود تشكيل غير إقليدي يتحرك فيه الجسيم كأنه حر. حسب مبدأ العطالة يجب أن تكون المسارات الممكنة لهذا الجسيم نوعاً من تعميم للخطوط المستقيمة الإقليدية. ولكن الطريق الأقصر بين نقطتين على سطح منحنٍ هو الخط التقاصري. هكذا يستبدل تأثير «الكتل المخبأة» في نظرية هرتز والنجوم البعيدة في نظرية ماخ بالبنية الهندسية للفضاء الرباعي الأكثر تعقيداً في النسبية العامة. وهذه البنية تفرض على الجسيمات الحرّة أن تتبع مسارات تقاصرية في الفضاء غير الإقليدي. فالتكافؤ بين قوى العطالة وقوى الجاذبية يعود في الأصل إلى البنية الهندسية للفضاء. وتأثير الأجسام المادية على جسيم الإختبار لا يكون بواسطة قوى جاذبية بل بإحداث تقوُّس في الفضاء. والفضاء الإقليدي هو الفضاء الفارغ تماماً من المادة.

هكذا يتيح الفضاء غير الإقليدي توسيع مبدأ النسبية ليشمل هياكل الإسناد المتسارعة التي تحدِّدها إحداثيات مقوَّسة. ويعني هذا أن قوانين الفيزياء تحافظ على صيغتها ليس فقط في تحويلات لورنتز ولكن في أي تحويل للإحداثيات.

ومن الممكن طبعاً تحديد هياكل إسناد إحداثيات وتحويلات في فضاء إقليدي ولكن يصبح عندئذ بالإمكان تحديد تكافؤ صالح في كل الفضاء. أما التكافؤ بين هياكل الإسناد المتسارعة والهياكل العطالية فليس له إلّا معنى محلي. وهو كذلك في فضاء غير إقليدي إذ يكون هذا التكافؤ بعدم التمييز بين منطقة صغيرة من التشكيل غير الإقليدي والفضاء الإقليدي المُماسّ عليه في هذه النقطة.

هكذا يكون استعمال الفضاء غير الإقليدي وبالتحديد الفضاء الريماني قد أتاح ليس فقط توضيح مبدأ التكافؤ بل أيضاً حدوده.

8) دراسة حالة خاصة: الطبق الدائر

لنتفحص طبقين S و S_0 لهما محور واحد. ولنفترض أن S يدور بالنسبة إلى S_0 بسرعة زاويّة ثابتة ω حول المحور المشترك. S_0 هو هيكل إسناد غاليلي يتمثل مثلاً بالمختبر الذي تجري فيه التجربة. نفترض أن القياسات على S و S_0 والتي يقوم بها المشاهد المرتبط بـ S_0 بواسطة مقياس للطول مرتبط بالهيكل S_0 تقود هذا المشاهد إلى تحديد هندسة إقليدية. لنقابل قياسات الطول والوقت التي تجري في الهياكل الإسنادية S و S_0.

1.8 ـ الهندسة على جسم دائر ـ قياس المسافات

لا يمكن مبدئياً تطبيق مبدأ النسبية الخاصة وبالتالي قاعدة تحويل لورنتز على الطبق الدائر لأنه ليس هيكلاً إسنادياً عطالياً. ولكن يمكن أن نوسع صلاحية مبدأ النسبية كما يلي:

تطرأ على أجهزة القياس من مساطر وساعات مرتبطة بالطبق الدائر S تحولات نتيجة القوى الطاردة. فاستناداً إلى مبدأ النسبية الخاصة ليس هناك أجسام صلبة بالمعنى الصحيح. هذه القوى تغيِّر معيار الطول ومعيار الوقت في الهيكل S ليأخذا قيماً محدَّدة بعد الأخذ بالحسبان كل التصحيحات الناتجة عن القوى الوهمية المتعلقة بالهياكل الإسنادية المتسارعة.

لنفترض في وقت معين أن نسبة أطوال المساطر dt و dl_0 المرتبطة بالهياكل الإسنادية S و S_0 بالتالي تساوي النسبة ذاتها للأطوال في هياكل الإسناد S' و S_0 حيث S' هو هيكل الإسناد الغاليلي المرتبط بالمسطرة dl في الوقت المذكور. ويعني هذا أن المساطر المرتبطة بالطبق الدائر خاضعة فقط لظاهرة تقلص لورنتز بعد إجراء التصحيحات الناتجة عن ظواهر التسريع.

ففي الإحداثيات القطبية (r, θ) تكون المسافة بين نقطتين متقاربتين تفاضلياً (r, θ) و $(r + dr, \theta + d\theta)$ من الهيكل S محدودة بالعلاقة:

$$d\sigma^2 = dr^2 + r^2 \, d\theta^2 \qquad \text{(XI-28)}$$

وذلك بالنسبة للمشاهد في S_0 إذا قيست بمعيار الطول في هيكل الإسناد S_0. ولكن، بالنسبة لهذا المشاهد، إذا كان معيار الطول في S موضوعاً في الإتجاه الشعاعي لا يتغير طوله لأن سرعة الجسم في هذا الإتجاه منعدمة. أما إذا كان موضوعاً بالإتجاه العمودي على الشعاع في نقطة P $(OP = r)$ تكون سرعته $v = \omega r$ فيتقلص ويبدو للمشاهد في S_0 بطول $dl_0 \sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}}$ بدلاً من dl_0 كما هو في S. وتكون المسافة بين النقطتين (r, θ) و $(r + dr, \theta + d\theta)$ مَقيسةً بمعيار الطول في هيكل الإسناد المتسارع S:

$$d\sigma^2 = dr^2 + \frac{r^2 \, d\theta^2}{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}} \qquad \text{(XI-29)}$$

وبشكل خاص تبدو الدائرة:

$$r = c^{ie} \qquad \text{(XI-30)}$$

إذا قيست في هيكل الإسناد $S_0(\omega = 0)$ كأنها بمحيط:

$$S_0 = \int ds_0 = r \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi r \qquad \text{(XI-31)}$$

أما إذا قيست بمعايير الطول المرتبطة بهيكل الإسناد المتسارع S فيكون محيطها مختلفاً:

$$S = \int d\sigma = \frac{r}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}}} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{S_0}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}}} > S_0 \qquad \text{(XI-32)}$$

وتكون مساحتها:

$$y = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r d\theta}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}}} \, dr = \frac{2\pi c^2}{\omega^2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}} \right) \qquad \text{(XI-33)}$$

فإذا كانت سرعتها $v = r\omega$ خفيفة بالنسبة إلى سرعة الضوء c نجد:

$$y \# \pi r^2 \left(1 + \frac{\omega_r^2 r^2}{4c^2} \right) \qquad \text{(XI-34)}$$

إن النتائج (XI-29) و (XI-32) و (XI-33) صالحة لكل عملية قياس بواسطة معايير مرتبطة بالهيكل الإسنادي المتسارع. ولكن هذه المعايير هي المعايير الطبيعية التي يستعملها المشاهد المرتبط بالهيكل الدائر S. هكذا تبدو الهندسة الطبيعية للمشاهد S والمصاغة بواسطة معايير في هيكله الإسنادي الذاتي غير إقليدية[16].

هكذا يجد المشاهد في S أن نسبة محيط الدائرة في S إلى قطرها يزيد عن π:

$$\text{(XI-35)} \qquad \frac{S}{2r} = \frac{S_0}{2r\sqrt{1-\frac{\omega^2 r^2}{c^2}}} = \frac{\pi}{\sqrt{1-\frac{\omega^2 r^2}{c^2}}} > \pi$$

نستخلص إذاً أن الهندسة الطبيعية في الطبق الدائر ليست إقليدية وأنها تبتعد عن الهندسة الإقليدية كلما زادت المسافة إلى محور الدوران.

الخطوط التقاصرية[17]:

تحدّد هندسة S بالصيغة الأساسية للمسافة في الفضاء ذي البعدين:

$$\text{(XI-36)} \qquad d\sigma^2 = g_{ab}\, dy^a\, dy^b \quad , \quad a, b = 1, 2.$$

فإذا اخترنا الإحداثيات:

$$\text{(XI-37)} \qquad y^1 = r \quad , \quad y^2 = 0$$

نجد استناداً إلى الصيغة (XI-29) أن:

$$\text{(XI-38)} \qquad g_{11} = 1 \quad , \quad g_{22} = \frac{r^2}{1-\frac{r^2\omega^2}{c^2}} \quad g_{12} = g_{21} = 0.$$

---

(16) تستند ضمنيا هذه النتيجة إلى الفرْضية التالية: يقبل المشاهد في S أن القياسات المنفّذة على S و S_0 باستعمال معايير S_0 الغاليلية تقود إلى هندسة إقليدية. وتستند هذه الفرضية بدورها إلى الصفة المميّزة للقياسات الغاليلية وبالتالي إلى امكانية الكشف على الحركة «المطلقة» للهيكل الاسنادي S. هذه الإمكانية (المتوفرة تجريبيا) تعارض (من الناحية المبدئية بالذات) تكافؤ الهياكل الاسنادية الغاليلية (المثبتة تجريبيا أيضا) وتبادلية النتائج المستخلصة من هذا التكافؤ.

(17) Cf. P. LANGEVIN, C.R. Ac. Sc. 173, 1921, p.831; 200, 1935, p.48; 205, 1937, p.304; Cf. aussi O. COSTA de BEAUREGARD [11] p.45; H. ARZELIES [8] p.153; C. MOLLER [16] p.241. A.S. EDDINGTON [22] p.112; B.KURSUNOGLY, space-time on the rotating disk, Proc. Camb. Phil. Soc. 47, 1951, p.177.

تتبع الجسيمات الحرة في سيرها الخطوط التقاصرية في الهيكل الإسنادي S. استناداً إلى (XV - 154) تحدَّد هذه الخطوط بالمعادلة:

$$\frac{d^2y}{d\sigma^2} + \left\{ {c \atop ab} \right\} \frac{dy^a}{d\sigma} \frac{dy^b}{d\sigma} = 0. \tag{XI-39}$$

حيث تحدَّد رموز كريستوفل Christoffel بالعلاقة:

$$\left\{ {c \atop ab} \right\} = \frac{1}{2} g^{ad} (\varphi_a g_{bd} + \varphi_b g_{ad} + \partial_d g_{ab}) \quad , \ a, b, c, d = 1, 2. \tag{XI-40}$$

فنجد باستعمال الصيغ (XI-38) أن:

$$g^{11} = \frac{1}{g} \text{ minor } g_{11} = \frac{g_{22}}{g} = 1 \ , \tag{XI-41}$$

$$g^{22} = \frac{1}{g} \text{ minor } g_{22} = \frac{g_{11}}{g} = \frac{1 - \frac{r^2 \omega^2}{c^2}}{r^2}$$

$$g^{12} = g^{21} = \frac{1}{g} \text{ minor } g_{12} = 0$$

وبالتالي تكون قيم رموز كريستوفل غير المنعدمة:

$$\left\{ {1 \atop 22} \right\} = -\frac{1}{2} g^{11} \partial_1 g_{22} = \frac{-r}{\left(1 - \frac{r^2 \omega^2}{c^2}\right)^2} \tag{XI-42}$$

$$\left\{ {2 \atop 12} \right\} = \left\{ {2 \atop 21} \right\} = \frac{1}{2} g^{22} \partial_1 g_{22} = \frac{1}{r\left(1 - \frac{r^2 \omega^2}{c^2}\right)}$$

فإذا أحللنا هذه النتيجة في المعادلة (XI-39) نجد:

إذا c = 1:

$$\frac{d^2r}{d\sigma^2} - \frac{r}{\left(1 - \frac{r^2 \omega^2}{c^2}\right)^2} \left(\frac{d\theta}{d\sigma}\right)^2 = 0. \tag{XI-39$_1$}$$

إذا c = 2:

$$\frac{d^2\theta}{d\sigma^2} + \frac{2}{r\left(1 - \frac{r^2 \omega^2}{c^2}\right)} \frac{dr}{d\sigma} \frac{d\theta}{d\sigma} = 0 \tag{XI-39$_2$}$$

أو:

$$(XI-43) \qquad \frac{d}{d\sigma}\left(\frac{r^2}{1-\frac{r^2\omega^2}{c^2}}\frac{d\theta}{d\sigma}\right)=0.$$

ونستنتج من الصيغة (XI-43) أن:

$$(XI-44) \qquad \frac{r^2}{1-\frac{r^2\omega^2}{c^2}}\frac{d\theta}{d\sigma}=K$$

وإذا أحللنا هذه النتيجة في (XI-39) نجد:

$$(XI-45) \qquad \left(\frac{dr}{d\sigma}\right)^2=1-\frac{r^2}{1-\frac{r^2\omega^2}{c^2}}\left(\frac{d\theta}{d\sigma}\right)^2=1-\frac{k^2}{r^2}\left(1-\frac{r^2\omega^2}{c^2}\right)$$

أو:

$$(XI-46) \qquad \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{d\sigma}=\frac{dr}{d\theta}\frac{k}{r^2}\left(1-\frac{r^2\omega^2}{c^2}\right)$$

$$=\pm\sqrt{1-\frac{k^2}{r^2}\left(1-\frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right)}$$

فإذا وضعنا $K = 0$ نجد:

$$\frac{dr}{d\sigma}=1\ ,\quad \frac{d\theta}{d\sigma}=0,$$

فتكون الخطوط $\theta = c^{te}$ (أي الخطوط الشعاعية للطبق S) خطوطاً تقاصرية (جيوديسية) في الحالات العامة $K \neq 0$. تكتب معادلة الخطوط التقاصرية بالصيغة:

$$(XI-47) \qquad \frac{dr}{d\theta}=\pm\frac{1}{K}\frac{r^2}{1-\frac{r^2\omega^2}{c^2}}\sqrt{1+\frac{k^2\omega^2}{c^2}-\frac{k^2}{r^2}}.$$

لنضع:

$$(XI-48) \qquad \rho=\frac{r}{K}\sqrt{1+\frac{\omega^2 k^2}{c^2}}$$

فتكتب المعادلة (XI-47) بالصيغة:

$$\text{(XI-49)} \quad \frac{1}{\rho^2\sqrt{1-\frac{1}{\rho^2}}}\frac{d\rho}{d\theta} = \pm 1 + \frac{\frac{k^2\omega^2}{c^2}}{1+\frac{k^2\omega^2}{c^2}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{\rho^2}}}\frac{d\rho}{d\theta}$$

وإذا حسبنا تكامل هذه المعادلة نجد:

$$\text{(XI-50)} \quad \text{Arc}\cos\frac{1}{\rho} = \pm(\theta-\theta_0) + \frac{\frac{k^2\omega^2}{c^2}}{1+\frac{k^2\omega^2}{c^2}}\sqrt{\rho^2-1}$$

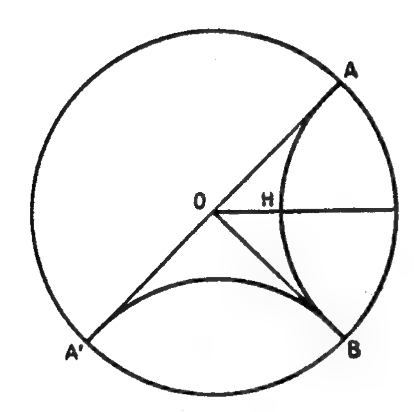
ويمكن أن نختار نقطة الإنطلاق بحيث تكون $\theta_0 = 0$ فنكتب:

$$\text{(XI-51)} \quad \theta = \pm\,\text{Arc}\cos\frac{a}{r} \mp \frac{a\,w^2}{c^2}\sqrt{r^2-a^2}$$

حيث:

$$\text{(XI-52)} \quad a = \frac{K}{\sqrt{1+\frac{k^2\omega^2}{c^2}}}$$

وفي الحالة الخاصة $k = 0$ نجد استناداً إلى (XI-44) أن $\theta = C^{te}$ تكون الخطوط الشعاعية خطوطاً تقاصرية.



الشكل 40 ـ المثلث الجيوديزي

ونلاحظ بسهولة أن مجموع زوايا مثلث مقوَّس مؤلَّف من ثلاثة خطوط تقاصرية تقل عن π. لإثبات ذلك ننطلق من أن الزاوية φ بين الخط المحدَّد بالنقط $M(y^a)$ و

$M + \delta M(y^a + \delta y^a)$ والنقطة $M(y^a)$ والخط المحدَّد بالنقطة $M + dM\ (y^a + dy^a)$ هي[18]:

$$\cos\varphi = \frac{g_{ab}\, dy^a\, \delta y^b}{\partial\sigma\delta\sigma} \qquad a, b = 1, 2 \tag{XI-53}$$

حيث:

$$d\sigma^2 = g_{ab}\, dy^a\, dy^b, \tag{XI-54}$$

$$\delta\sigma^2 = g_{ab}\, \delta y^a\, \delta y^b$$

والإحداثيات هنا هي $y^1 = r$ و $y^2 = \theta$ فإذا أخذنا بعين الاعتبار الصيغة (XI-38) نجد:

---

(18) انظر مثلاً الصفحة 226 من المرجع [16] C.MOLLER الذي يثبت قاعدة الصيغة (XI-53) كما يلي:

يمكن تمثيل أي سطح ببعدين في فضاء إقليدي ثلاثي بإحداثيات ديكارتيه (x,y,z) بالصيغة:

(1) $x^1 = f(y^1 y^2)\ ,\ x^2 = g(y^1 y^2)\ ,\ x^3 = h(y^1 y^2).$

حيث f و g و h دوالّ بالمتغيرات y^1 و y^2. المسافة بين النقطتين المحددتين بالإحداثيات y^a و $y^a + dy^a$ مع $(a = 1,2)$ هي:

(2) $ds^2 = \Sigma_p (dx^p)^2 \quad , \quad (p = 1,2,3).$

وتكتب أيضا بالصيغة:

(3) $ds^2 = g_{ab}\, dy^a\, dy^b$

مع:

(4) $$g_{ab} = \frac{\partial f}{\partial y^a}\ \frac{\partial f}{\partial y^b} + \frac{\partial g}{\partial y^a}\ \frac{\partial g}{\partial y^b} + \frac{\partial h}{\partial y^a}\ \frac{\partial h}{\partial y^b}$$

ومن جهة ثانية تحدد الزاوية θ بين الاتجاهين المحددين بـ dx^p و δx^p بالعلاقة:

(5) $$\cos\theta = \frac{dx^p\, \delta x^p}{ds\, \delta s}, \quad ds = \sqrt{\Sigma\, (dx^p)^2}\ ,\ \delta s = \sqrt{(\Sigma\, \delta x^p)^2}\ , \quad (p = 1,2,3).$$

وإذا فاضلنا العلاقة (1) نجد:

(6) $$\cos\theta = \frac{g_{ab}\, dy^a\, \delta y^b}{ds\, \delta s} = \frac{g_{ab}\, dy^a\, \delta y^b}{\sqrt{g_{cd}\, dy^c\, dy^d}\ \sqrt{g_{ef}\, dy^e\, dy^f}}\ , (a, b... = 1,2).$$

$$\cos\varphi = \frac{dr}{d\sigma}\ \frac{\delta r}{\delta\sigma} + \frac{r^2}{1-\frac{\omega^2 r^2}{c^2}}\ \frac{d\theta}{d\sigma}\ \frac{\delta\theta}{\delta\sigma} \qquad \text{(XI-55)}$$

واستناداً إلى (XI-44) و (XI-45) يمكن أن نكتب:

$$\cos\varphi = \sqrt{1+\frac{k_1^2\,\omega^2}{c^2}-\frac{k_1^2}{r^2}}\ \sqrt{1+\frac{k_2^2\,\omega^2}{c^2}-\frac{k_2^2}{r^2}} + K_1K_2\,\frac{1-\frac{r^2\,\omega^2}{c^2}}{r^2} \qquad \text{(XI-56)}$$

حيث K_1 و K_2 هي قِيم K المناسبة تباعاً للكميات $\left(\frac{dr}{d\sigma}\ \ \frac{d\theta}{d\sigma}\right)$ و $\left(\frac{\partial r}{\partial\sigma}\ \ \frac{\partial\theta}{\partial\sigma}\right)$.

الرسم 40 يظهر مثلثاً تقاصرياً OHA · HA هو الخط التقاصري العمودي على الشعاع. والنقطة A هي على محيط الطبق بالشعاع الحدي $R = \frac{c}{\omega}$. لنحسب الكميات K_1 و K_2 و K_3 للخطوط التقاصرية OH و HA و OA فنجد:

ــ في حالة الخطوط OH و OA تكون $\frac{d\theta}{d\sigma} = 0$. فنجد استناداً إلى (XI-44) أن:

$$K_1 = K_3 = 0$$

ــ في حالة الخط HA تكون $\left(\frac{dr}{d\sigma}\right) = 0$ في النقطة H. فنجد استناداً إلى (XI-43):

$$K_2 = \frac{r_0}{\sqrt{1-\frac{\omega^2\,ro^2}{c^2}}} \qquad r_0 = OH.$$

فإذا أحللنا في (XI-44) هذه القيمة لـ K_2 نجد في النقطة H من الخط التقاصري HA:

$$\left(\frac{d\theta}{d\sigma}\right)_H = K_2\,\frac{1-\frac{ro^2\omega^2}{c^2}}{ro^2} = \frac{\sqrt{1-\frac{\omega^2 r_0^2}{c^2}}}{r_0}$$

نستطيع الآن أن نطبِّق القاعدة (XI-55) في النقطة $H(r_0, \theta = 0)$ ثم في النقطة A $\left(r = \frac{c}{\omega}, \theta\right)$ لتحديد زوايا المثلث التقاصري φ_H وφ_A في هـاتين النقطتـين بواسطـة القيم K_1 و K_2 و K_3 فنجد:

ــ في النقطة H:
$$\left(r = r_0 \;,\; K_1 = 0 \;,\; K_2 = \frac{r_0}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2 r_0^2}{c^2}}}\right)$$

ومن ثم: $\cos\varphi_H = 0$

$$\varphi_H = \frac{\pi}{2} \tag{XI-57}$$

ــ في النقطة A:
$$\left(r = \frac{c}{\omega} \;,\; K_1 = \frac{-r_0}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2 r_0^2}{c^2}}} \;,\; K_3 = 0\right)$$

ومن ثم: $\cos\varphi_A = 1$

$$\varphi_A = 0. \tag{XI-58}$$

ــ في النقطة 0 حيث الهندسة إقليدية:

$$\varphi_0 < \frac{\pi}{2} . \tag{XI-59}$$

ومنها نستنتج أن مجموع زوايا المثلث التقاصري هي بين 0 و π[19]:

$$\varphi_{0HA} = \varphi_0 + \varphi_H + \varphi_A < \pi. \tag{XI-60}$$

2.8 ـ قياس الوقت

الوقت المحلي

لنقارن قياسـات الوقت التي تجـري في الهياكـل الإسنادية S و S_0. لنفترض أن ساعتين H و H_0 مـرتبطتان بـالهيكلين S و S_0 قـد جرى مـزامنتهما في وقت نعتبـره أصل الوقت $(t = 0)$ عندما كان موقعهما متلاصقين. بعد ذلك تشير هاتان الساعتان إلى الوقت t و t_0 على التوالي. وكما افترضنا في قياس المسافات نفترض هنا أن علاقة

(19) بشكل خاص كل زوايا المثلث التقاصري AA'B هي منعدمة فيكون مجمـوع زوايا هـذا المثلث منعدمـا $\varphi_{AA'B} = 0$.

الوقت t بالوقت t_0 هي العلاقة ذاتها للوقت t' بالوقت t_0. ويعني t' الوقت الذي تشير إليه الساعة H' المرتبطة بهيكل إسناد عطالي S' متحرك بالنسبة إلى S_0 بالسرعة ذاتها التي تتحرك بها الساعة H في الوقت المشار إليه، يعني هذا أن الوقت t الذي تشير إليه الساعة H يرتبط بالوقت t_0 بقاعدة لورنتز:

$$t = t_0 \sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}} \qquad \text{(XI-61)}$$

لنفترض أن الساعة H تلتقي بالساعة H_0 من جديد وتتوقف. يلاحظ عندئذ كل من المشاهدَيْن في S و S_0 أن الساعة H متأخرة عن الساعة H_0. وهذه حالة خاصة من مسألة مفارقة الساعات. ويرجع المشاهد في S_0 هذا التأخير إلى التسريع الذي حصل للساعة H خلال حركتها. ولكن المشاهد في S يرى أن الساعة H ثابتة دائماً. لذلك عليه أن يفترض أن هناك مجال جاذبية في هيكله الإسنادي الذاتي S (الذي هو دائماً ساكن بالنسبة إليه). ويشتق هذا المجال من الكمون $U = -\frac{\omega^2 r^2}{c^2}$. ويظهر تأثيره بتأخير سير الساعات في S بحيث يكون الوقت t في S.

$$t = t_0 \sqrt{1 + \frac{2U}{c^2}}. \qquad \text{(XI-62)}$$

مما يعني أنه يتغير حسب موقع الساعة H. وكل الساعات التي هي على مسافة واحدة من محور الدوران تشير إلى الوقت ذاته. الوقت t المحدد بالصيغة (XI-61) يسمى «الوقت المحلي في S»[20].

فإذا استعملنا الوقت المحلي لتحديد سرعة الضوء نجد بسهولة أن هذه السرعة تتغير من نقطة إلى أخرى في الهيكل الإسنادي S. فالموجة الضوئية في الهيكل الإسنادي S_0 تتحرك وفقاً للقاعدة:

$$ds_0^2 = -dx_0^2 - dy_0^2 - dz_0^2 + c^2 dt_0^2 = 0 \qquad \text{(XI-63)}$$

---

(20) نشير هنا إلى تناظم H. Arzelies في الصفحة 166 من المرجع [8] الذي يستبدل مفهوم الوقت المحلي بالوقت المركزي t_c الذي هو الوقت الذي تشير إليه الساعات المتباطئة بالنسبة $\sqrt{1 - \frac{r^2 \omega^2}{c^2}}$. فيكون الوقت المركزي t_c هو الوقت الذي تشير إليه ساعات الهيكل S_0 أي:

$$t_c = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{r^2 \omega^2}{c^2}}} = t_0.$$

أي إذا استعملنا الإحداثيات الاسطوانية ($x_0 = r_0 \cos \theta_0, y_0 = r_0 \sin \theta_0, z_0$):

$$ds_0^2 = -dr_0^2 - r_0^2 d\theta_0^2 - dz_0^2 + c^2 dt_0^2 = 0. \quad \text{(XI-64)}$$

ولكن الهيكل الإسنادي S_0 يدور بالنسبة إلى الهيكل الإسنادي S بالسرعة $\omega-$ أي:

$$r = r_0 \quad , \quad \theta = {}_0 - \omega t_0 \quad , \quad z = z_0. \quad \text{(XI-65)}$$

فإذا أحللنا هذه الصيغ في (XI-64) نجد أن الموجة تتحرك في S وفقاً للقاعدة:

$$-dr^2 - r^2 d\theta^2 - dz^2 \mp 2\omega r^2 d\theta\, dt_0 + c^2 \left(1 - \frac{r^2 \omega^2}{c^2}\right) dt_0^2 = 0 \quad \text{(XI-66)}$$

وإذا استعملنا الصيغة (XI-61) نكتب أيضاً:

$$-dr^2 - r^2 d\theta^2 - dz^2 \mp \frac{2\omega r^2 d\theta\, dt}{\sqrt{1 - \frac{r^2 \omega^2}{c^2}}} + c^2 dt^2 = 0 \quad \text{(XI-67)}$$

أو:

$$d\sigma_e^2 \pm \frac{2\omega r^2}{\sqrt{1 - \frac{r^2 \omega^2}{c^2}}} d\theta\, dt - c^2 dt^2 = 0. \quad \text{(XI-68)}$$

حيث $d\sigma_e^2$ هو مربع المسافة التفاضلية في الإحداثيات الإسطوانية:

$$d\sigma_e^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2. \quad \text{(XI-69)}$$

فتكون سرعة الضوء في هيكل الإسناد S باستعمال الوقت المحلي:

$$V = \frac{d\sigma_e}{dt} \quad \text{(XI-70)}$$

ونجد استناداً إلى (XI-68):

$$V^2 = c^2 \mp \frac{2\omega r^2}{\sqrt{1 - \frac{r^2 \omega^2}{c^2}}} \frac{d\theta}{dt} \quad \text{(XI-71)}$$

الوقت الطبيعي

تـدخل في الصيغـة (XI-68) المسافـة التفاضليـة الإقليديـة $d\sigma_e$. أما الهنـدسـة الطبيعية للطبق فتحدَّد بالصيغة الفضائية غير الإقليدية:

$$d\sigma^2 = dr^2 + \frac{r^2\, d\theta^2}{1 - \frac{r^2\, \omega^2}{c^2}} + dz^2. \qquad \text{(XI-72)}$$

فإذا أحللنا الصيغة (XI-72) في المعادلة (XI-66) نجد:

$$-d\sigma^2 + c^2\, d\tau^2 = 0 \qquad \text{(XI-73)}$$

حيث:

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{r^2\, \omega^2}{c^2}} \left(dt_0 - \frac{\omega r^2\, d\theta}{c^2 \left(1 - \frac{r^2\, \omega^2}{c^2} \right)} \right) \qquad \text{(XI-74)}$$

τ هو الوقت الطبيعي المرتبط بالهندسة الطبيعية للطبق. فإذا استعملنا هذا الوقت τ تكون سرعة الضوء ثابتـة c. مما يعني أنـه يمكن ضبط ساعـات S بتبادل إشـارات ضوئية انطلاقاً من الوقت الذي تشير إليه ساعة معينـة H_1. لتزامن السـاعة H_1 في أصل الوقت $t = 0$ مـع ساعـة هيكل الإسنـاد S_0 التي تتلاصق مـع H_1. ثم نضبط الساعة H في الهيكل S بمقارنتهـا مع H_1 بـواسطة تبـادل إشارات ضـوئية. يتغـير الوقت τ الذي تشير إليه الساعة H استناداً إلى المعادلـة (XI-74) مع المسـار الذي سار عليه الضوء من H_1 إلى H. ونحصل عليه بحساب تكامل الصيغـة (XI-74) مع الإفتـراض أن $dt_0 = 0$. وبشكل خـاص إذا سار الضـوء من H_1 إلى H على دائـرة شعاعها r حول المحور نجد:

$$\tau_0 = \frac{\pm\, r^2\omega}{c^2 \sqrt{1 - \frac{r^2\, \omega^2}{c^2}}} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{\pm\, 2\pi\omega r^2}{c^2 \sqrt{1 - \frac{\omega^2\, r^2}{c^2}}} \qquad \text{(XI-75)}$$

$$= \pm \frac{2\omega y}{c^2 \sqrt{1 - \frac{\omega^2\, r^2}{c^2}}}$$

حيث y هي مساحة الدائرة ذات الشعاع r والتي يسير عليها الضوء. وإذا افترضنا أن $v = \omega r$ صغيرة بالنسبة إلى سرعة الضوء c نجد:

$$\tau_0 = \pm \frac{2w\,y}{c^2} \quad \text{(XI-76)}$$

أمـا إذا ضُبطت الساعـة H على السـاعة H_1 بـواسطة إشـارات تسير عـلى دائـرة شعـاعها r وتـدور حول المحـور عدداً من المـرات يساوي q، يكـون فرق الـوقت بين الساعة H والساعة H_1 مسـاوياً لـ $q\tau_0 = \pm \frac{2wqy}{c^2}$ ممـا يعني أن الوقت الطبيعي في نقطة معينة محدَّدة فقط بإمكانية زيادة $q\tau_0$[21].

وإذا اجتاز شعاعان ضوئيان بإتجاهين متعـاكسين مسـاراً متعدِّد الاضـلاع إلى درجة يمكن اعتباره دائرة شعاعها r يكون فـرق الوقت الـذي يستغرقـه الشعاعـان للعودة إلى نقطة الانطلاق:

$$\Delta\tau = \frac{4\,w\,y}{c^2} \quad \text{(XI-77)}$$

وتتفق هذه النتيجة مع تجربة تداخل الضوء المنتشر في الهواء (تجربة سانياك).

أما إذا درسنا حركة جسمين سرعتهما $+V$ و $-V$ بالنسبة إلى الطبق الدائر بدلاً من حركة إشارتين ضوئيتين (فوتونين) فإننا نجد النتيجة ذاتها:

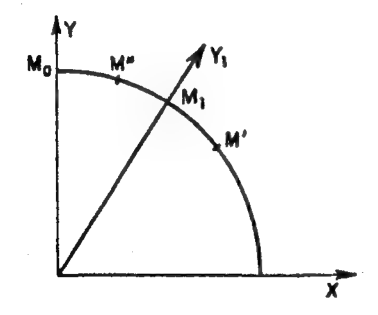
الفرق بين الوقت الذي يستغرقه الجسمان لا يتغير مع السرعة V ويساوي[22]:

---

(21) طبعاً إذا ضبطت ساعة على H_1 وتحركت على دائـرة من الطبق S وذلك ببطء كي لا تؤثـر حركتهـا على سير عملها، يطابق الوقت الذي تشير إليه عند عودتها إلى H_1 الوقت الذي تشير إليه الساعة H_1. ولكنـه يختلف بالكميات $q\tau_0$ عن الوقت الذي تشير إليه الساعة H.

(22) لنفترض أن جسماً M يتحرك على دائرة شعاعها r انطلاقاً من M_0 بسرعة V_0 بالنسبة إلى S_0 و V بـالنسبة إلى S، خلال الوقت dt_0 ينتقل المحور OY في S إلى OY_1. ويصبح الجسم في M′ و M″ إذا كان يتحرك باتجاه دوران الطبق أو الإتجاه المعاكس بالتوالي. فتكون المسافة التي قطعها في هيكل الإسناد S_0.

$$d\sigma_0 = V_0\,dt_0 = dl_0 \pm r_0\omega\,dt_0 \quad (1)$$



الشكل 41 ـ الجسم المتحرك على الطبق الدائر

=

....

= حيث dl_0 هي طول القوس M_1M' (أو M_1M'') في S_0. نجد إذا:

$$V_10 = \frac{dl_0}{dt_0} \pm r_0\omega \quad (2)$$

أما في هيكل الاسناد S فنجد

$$V = \frac{dl}{d\tau} \quad (3)$$

وإذا استعملنا الوقت الطبيعي والهندسية الطبيعية للطبق نجد:

$$dl = \frac{dl_0}{\sqrt{1 - \frac{r^2\omega^2}{c^2}}} \quad , \quad d\tau = \sqrt{1 - \frac{r^2\omega^2}{c^2}}\left(dt_0 \pm \frac{\omega r^2 \, d\theta}{c^2\left(1 - \frac{r^2\omega^2}{c^2}\right)}\right) \quad (4)$$

$$dl\sqrt{1 - \frac{r^2\omega^2}{c^2}} = rd\theta \quad (5)$$

وبمقابلة الصيغ (2) و (3) و (4) و (5) نجد

$$V = \frac{V_0 \mp r\omega}{1 \mp \frac{\omega^2}{c^2} V_0} \quad , \quad V_0 = \frac{V \pm r\omega}{1 \pm \frac{\omega^2}{c^2} V} \quad (6)$$

فإذا انطلق متحركان معا من M_0 بالسرعتين $V+$ و $V-$. بالنسبة إلى S يكون الوقت الطبيعي الذي يستغرقه كل منهما لقطع المسافة dl_0 (استنادا إلى (0) و(1)).

$$(dt_0)_1 = \frac{dl_0}{(V_0)_1 - r\omega} = \frac{dl_0}{V} \; \frac{1 + \frac{\omega r}{c^2} V}{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}} ,$$

$$(dt_0)_2 = \frac{dl_0}{(V_0)_2 - r\omega} = \frac{-dl_0}{V} \; \frac{1 - \frac{\omega r}{c^2} \cdot V}{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}} ,$$

ويكون الفرق بين هذين الوقتين

$$\Delta t_0 = (dt_0)_1 - (dt_0)_2 = \frac{2dl_0}{c^2} \; \frac{\omega r}{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}}$$

=

$$\Delta\tau = \frac{4\ w\ y}{c^2}\ . \qquad \text{(XI-77)}$$

وفي الحالة الخاصة لانتشار شعاعين ضوئيين في منشورات زجاجية (تجربة هارس) أو في أنبوب ماء ملتصق بالطبق الدائر (تجربة بوغاني) تكون النتيجة مستقلة عن قيمة $V = \frac{c}{n}$. هكذا تثبت تجربة التداخل صحة النتيجة (XI-77)[23].

ج ـ قانون أينشتاين للجاذبية

حسب مبادىء النسبية العامة تمتص قوى الجاذبية محلياً في بنية الفضاء الرباعي غير الإقليدي للمكان والزمان[24]. ويفترض أينشتاين أن الفضاء هو ريماني رباعي ويختلف هذا الفضاء عن الفضاء الإقليدي بتقوُّس يعبِّر عنه موتِّر ريمان ـ كريستوفل $G^{\rho}_{\mu\nu\sigma}$ (أنظر المعادلة (XV - 110)).

وتحدِّد خصائص فضاء ريمان بكاملها بالموتِّر الأساسي $g_{\mu\nu}$. إذ إن مُعامِل الإرتباط القريب $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$ يتطابق مع رموز كريستوفل في كل نقطة:

= وهو مستقل عن V. وبعد اجتياز الدائرة بكاملها ($\int dl_0 = 2\pi r$) يصبح هذا الفرق

$$\Delta t_0 = \frac{4\,\omega\,\mathcal{S}}{c^2\,(1 - \frac{\omega^2\,r^2}{c^2})} \;\#\; \frac{4\omega\mathcal{S}}{c^2}.$$

لنخصص المتحرك M_1 بساعة H_1 والمتحرك M_2 بساعة H_2، تتحركان معهما ومتزامنتان لدى انطلاقهما مع ساعة H ثابتة في هيكل الإسناد S وتُضبطان على H بواسطة تبادل الإشارات الضوئية. فتشيران إذاً إلى الوقت الطبيعي. ويشير كل من الساعتين إلى الوقت ذاته عند عودة المتحركين M_1 و M_2 إلى نقطة الانطلاق. مما يعني أن فرق الوقت الطبيعي الذي يستغرقه الجسمان لقطع الدائرة منعدم إذا قيس في هيكل كل منهما (لأن الجسمين يقطعان المسافة ذاتها بالسرعة ذاتها). ولكن الساعة H_1 التي تدور باتجاه دوران الطبق تؤخر الوقت $\frac{2\,\omega\,\mathcal{S}}{c^2}$ و H_2 التي تدور بالإتجاه المعاكس لدوران الطبق تقدم الوقت $\frac{2\,\omega\,\mathcal{S}}{c^2}$ بالنسبة إلى H (ارجع إلى (XI-76)). مما يعني أن M_1 المتحرك باتجاه دوران الطبق يستغرق وقتاً أطول من M_2 للقيام بدورة كاملة. فيكون فرق الوقت المقاس بالوقت الطبيعي للطبق بواسطة الساعة ذاتها H يساوي $\frac{4\,\omega\,\mathcal{S}}{c^2}$.

(23) لمزيد من المعلومات عن حركة الأجسام على الطبق الدائر في مختلف الهياكل الاسنادية ومختلف تحديدات الوقت يرجع إلى الصفحة 175 من المرجع [8] H.ARZELIES ولمقابلة القياسات في هيكل الاسناد S_0 وفي هيكل اسناد متسارع S يرجع إلى الصفحة 233 من المرجع [16] C.MOLLER.

(24) A.EINSTEIN, Berl. Ber. 1915, p.778, 799, 844; Ann. d. Phys. 49, 1916, p.769.

$$\text{(XI-78)} \qquad \Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\} = \frac{1}{2}\ g^{\rho\sigma} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\rho g_{\mu\nu}).$$

وموتِّر التقوُّس:

$$\text{(XI-79)} \quad G^{\rho}_{\mu\nu\sigma} = \partial_\sigma \left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\} - \partial_\nu \left\{ {\rho \atop \mu\sigma} \right\} + \left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\} \left\{ {\rho \atop \lambda\sigma} \right\} - \left\{ {\lambda \atop \mu\sigma} \right\} \left\{ {\rho \atop \lambda\nu} \right\}$$

يحدَّد بمعرفة المركِّبات $g_{\mu\nu}$ للموتِّر الأساسي ومشتقاتها الأولى والثانية. مما يعني أن كل خصائص فضاء ريمان تحدَّد بالصيغة الأساسية:

$$\text{(XI-80)} \qquad ds^2 = g_{\mu\nu}\, dy^\mu\, dy^\nu.$$

9) قانون الجاذبية خارج المادة

يعبَّر عن قانون الجاذبية خارج المادة بشروط على بنيــة الفضاء أي بقيــود تفرض عــلى تقوس الفضــاء الربــاعي الذي يميِّــز وحــده الفضــاء الــريمــاني عن الفضــاء الإقليدي.

ونحصل على هذه الشروط بجعل بعض التــركيبات الخطيــة linear combination من مركِّبات موتِّر التقوُّس منعدمــة. ويفرض أينشتــاين على مــركِّبات مــوتِّر التقــوُّس الشروط العشرة التالية:

$$\text{(XI-81)} \qquad G^{\rho}_{\mu\nu\rho} = G^{1}_{\mu\nu1} + G^{2}_{\mu\nu2} + G^{3}_{\mu\nu3} + G^{0}_{\mu\nu0} = 0.$$

يسمى مــوتِّــر التقــوُّس المنكمش contracted $G_{\mu\nu} = G^{\rho}_{\mu\nu\rho}$ «مــوتِّــر ريتشي Ricci» وصيغته استناداً إلى (XI-79) هي:

$$\text{(XI-82)} \qquad G_{\mu\nu} = Ga^{\rho}_{\mu\nu\rho} = \partial_\rho \left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\} - \partial_\nu \left\{ {\rho \atop \mu\rho} \right\} + \left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\} \left\{ {\rho \atop \lambda\rho} \right\} - \left\{ {\lambda \atop \mu\rho} \right\} \left\{ {\rho \atop \gamma\nu} \right\}.$$

يفترض أينشتاين إذاً أن «قانون الجاذبية خارج المادة يصاغ بانعدام موتِّر ريتشي».

$$\text{(XI-83)} \qquad \boxed{G_{\mu\nu} = 0}$$

قــد يبدو أن هــذه الشروط مقيدة أكثــر من اللازم إذ إنهــا تشكل عشر معــادلات

تفاضلية بين مركِّبات $g_{\mu\nu}$ العشرة. مما يعني مبدئياً تحديد المركِّبات $g_{\mu\nu}$ تحديداً كاملاً وبالتالي اختيار الهيكل الإسنادي. وهذا يبدو غير معقولاً لأن هيكل الإسناد يجب أن يبقى اختيارياً[25]. في الواقع يمكن أن تفرض الشروط (XI-83) لأن المركِّبات $G_{\mu\nu}$ ترتبط بالمعادلات التطابقية الأربع التالية:

$$\nabla_\rho \left(G_\mu{}^\rho - \frac{1}{2} \delta^\rho_\mu G \right) \equiv 0 \qquad \text{(XI-84)}$$

حيث وضعنا:

$$G_\mu{}^\rho = g^{\rho\sigma} G_{\mu\sigma} \quad , \quad G = g^{\mu\nu} G_{\mu\nu}. \qquad \text{(XI-85)}$$

فيكون عدد المعادلات المستقلة المستخلصة من الشروط (XI-83) هو $6 = 4 - 10$ مما يتيح الإبقاء على اختيارية هيكل الإسناد:

بشكل عام لنفترض أن معادَلات الجاذبية يعبِّر عنها بالشروط:

$$\boxed{S_\mu{}^\rho = 0} \qquad \text{(XI-86)}$$

حيث $S_\mu{}^\rho$ هو الموتِّر $g^{\rho\nu}S_{\mu\nu}$ الذي يرتبط فقط بالمركِّبات $g_{\mu\nu}$ ومشتقاتها الأولى والثانية. ولنفترض أيضاً أن المعادلات العشر (XI-86) يمكن تقليصها إلى ستة شروط للإبقاء على الصفة الاختيارية لهيكل الإسناد. وذلك بإخضاع المركِّبات $S_\mu{}^\rho$ إلى قوانين الحفظ Conservation law:

$$\boxed{\nabla_\rho S_\mu{}^\rho \equiv 0} \qquad \text{(IX - 87)}$$

لقد أثبت كارتان أن الموتِّر الوحيد الذي يستوفي هذه الشروط هو[26]:

$$\boxed{S_\mu{}^\rho = G_\mu{}^\rho - \frac{1}{2} \delta^\rho_\mu G} \qquad \text{(XI-88)}$$

---

(25) D.HILBERT, Gött. Nachr., 1915, p. 395.

(26) في الواقع ان الموتِّر $S_\mu{}^\rho$ المرتبط بـ $g_{\mu\nu}$ ومشتقاتها الأولى والثانية والخاضع للمعادلة (XI-87) يكتب بشكل عام:

$$S_\mu{}^\rho = h\left[G_\mu{}^\rho - \frac{1}{2} \delta^\rho_\mu (G - 2\lambda) \right].$$

نفترض أن $\lambda = 0$ و: $h = 1$.

حيث $G_{\mu\nu}$ هو موتِّر ريتشي المحدَّد بالصيغة (XI-82). الشرط في الصيغة (XI-86) يقود إلى $G = 0$ وبالتالي:

$$G_{\mu\nu} = 0 \qquad \text{(XI-83)}$$

هذه هي معادلات الجاذبية خارج المادة وبغياب المجال الكهرمغنطيسي.

10) قانون الجاذبية داخل المادة أو ضمن مجال كهرمغنطيسي

تتميَّز المادة والمجال الكهرمغنطيسي بموتِّر الزَّخم والطاقة $T_\mu{}^\nu$ الحفظي:

$$\nabla_\rho T_\mu{}^\rho = 0. \qquad \text{(XI-89)}$$

في هذه الحالة يعبِّر قانون الجاذبية عن توازن تأثيرات الموتِّر الحفظي $S_\mu{}^\rho$ ذي الأصل الهندسي وتأثيرات الموتِّر الحفظي $T_\mu{}^\rho$ الذي يرتبط بالمادة أو المجال الكهرمغنطيسي (أصله إذاً غير جاذبي). فيُكتب قانون الجاذبية بالصيغة:

$$\boxed{S_\mu{}^\rho = \chi\, T_\mu{}^\rho} \qquad \text{(XI-90)}$$

حيث χ ثابت مرتبط بثابت الجاذبية G. فتقود المعادلات التطابقية (XI-87) إلى معادلات حفظ الموتِّر $T_\mu{}^\rho$ (XI-89).

وإذا استعملنا الصيغة (XI-88) للموتِّر $S_\mu{}^\rho$ يمكن أن نكتب قانون الجاذبية بالصيغة:

$$G_\mu{}^\rho - \frac{1}{2}\, \delta_\mu{}^\rho\, G = \chi\, T_\mu{}^\rho \qquad \text{(XI-91)}$$

أو:

$$G_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, g_{\mu\nu}\, G = \chi\, T_{\mu\nu}. \qquad \text{(XI-92)}$$

11) مسارات جسيم غير مشحون في مجال جاذبي الخطوط التقاصرية (الجيوديسية):

إذا كانت المادة مؤلفة من جسيمات غير مشحونة لا تعطي أيّة تأثيرات كهرمغنطيسية أو حرارية إلخ... يصبح الموتِّر $T_\mu{}^\rho$ مساوياً لموتِّر المادة $M_\mu{}^\rho$.

واستناداً إلى المعادلة (VIII-166) العائدة للغازات المثالية وفي حال غياب الضغط $(P = 0)$ يمكن أن نكتب:

$$M_\mu{}^\rho = \mu_0 c^2 u_\mu u^\rho. \qquad \text{(XI-93)}$$

أما إذا كانت المادة مؤلّفة من جسيمات مشحونة فتكوّن مجالاً كهرمغنطيسياً. فإذا كان هذا المجال يخضع لمعادلات ماكسويل يكون موتّر الطاقة والزّخم هو موتّر ماكسويل:

$$\tau\mu^\rho = -\varphi_{\mu\sigma}\,\varphi^{\rho\sigma} + \frac{1}{4}\,\delta\mu^\rho\,\varphi_{\lambda\sigma}\,\varphi^{\lambda\sigma} \qquad \text{(XI-94)}$$

فتصبح المعادلة $\nabla_\rho T_\mu{}^\rho = 0$ بالصيغة:

$$\nabla_\rho\,(M_\mu{}^\rho + \tau_\mu{}^\rho) = 0 \qquad \text{(XI-95)}$$

أي استناداً إلى الصيغ (XI-93) و (XI-94) تصبح:

$$u^\rho \nabla_\rho u_\mu = -\frac{1}{\mu_0 c^2}\,\varphi_{\mu\rho} j^\rho = -\frac{4\pi\rho_0}{\mu_0 c^2}\,\varphi_{\mu\rho} u^\rho = \frac{4\pi}{\mu_0 c^2}\,f_\mu \qquad \text{(XI-96)}$$

حيث وضعنا:

$$j^\rho = \nabla_\sigma \varphi^{\rho\sigma} \quad , \quad f_\mu = \frac{1}{4\,\pi}\,\varphi_{\rho\mu} j^\rho. \qquad \text{(XI-97)}$$

فتكون معادلة مسار جسيم غير مشحون $(\rho = 0)$:

$$u^\rho \nabla_\rho u_\mu = 0 \qquad \text{(XI-98)}$$

أي إذا أخذنا بعين الإعتبار التحديد $u^\mu = \dfrac{dy^\mu}{ds}$:

$$\boxed{\frac{d^2 y^\rho}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} \frac{dy^\mu}{ds}\,\frac{dy^\nu}{ds} = 0} \qquad \text{(XI-99)}$$

ونحصل أيضا على هذه المعادلة انطلاقا من مبدأ التغيرات

$$\boxed{\delta \int ds = 0} \qquad \text{(XI-100)}$$

لتطبيقه على الصيغة الأساسية:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dy^\mu\, dy^\nu. \qquad \text{(XI-101)}$$

إن مسارات الجسيمات غير المشحونة المحدَّدة بالمعادلة (XI-98) هي إذاً الخطوط الأقصر أي الخطوط التقاصرية في فضاء ريمان ذي الصيغة الأساسية (XI-101) والذي يمتص المجال الجاذبي في بنيته الهندسية. يمكن إذاً اعتبار هذه الجسيمات حرة في هذا الفضاء فتسلك تبعاً لذلك الخطوط التقاصرية (XI-99).

يمكن دائماً أن نكتب معادلة مسارات الجسيمات الحرة بالصيغة (XI-99) لدى استعمال أيّة إحداثيات مقوَّسة. وهذا صحيح لكل فضاء ذي ارتباط قريب محدَّد بالرموز $\left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\}$ أي في حالة الفضاء الريماني وأيضاً الفضاء الإقليدي. ولكن في حالة الفضاء الإقليدي يمكن دائماً أن نختار إحداثيات منظَّمة ومتعامدة فتكون الرموز $\left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\}$ منعدمة. ويمكن بذلك أن ندرس منطقة واسعة من هذه الفضاء. في هذه الحالة الخاصة تصبح معادلة الحركة $\left(\frac{d^2x^\mu}{ds^2} = \frac{du^\mu}{ds} = 0 \right)$، أي أن مركِّبات السرعة الكونيَّة ثابتة. مما يعني أن الجسم الحر يسير على خط مستقيم بسرعة ثابتة.

أما في حالة الفضاء الريماني فلا يمكن تحويل معادلة الخطوط التقاصرية (XI-99) إلى الصيغة $u^\mu = c^{te}$ باختيار مناسب للإحداثيات يكون صالحاً في منطقة واسعة من الفضاء. وتمثِّل المعادلة (XI-99) حركة جُسيم حر في فضاء ريمان أي جُسيماً خاضعاً فقط لمجال الجاذبية. أما حركة جسيم مشحون $(\rho \neq 0)$ فتكون حسب المعادلة (XI-96) ويختلف مساره عن الخط التقاصري بسبب وجود الطرف الأيمن من المعادلة (XI-96)[27].

---

(27) يمكن أن نثبت أن مسارات الجسيمات المشحونة هي الخطوط التقاصرية في فضاء فِنْسلر Finsler ذي الصيغة الأساسية:

$$ds = \sqrt{g_{\mu\nu}\, dy^\mu\, dy^\nu} \quad , \quad + \frac{e}{m}\ \varphi_\mu\, dy^\mu.$$

فكل جسيم فضاء فِنسلر خاص بها حسب قيمة النسبة $\frac{e}{m}$ لهذا الجسيم. (انظر الصفحة 155 من المرجع [25] A. Lichnerowicz).

توسعات النسبية العامة وبعض نتائجها

أ ـ المعادلات التقريبية

1) كمون الجاذبية في الصيغة التقريبية النيوتنية

لنفترض أن مجال الجاذبية ضعيف بحيث يكون الفضاء الرباعي للمكان والزمان إقليديا تقريبيا. يمكن إذاً إيجاد نظام إحداثيات x^μ بحيث لا يختلف الموتِّر الأساسي $g_{\mu\nu}$ إلّا قليلاً عن قيمته الغاليلية:

$$\eta_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}\,(-1, -1, -1, +1). \qquad \text{(XII-1)}$$

فنكتب:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad , \quad g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + h^{\mu\nu}. \qquad \text{(XII-2)}$$

ونهمل الصيغ التي يدخل فيها مربع الكميات $h_{\mu\nu}$ ومشتقاتها.

الخطوط التقاصرية في فضاء ريمان المحدَّدة بالمعادلة:

$$\frac{d^2x^\rho}{ds^2} + \left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\} \frac{dx^\mu}{ds}\,\frac{dx^\nu}{ds} = 0 \qquad \text{(XII-3)}$$

تمثل مسارات الجسيمات غير المشحونة في مجال الجاذبية. لنفترض أن سرعة هذه الجسيمات خفيفة بالنسبة إلى سرعة الضوء:

$$\frac{dx^\rho}{ds} \ll c \qquad \text{أو:} \qquad \frac{dx^\rho}{dx^0} \ll 1 \quad (x^0 = ct). \qquad \text{(XII-4)}$$

حيث المؤشرات اللاتينية p,q,r تأخذ القيم 1-3 بينما المؤشرات اليونانية $\mu,\nu,\rho..$ تأخذ القيم 1,2,3,0 فنجد:

$$\left(\frac{ds}{dx^0}\right)^2 = g_{pq}\frac{dx^p}{dx^0}\frac{dx^q}{dx^0} + 2g_{p0}\frac{dx^p}{dx^0} + g_{00} \simeq g_{00} \quad (p,q = 1,2,3) \tag{XII-5}$$

وبالتالي استناداً إلى (XII-4) و (XII-2):

$$\left\{ {p \atop \mu\nu} \right\} \frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{dx^0} \simeq \left\{ {p \atop 00} \right\} \left(\frac{dx^0}{ds}\right)^2 \tag{XII-6}$$

$$\simeq \frac{g^{pq}}{2g_{00}} (2\partial_0 g_{0q} - \partial_q g_{00}) \simeq -\left(\partial^0 g_{0p} - \frac{1}{2}\partial_p g_{00}\right)$$

إذا كانت الجسيمات تتحرك ببطء تكون المشتقات $\partial_0 = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}$ صغيرة بالمقارنة مع المشتقات $\partial_p = \frac{\partial}{\partial x^p}$. يمكن إذاً إهمال الأولى مقابل الثانية. فتكتب المعادلات الثلاث الأولى (XII-3) بالصيغة:

$$\frac{d^2x^p}{ds^2} = -\frac{1}{2}\partial_p g_{00}. \tag{XII-7}$$

ولكن استناداً إلى (XII-5):

$$\frac{d^2x^p}{ds^2} \simeq \frac{d^2x^p}{(dx^0)^2} = \frac{1}{c^2}\frac{d^2x^p}{dt^2}. \tag{XII-8}$$

مما يتيح أن نكتب (XII-7) بالصيغة:

$$\boxed{\frac{d^2x^p}{ds^2} = -\frac{c^2}{2}\partial_p g_{00} = \frac{\partial U}{\partial x^p}} \tag{XII-9}$$

حيث وضعنا:

$$\boxed{U = \frac{c^2}{2} h_{00} + c^{te}} \tag{XII-10}$$

نستنتج إذاً في حالة فضاء يحتوي فقط أجساما ذات كتلة صغيرة وتتحرك بسرعة خفيفة ($v < c$) أن مسارات الجسيمات (أي الخطوط التقاصرية) مطابقة لتلك التي

نحصـل عليها بـاستعمال الميكـانيك النيـوتني الكلاسيكي مـع قوى تسـاوي تدرج الكمون U.

بهذه الصيغة التقريبية تدخل المركِّبة g_{00} وحدها في معادلات الحركة. لذلـك يمكن اعتبارها دالّة عددية U وتجاهل الصفة الموتّـرية الحقيقيـة لمجال الجـاذبية. أمـا في النظرية الكاملة فإن مجال الجاذبية يتمثل بموتّر متناظر من الرتبة الثانيـة. وتدخـل كل مركّباته العشر $g_{\mu\nu}$ في تحديد حركة الجسيمات.

2) معادلات مجالات الجاذبية في نظام إحداثيات متساوية درجة الحرارة وشبه غاليلية:

لنتفحص معادلات المجال (XI-90) في «الداخل» أي في حالة وجود المادة أو المجال الكهرمغنطيسي. وهي معادلات بطرف أيمن:

$$S_{\mu\nu} \equiv G_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} G = \chi T_{\mu\nu}. \qquad \text{(XII-11)}$$

ويدخل فيها موتّر ريتشي:

$$G_{\mu\nu} = \partial_\rho \left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\} - \partial_\nu \left\{ {\rho \atop \mu\rho} \right\} + \left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\} \left\{ {\rho \atop \lambda\rho} \right\} - \left\{ {\lambda \atop \mu\rho} \right\} \left\{ {\rho \atop \lambda\nu} \right\} \qquad \text{(XII-12)}$$

والتقوّس الرقمي:

$$G = g^{\mu\nu} G_{\mu\nu}. \qquad \text{(XII-13)}$$

ويمكن أن نتأكد بسهولة أن الصيغ (XII-12) $G_{\mu\nu}$ و (XII-13) G تكتب أيضـا:

$$G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} g^{\rho\sigma} \partial_\rho \partial^\sigma g_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \sigma^\rho \partial_\rho g_{\mu\nu} - \frac{1}{2} (g_{\mu\rho} \partial_\nu \sigma^\rho + g_{\nu\rho} \partial_\mu \sigma^\rho) + g^{\lambda\tau} g^{\rho\sigma} (\partial_\rho g_{\mu\lambda} \partial_\sigma g_{\nu\tau} - [\lambda\rho, \mu] [\tau\sigma, \nu]). \qquad \text{(XII-14)}$$

$$G = - g^{\rho\sigma} \partial_\rho \partial_\sigma \log \sqrt{-g} - \sigma^\rho \partial_\rho \log \sqrt{-g} - \partial_\rho \sigma^\rho - \frac{1}{2} \left\{ {\lambda \atop \rho\sigma} \right\} \partial_\lambda g^{\rho\sigma}. \qquad \text{(XII-15)}$$

لنحدِّد الرموز التالية:

$$(XII\text{-}16)\qquad [\mu\nu,\rho] = g_{\rho\sigma}\left\{ {\sigma \atop \mu\nu} \right\} = \frac{1}{2}\,(\partial_\mu\, g_{\nu\rho} + \partial_\nu\, g_{\mu\rho} - \partial_\rho\, g_{\mu\nu}).$$

والكمية المتَّجِهية[1]:

$$(XII\text{-}17)\qquad \sigma^\lambda = -g^{\rho\sigma}\left\{ {\lambda \atop \rho\sigma} \right\} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\,\partial_\mu\,(\sqrt{-g}\;g^{\mu\lambda})$$

نلاحظ أن الصيغ (XII-14) و (XII-15) تصبح أسهل إذا اخترنا نظام إحداثيات y^ρ بحيث يكون:

$$(XII\text{-}18)\qquad \sigma^\lambda = 0.$$

هذه الإحداثيات المميَّزة تسمى إحداثيات تساوي درجة الحرارة وتحدَّد كما يلي: تكتب الصيغة (XII-17) للكميات σ^λ بالصيغة:

$$(XII\text{-}19)\qquad \Box\, f^{(\lambda)} = g^{\rho\sigma}\,\nabla_\rho\,\nabla_\sigma\, f^{(\lambda)} = g^{\rho\sigma}\left(\partial_\rho\partial_\sigma - \left\{ {\tau \atop \rho\sigma} \right\}\partial_\tau\right) f^{(\lambda)}$$

$$= -g^{\rho\sigma}\left\{ {\lambda \atop \rho\sigma} \right\} = \sigma^\lambda.$$

مع:

$$\partial_\tau f^{(\lambda)} = \partial_\tau y^\lambda = \delta_\tau{}^\lambda.$$

الدَّوالّ الأربع $y^\lambda = f^{(\lambda)}$ هي حلول للمعادلة (XII-18) أي $\Box\, f^{(\lambda)} = 0$ فتحدد إذاً تشكيلات تساوي درجة الحرارة مميزة $f^{(\lambda)} = c^{te}$.

---

(1) وذلك لأن:

$$-g^{\rho\sigma}\left\{ {\lambda \atop \rho\sigma} \right\} = -\frac{1}{2}\,g^{\rho\sigma}\,g^{\lambda\tau}\,(2\partial_\rho\, g_{\sigma\tau} - \partial_\tau\, g_{\rho\sigma})$$

$$= -\partial_\rho\,(g^{\rho\sigma}\,g^{\lambda\tau}\,g_{\sigma\tau}) + g_{\sigma\tau}\,\partial_\rho\,(g^{\rho\sigma}\,g^{\lambda\tau}) + \frac{1}{2}\,g^{\lambda\rho}\,\frac{\partial_\rho g}{g}$$

$$= -\,\partial_\rho\, g^{\rho\lambda} + \partial^\rho\partial_\rho\, g^{\lambda\tau} + \delta^\lambda_\sigma\,\partial_\rho\, g^{\rho\sigma} + \frac{1}{2}\,g^{\lambda\sigma}\,\frac{\partial_\rho g}{g}$$

$$= \partial_\rho\, g^{\rho\lambda} + g^{\lambda\rho}\,\partial^\rho \frac{\sqrt{-g}}{\sqrt{-g}} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\,\partial_\rho'\,(\sqrt{-g}\;g^{\lambda\rho})$$

باستعمال $g^{\rho\sigma}\,g_{\sigma\tau} = \delta^\rho_\tau$ و $dg = g g^{\mu\nu}\,dg_{\mu\nu}$ (ارجع إلى الفصل XV المقطع الخامس).

فشرط تساوي درجة الحرارة يعني اختيار نظام إحداثيات بحيث إن[2]:

مع: $\Box y^{\lambda} = 0$

$$\Box = \nabla_\rho \nabla_\rho = g^{\rho\sigma}\nabla_\rho\nabla_\sigma. \quad \text{(XII-20)}$$

بهذا الشرط تتخذ معادلات الجاذبية (XII-11) الصيغة البسيطة:

$$\text{(XII-21)} \quad -\frac{1}{2} g^{\rho\sigma}\partial_\rho\partial_\sigma g_{\mu\nu} + g^{\lambda\tau}g^{\rho\sigma}(\partial_\rho g_{\mu\lambda}\partial_\sigma g_{\nu\tau} - [\lambda\rho, \mu][\tau\sigma, \nu])$$
$$+ \frac{1}{2} g_{\mu\nu}g^{\rho\sigma}\partial_\rho\partial_\sigma \log\sqrt{-g} + \frac{1}{4} g_{\mu\nu}\left\{ {\lambda \atop \rho\sigma} \right\}\partial_\lambda g^{\rho\sigma} = \chi T_{\mu\nu}.$$

التقريب شبه الغاليلي

لنفترض الآن أن مجال الجاذبية ضعيف. فنختار نظام إحداثيات بحيث يختلف الموتِّر الأساسي قليلاً عن الموتِّر الغاليلي:

$$\text{(XII-1)} \quad \eta_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}(-1, -1, -1, +1).$$

فنضع[3]:

$$\text{(XII-22)}_1 \quad g_{00} = 1 + h_{00} = 1 + \epsilon^2 \overset{2}{h}_{00} + 0(\epsilon^4)$$

$$\text{(XII-22)}_2 \quad g_{p0} = h_{p0} = \epsilon^3 \overset{3}{h}_{p0} + 0(\epsilon^5) \qquad (p,q = 1,2,3)$$

$$\text{(XII-22)}_3 \quad g_{pq} = -\delta_{pq} + h_{pq} = -\delta_{pq} + \epsilon^2 \overset{2}{h}_{pq} + 0(\epsilon^4)$$

مع:

$$\text{(XII-23)} \quad \epsilon^2 = \frac{1}{c^2}.$$

نقول إن مجموعة المعادلات هي من الدرجة الثانية إذا اكتفينا بالكميّات الصغيرة

---

(2) عن إحداثيات تساوي درجة الحرارة يرجع إلى:

G. DARMOIS. [20] Ch. III
De DONDER. [21] p.40.
J. CHAZY. [19] v. II, p.143.

(3) إن نشر Expansion الكميات $h_{\mu\nu}$ على الكميات الصغيرة $\epsilon, \epsilon^2, \epsilon^3$ هو كيفي ولكن سنرى أن هذا الاختيار تفرضه الكميات الصغيرة التي تدخل في موتِّر الزخم والطاقة (انظر المعادلة XII-43).

ϵ^2 و ϵ^3. فتدخل في المعادلات فقط الكميات $\frac{h}{2}$ و $\frac{h}{3}$ ويمكن إهمال حاصل ضرب (جداء) هذه الكميات ($\leqslant\epsilon^4$).

نستطيع أن نثبت أنه من الممكن دائما أن نختار هيكلاً إسناديًّا شبه غاليلي ومتساوي درجة الحرارة بالوقت ذاته(4). فاختيار هيكل إسنادي شبه غاليلي يجعل المتّجه σ^λ غائبا في كل درجات التقريب. فتأخذ معادلات الجاذبية الصيغة البسيطة (XII-21). ونستطيع استعمال الصيغ (XII-22) للمركّبات $g_{\mu\nu}$ في كتابة هذه المعادلات. ويجب أن نضيف إلى هذه المعادلات النتائج التالية التي نحصل عليها من (XII-22):

$$\text{(XII-24)} \qquad g = \text{déterm. } g_{\mu\nu} = -1 - \epsilon^2 \left(\frac{h_{00}}{2} - \Sigma_p \frac{h_{pp}}{2}\right) + 0(\epsilon^4)$$

$$\text{(XII-25)}_1 \qquad g^{00} = \frac{1}{g} \ \min \quad g_{00} = 1 - \epsilon^2 \frac{h_{00}}{2} + 0(\epsilon^4)$$

$$\text{(XII-25)}_2 \qquad g^{0p} = \frac{1}{g} \ \min g_{0p} = \epsilon^3 \frac{h_{p0}}{3} + 0(\epsilon^5)$$

$$\text{(XII-25)}_3 \qquad g^{pq} = \frac{1}{g} \ \min \quad g_{pq} = -\delta_{pq} - \epsilon^2 \frac{h_{pq}}{2} + O(\epsilon^4).$$

وإذا أحللنا (XII-22) و (XII-24) و (XII-25) في المعادلات (XII-21) نجد بالتقريب المستعمل:

$$\text{(XII-26)}_1 \quad -\frac{1}{2} \ \eta^{\rho\sigma}\partial_\rho\partial_\sigma \left[\frac{h_{00}}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{h_{00}}{2} - \sum_p \frac{h_{pp}}{2} \right) \right] = \frac{Z}{\varepsilon^2} T_{00}$$

$$\text{(XII-26)}_2 \quad -\frac{1}{2} \ \eta^{\rho\sigma}\partial_\rho\partial_\sigma \frac{h_{p0}}{3} = \frac{Z}{\varepsilon^3} T_{p0}$$

$$\text{(XII-26)}_3 \quad -\frac{1}{2} \ \eta^{\rho\sigma}\partial_\rho\partial_\sigma \left[\frac{h_{pq}}{2} + \frac{1}{2} \ \delta_{pq} \left(\frac{h_{00}}{2} - \sum_p \frac{h_{rr}}{2} \right) \right] = \frac{Z}{\varepsilon^2} T_{pq}.$$

وإلى هذه المعادلات يجب أن نضيف شرط تساوي درجة الحرارة (XII-18) الذي يكتب أيضا بالصيغة التالية:

$$\text{(XII-27)} \qquad \sigma_\mu = g_{\mu\nu}\sigma^\nu = -g^{\rho\sigma} [\rho\sigma, \mu] = 0$$

أي:

$$\text{(XII-28)} \qquad \sigma_\mu = -g^{\rho\sigma} \left(\partial_\rho g_{\sigma\mu} - \frac{1}{2} \ \partial_\mu g_{\rho\sigma} \right) = 0.$$

(4) ارجع إلى الصفحة 147 من المرجع J.CHAZY. [19] V. II.

فنجد إذاً في هذا الهيكل الإسنادي شبه الغاليلي:

$$\underset{2}{\sigma}_{\mu} = \eta^{\rho\sigma}\partial_{\rho}\underset{2}{h}_{\sigma\mu} - \frac{1}{2}\ \partial_{\mu}\underset{2}{h} = 0 \qquad \text{(XII-29)}$$

حيث وضعنا:

$$\underset{2}{h} = \eta^{\rho\sigma}\underset{2}{h}_{\rho\sigma}. \qquad \text{(XII-30)}$$

وتكتب المعادلة (XII-28) أيضاً بالصيغة:

$$\eta^{\rho\sigma}\partial_{\rho}\left[\underset{2}{h}_{\sigma\mu} - \frac{1}{2}\ \eta_{\sigma\mu}\underset{2}{h}\right] = 0. \qquad \text{(XII-31)}$$

مما يعني أن مجال الجاذبية الضعيف يخضع للمعادلات (XII-26) و (XII-31) الصحيحة بالدرجة التقريبية الثانية في هيكل إسناد تساوي درجة الحرارة شبه الغاليلي.

وإذا وضعنا:

$$\underset{p}{\gamma}_{\mu\nu} = \underset{p}{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\ \eta_{\mu\nu}\underset{p}{h} \quad \left(\underset{p}{h} = \eta^{\rho\sigma}\underset{p}{h}_{\rho\sigma}\right) \qquad \text{(XII-32)}$$

أو العلاقة العكسية:

$$\underset{p}{h}_{\mu\nu} = \underset{p}{\gamma}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\ \eta_{\mu\nu}\underset{p}{\gamma} \quad \left(\underset{p}{\gamma} = \eta^{\rho\sigma}\underset{p}{\gamma}_{\rho\sigma}\right), \qquad \text{(XII-33)}$$

نجد أن المعادلات التقريبية في الدرجة الأولى (XII-26) و (XII-31) تكتب بالصيغ التالية:

$$-\frac{1}{2}\ \eta^{\rho\sigma}\partial_{\rho}\partial_{\sigma}\underset{2}{\gamma}_{00} = \underset{\varepsilon^2}{\chi}\,T_{00} \qquad \text{(XII-34)}_1$$

$$-\frac{1}{2}\ \eta^{\rho\sigma}\partial_{\rho}\partial_{\sigma}\underset{3}{\gamma}_{0p} = \underset{\varepsilon^3}{\chi}\,T_{p0} \qquad \text{(XII-34)}_2$$

$$-\frac{1}{2}\ \eta^{\rho\sigma}\partial_{\rho}\partial_{\sigma}\underset{2}{\gamma}_{pq} = \underset{\varepsilon^2}{Z}\,T_{pq} \qquad \text{(XII-34)}_3$$

$$\eta^{\rho\sigma}\partial_{\rho}\underset{p}{\gamma}_{\sigma\mu} = 0. \qquad \text{(XII-35)}$$

وتكتب أيضاً بالصيغ:

$$\Box \gamma_{\mu\nu} = -2\chi T_{\mu\nu} \tag{XII-36}$$

$$\eta^{\rho\sigma}\partial_\rho\gamma_{\sigma\mu} = 0 \tag{XII-37}$$

حيث وضعنا:

$$\Box = \eta^{\rho\sigma}\partial_\rho\partial\sigma = \partial_0^2 - \sum_p \partial_p^2 \tag{XII-38}$$

$$\gamma_{pq} = \epsilon^2 \underset{2}{\gamma}{}_{pq} \;,\; \gamma_{p0} = \epsilon^3 \underset{3}{\gamma}{}_{p0} \;,\; \gamma_{00} = \epsilon^2 \underset{2}{\gamma}{}_{00}. \tag{XII-39}$$

3) تطبيق في حالة جسم متواصل يمكن اعتباره غازاً مثالياً

يمثل الموتِّر $T_{\mu\nu}$ مساهمة مصادر المجال. لنفترض أن هذه المصادر هي جسيمات غير مشحونة تكوِّن جسماً متواصلاً يشبه الغاز المثالي. فلا يحتوي الموتِّر $T_{\mu\nu}$ أيَّة مساهمة كهرمغنطيسية (يمثلها موتِّر ماكسويل $\tau_{\mu\nu}$) ويساوي إذاً الموتِّـر المادي $M_{\mu\nu}$ للغاز المثالي (أنظر المعادلة (VIII-166)).

$$T_{\mu\nu} = M_{\mu\nu} = (\mu_0 c^2 + p)\, u_\mu u_\nu - p g_{\mu\nu}. \tag{XII-40}$$

وتدخل في هذه الصيغة السرعة الكونيَّة:

$$u_p = g_{pq}u^q + g_{p0}u^0 = \left(g_{pq}\frac{\nu^q}{c} + g_{p0}\right) u^0 \;,\; p,q = 1,2,3 \tag{XII-41$_1$}$$

$$u_0 = g_{p0}u^p + g_{00}u^0 = \left(g_{p0}\frac{\nu^p}{c} + g_{00}\right) u^0 \tag{XII-41$_2$}$$

حيث وضعنا:

$$\nu^p = \frac{dx^\rho}{dt} \;,\; u^p = \frac{dx^\rho}{ds} \;, \tag{XII-42}$$

$$u^0 = \frac{dx^0}{ds} = c\,\frac{dt}{ds} = \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

فإذا أحللنا (XII-41) في (XII-40) واكتفينا بالحدّين الأكثر أهمية نجد:

$$M_{00} \simeq \mu_0 c^2 \tag{XII-43$_1$}$$

$$M_{p0} \simeq \mu_0 \nu_p c \tag{XII-43$_2$}$$

$$M_{pq} \simeq \mu_0 \nu_p \nu_q + p\delta_{pq}. \tag{XII-43$_3$}$$

وإذا استعملنا هذه النتيجة نستطيع أن نكتب المعادلات (XII-34) فنجد بالتقريب من الدرجة الثانية:

$$(XII\text{-}44)_1 \qquad \Box \underset{2}{\gamma}^{00} = 2\chi\mu_0 c^4$$

$$(XII\text{-}44)_2 \qquad \Box \underset{3}{\gamma}^{p0} = -2\chi\mu_0\nu_p c^4$$

$$(XII\text{-}44)_3 \qquad \Box \underset{2}{\gamma}^{pq} = -2\chi c^2 (\mu_0\nu_p\nu_q + p\delta_{pq}).$$

ويكون الجانب الأيمن من المعادلات (XII-44) متناهيا إذا كان الثابت χ من درجة $\epsilon^4 = \frac{1}{c^4}$ أي:

$$(XII\text{-}45) \qquad \chi = \epsilon^4 \chi_1 = \frac{\chi_1}{c^4}$$

فتكتب المعادلات (XII-44) كما يلي:

$$(XII\text{-}46)_1 \qquad \Box \underset{2}{\gamma}^{00} = -2\chi_1\mu_0$$

$$(XII\text{-}46)_2 \qquad \Box \underset{3}{\gamma}^{p0} = -2\chi_1\mu_0\nu_p$$

$$(XII\text{-}46)_3 \qquad \Box \underset{2}{\gamma}^{pq} = 0.$$

الحلول السكونية

لنبحث عن الحلول السكونية للمعادلات (XII-46) أي التي لا تتغير فيها المركّبات $\underset{p}{h}^{\mu\nu}$ مع الوقت. فنجد مجموعة المعادلات التالية

$$(XII\text{-}47)_1 \qquad \Delta \underset{2}{\gamma}^{00} = 2\chi_1\mu_0$$

$$(XII\text{-}47)_2 \qquad \Delta \underset{3}{\gamma}^{p0} = 2\chi_1\mu_0\nu_p$$

$$(XII\text{-}47)_3 \qquad \Delta \underset{2}{\gamma}^{pq} = 0$$

إذ إن:

$$(XII\text{-}48) \qquad \Box = \partial_0^2 - \Delta \quad , \quad \Delta = \sum_p \partial_p^2$$

حل المعادلة $(XII\text{-}47)_3$ هو:

$$(XII\text{-}49)\quad \underset{2}{\gamma}_{pq} = \underset{2}{h}_{pq} - \frac{1}{2}\,\eta_{pq}\underset{2}{h} = \underset{2}{h}_{pq} + \frac{1}{2}\,\delta_{pq}\left(\underset{2}{h}_{00} - \sum_{r}\,\underset{2}{h}_{rr}\right) = 0$$

الذي يقود (بعد عملية الجمع) إلى:

$$(XII\text{-}50)\quad \sum_{p}\,\underset{2}{\gamma}_{pp} = \frac{3}{2}\,\underset{2}{h}_{00} - \frac{1}{2}\,\sum_{p}\,\underset{2}{h}_{pp} = 0.$$

لنضع كما في المعادلة (XII-10):

$$(XII\text{-}51)\qquad U = -\frac{c^2}{2}\,h_{00} = -\,\frac{1}{2}\,\underset{2}{h}_{00} + 0(\epsilon^4).$$

فنجد استناداً إلى (XII-50):

$$(XII\text{-}52)\qquad \underset{2}{h}_{00} = -\,2U$$

المعادلة:

$$(XII\text{-}53)\qquad \sum_{p}\,\underset{2}{h}_{pp} = -\,6U$$

وإذا أحللنا هذه الصيغ في (XII-49) و (XII-32) نجد:

$$(XII\text{-}54)\qquad \underset{2}{h}_{pq} = -\,2U\delta_{pq}$$

$$(XII\text{-}55)\qquad \underset{2}{\gamma}_{00} = \underset{2}{h}_{00} - \frac{1}{2}\,\eta_{00}\left(\underset{2}{h}_{00} - \sum_{r}\,\underset{2}{h}_{rr}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\,\left(\underset{2}{h}_{00} + \sum_{r}\,\underset{2}{h}_{rr}\right) = -4U.$$

فتكتب إذاً المعادلة $(XII\text{-}47)_1$ بالصيغة:

$$(XII\text{-}56)\qquad \Delta U = -\,\frac{\chi_1}{2}\,\mu_0.$$

وما هذه إلّا معادلة بواسون:

$$(XI\text{-}23)\qquad \Delta U = -\,4\pi G\mu_0$$

المستنتجة من قانون نيوتن للجاذبية الكونيّة. لذلك يكفي أن نضع:

$$\chi_1 = 8\pi G \tag{XII-57}$$

أي[5]:

$$\boxed{\chi = \frac{\chi_1}{c^4} = \frac{8\pi G}{c^2}\ .} \tag{XII-58}$$

ولكن استناداً إلى (XI-14):

$$G = 6.664 \times 10^{-2}\ cm^2\ gr^{-1}\ sec^{-2}. \tag{XII-59}$$

فتكون قيمة الثابت χ إذاً:

$$\chi = \frac{8\pi G}{c^2} = 2.073 \times 10^{-48}\ cm^{-1}\ gr^{-1}\ sec^{-2}. \tag{XII-60}$$

وتكتب المعادلات (XII-47) بالصيغة:

$$\boxed{\Delta U = -\frac{\chi c^4}{2}\ \mu_0 = -4\pi G\mu_0} \tag{XII-61}$$

---

(5) نكتب أحيانا $\chi = \frac{8\pi G}{c^2}$ إذا استعملنا الصيغة:

$$M_{\mu\nu} = \mu_0\, u_\mu u_\nu$$

للموتّر المادي بدلاً عن (XII-40).

ومن جهة ثانية يمكن أن نعتمد نظاما جديداً للوحدات بحيث إن:

$$c = 1 \quad , \quad G = 1.$$

يكفي لذلك أن نغيّر وحدة الوقت والكتلة مع المحافظة على وحدة الطول. في هذا النوع من الوحدات:

$$[L]' = [L] = 1\ cm.$$

$$[T]' = [T]\ \frac{c'}{c} = \frac{1}{3.10^{10}} = 3.33.10^{-11}\ sec.$$

$$[M]' = [M]\ \frac{G'}{G}\ \frac{[T]^2}{[T]'^2} = \frac{(3.10^{10})^2}{6.66.10^{-2}} = 1.35.10^{28} gr.$$

فتكتب المعادلة (XI-90) في هذا النظام للوحدات:

$$S_{\mu\nu} \equiv G_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\ g_{\mu\nu}\, G = 8\pi\, T_{\mu\nu}.$$

(XII-62) $\Delta \underset{3}{\gamma}_{p0} = 2\chi c^4 \mu_0 \nu_p = 16\pi G \mu_0 \nu_p.$

الكمون الجانبي U الذي يكوِّنه في النقطة P(r) توزيع متواصل وسكوني لكثافة كتلة $\mu_0(r')$ حول النقطة $M'(r')$ يمكن أن يكتب بالصيغة التالية (وهي صيغة تقريبية حتى الدرجة التي نعمل بها).

(XII-63) $$U = \frac{\chi c^4}{8\pi} \int \frac{\mu_0 (r')\, d\mathcal{V}}{|r - r'|}$$

والكمون U الذي تكوِّنة في النقطة P(r) عدة أجسام A و B بكثافات كتلة μ_A و μ_B.. هو:

(XII-64) $$U = \sum_{A=1}^{N} U_A$$

حيث U_A مثلاً هي حل المعادلة:

(XII-65) $$\Delta U_A = -\frac{\chi c^4}{2} \mu_A = -4\pi G \mu_A$$

ويكتب الكمون U أيضاً بالصيغة (XII-63) بتحديد الكثافة الإجمالية:

(XII-67) $$\mu_0 = \sum_{A=1}^{N} \mu_A.$$

ومن جهة ثانية إذا كانت $\overset{A}{\nu}_p$ مركّبات سرعة الجسم A تكتب المعادلة (XII-62) أيضاً بالصيغة:

(XII-67) $$\Delta \underset{3}{\gamma}_{p0} = 16\pi G \sum_{A=1}^{N} \mu_A \overset{A}{\nu}_p = -4 \sum_{A=1}^{N} \overset{A}{\nu}_p \Delta U_A$$

حيث أخذنا بعين الإعتبار المعادلة (XII-65). ولكن $\overset{A}{\nu}_p$ ثابت عمليا لكامل الجسم A نجد إذا:

(XII-68) $$\Delta \underset{3}{\gamma}_{p0} = -4 \sum_{A=1}^{N} \Delta (\overset{A}{\nu}_p U_A)$$

أي:

(XII-69) $$\underset{3}{\gamma}_{p0} = \underset{3}{h}_{p0} = -4 \sum_{A=1}^{N} \overset{A}{\nu}_p U_A = 4 \sum_{A=1}^{N} \overset{A}{\nu}_p U_A.$$

نشير إلى أن الكثافة μ_0 دخلت في المعادلـة (XII-47) من خلال مـوتِّر المـادة $M_{\mu\nu}$ حيث تمثل μ_0 كثافة الكتلة العطالية. أما في تحديد الكمون النيـوتني (XI-23) فتمثل μ كثافة الكتلة الجاذبية. مما يعني أن مبادىء هذه النظرية تقـود إلى تكافؤ الكتلـة الجاذبية والكتلة العطالية.

تكافؤ الكتلة الجاذبية والكتلة العطالية

تعبِّر الكتلة العطالية عن مدى ردة فعل الجسم على القوى العطالية. بينمـا الكتلة الجاذبية تمثل مدى ردة فعل الجسم على قوى الجاذبية. واستناداً إلى قانون نيـوتن للجاذبية تمثل الكتلة الجاذبية أيضاً قدرة الجسم على تكوين مجـال جاذبيـة خاص به.

يأخذ مبدأ تكافؤ الكتلة الجاذبية والكتلة العطالية صيغتين تبعاً لتعبيره عن سلوك جسيم الاختبار في المجال الجاذبي أو لتكوين هذا المجال بمصدر أو أكثر.

أ ـ فالجسيم الخاضع لمجال جاذبي يتبع خطاً تقاصرياً في فضاء ريمـان. وتحدَّد خصائص هذا الفضاء وبالتالي مسار جسيم الاختبـار بالمعـادلات $S_{\mu\nu} = \chi T_{\mu\nu}$ التي لا تدخل فيها خصائص جسيم الاختبار. وفي ما يتعلق بجسيم الاختبـار، فإن مبـدأ السير على الخطوط التقاصرية هو تعبير عن تكافؤ قوى العطالة وقوى الجاذبية وهـو بالتالي تعبير عن تكافؤ الكتلة العطاليـة والكتلة الجـاذبية (وهـذه الأخيرة تمثِّـل ردة الفعل على المجال الجاذبي). مما يلغي أي تمييز بين النوعين من الكتلة.

ب ـ يتحدَّد مجال الجـاذبية داخـل جسم متواصـل أي تتحدَّد خصـائص فضاء ريمان من خصائص الجسم المادي بالمعادلات:

$$\text{(XI-92)} \qquad S_{\mu\nu} \equiv G_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, g_{\mu\nu}\, G = \chi T_{\mu\nu}$$

ولكن الموتِّر $T_{\mu\nu}$ الذي يظهر في هذه المعادلة تدخل فيه الكتلة العطالية m_i للجسيمات أو الكثافة العطالية μ_0 للجسم الذي يكوِّن هذا المجال (ارجع إلى المعادلة (XII-40)).

المعادلات التقريبية (XII-47) أو (XII-56) تقبل الحلول (XII-63). فإذا افترضنا أن المجال الجاذبي المكوَّن بالأجسام البعيدة ...A,B,C ضعيف، نجد:

$$\text{(XII-70)} \quad g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \frac{1}{c^2}\, \underset{2}{h_{\mu\nu}} \;,\; \underset{2}{h_{\mu\nu}} = -2\delta_{\mu\nu} \sum_{A=1}^{N} U_A$$

حيث:

$$U_A = \frac{\chi c^4}{8\pi} \int \frac{(\mu_A)_i \, d\mathcal{V}}{|r - r'|} \simeq \frac{\chi c^4}{8\pi r} (m_A)_i \qquad \text{(XII-71)}$$

$(m_A)_i$ ترمز إلى الكتلة العطالية للجسم A الذي يكوِّن المجال. ومن جهة ثانية إذا كان قانون الجاذبية خارج الجسم

$$G_{\mu\nu} = 0 \qquad \text{(XI-83)}$$

صالحا، علينا أن نستبدل الصيغة (XII-56) بالتقريب:

$$\Delta U = 0. \qquad \text{(XII-72)}$$

فنجد الحل:

$$U_A = \frac{G \sum_{A=1}^{N} (m_A)_g}{r} \qquad \text{(XII-73)}$$

حيث $(m_A)_g$ ثابت يظهر في كتابة حل المعادلة (XII-72). وهذا الثابت لا يرتبط إلّا بخصائص الجسم الذي يكوِّن مجال الجاذبية. ويمثل الكتلة الجاذبية للجسم[6].

ولكن في التقريب المستعمل (مجال ضعيف وأجسام بعيدة) تصبح المعادلتان (XII-71) و (XII-73) متطابقتين فنجد إذاً:

$$G m_g = \frac{\chi c^4}{8\pi} m_i \qquad \text{(XII-74)}$$

أي:

$$m_g = m_i \qquad \text{(XII-75)}$$

إذا وضعنا[7]:

$$\chi = \frac{8\pi G}{c^4} \qquad \text{(XII-58)}$$

(6) تستخلص أيضا هذه النتيجة من حل شفارتزشيلد SCHWARZCHILD مكتوب بالإحداثيات المتناحية في التقريب ذاته.

(7) او $\chi = 8\pi$ في نظام الوحدات $c=1$، $G=1$.

هـذه هي إذاً شروط تواصـل continuity حلول المعـادلات (XI-92) (داخـل المـادة) و (XI-83) (خارج المادة) التي تشكّل صيغة مبدأ التكافؤ للمجـالات التي تكوّنهـا توزيعات المـادة[8]. وتعبّر هـذه الشروط عن تكافؤ الكتلـة العطاليـة والكتلة الجـاذبية للجسيمات أو توزيعات المادة التي تكوّن المجال.

4) المعادلات خارج المادة

نحصـل على معـادلات الجاذبيـة خارج المـادة وفي غياب المجـال الكهـرمغنطيسي بحذف الموتّر $T_{\mu\nu}$ من المعادلات (XII-47).

1.4 ـ الحلول السكونية

إذا اكتفينا بالحـالات السكونيـة والتقريب النيـوتني نجد خـارج المادة بـدلاً من المعادلة (XII-47) المعادلة:

$$\Delta \underset{\rho}{\gamma_{\mu\nu}} = 0. \qquad \text{(XII-76)}$$

ومن جهة ثانية تبقى شروط تساوي درجة الحرارة (XII-37) دون تغيير:

$$\eta^{\sigma\rho}\, \partial_\rho\, \gamma_{\sigma\mu} = 0. \qquad \text{(XII-37)}$$

يمكن أن نبحث عن حـل خـاص لهـذه المعـادلات بتـركيب خطـي للكميـات $\frac{1}{r}$ و $\partial_p\left(\frac{1}{r}\right)$ و $\partial_p\partial_q\left(\frac{1}{r}\right)$ بمعامِل ثابت كيفي[9] فنجد:

$$\underset{2}{\gamma_{00}} = -\frac{4\,a}{r} \quad , \quad a = c^{te} \qquad \text{(XII-77)}$$

أما بقية الكميّات $\underset{2}{\gamma_{\mu\nu}}$ فهي منعدمة. وإذا رجعنا إلى التحديدات (XI-30) و (XII-33) نجد:

$$\underset{2}{h_{00}} = \underset{2}{\gamma_{00}} - \frac{1}{2}\ \eta_{00} = \frac{1}{2}\ \underset{2}{\gamma_{00}} \qquad \text{(XII-78)}$$

---

(8) تطابق الكميات (XI-71) و(XII-73) يعني عمليا تطابق الكمـون (XII-71) مع حلـول معادلـة بواسـون (XI-23) حيث μ تعني كثافة الكتلـة الجاذبيـة μ_g. ولكن معادلـة بواسـون تستنتج من قـانون نيـوتن للجاذبية إذا افترضنا تكافؤ الكتلة الجاذبية والكتلة العطالية.

(9) انظـر الصفحـة 186 من المـرجـع [9] P.G.BERGMANN حيث تجـد تـوسعـا في حلـول المعـادلات (XII-76) و (XII-37).

$$\underset{2}{h}_{pq} = \underset{2}{\gamma}_{pq} - \frac{1}{2}\ \eta_{pq}\underset{2}{\gamma} = \frac{1}{2}\ \delta_{pq}\underset{2}{\gamma}_{00}. \tag{XII-79}$$

والمركِّبات الوحيدة $\underset{2}{h}^{\mu\nu}$ غير المنعدمة هي:

$$\underset{2}{h}_{11} = \underset{2}{h}_{22} = \underset{2}{h}_{23} = \underset{2}{h}_{00} = -\frac{2\,a}{r}\ . \tag{XII-80}$$

ولكن استناداً إلى الصيغة (XII-10) نجد:

$$U = -\frac{c^2}{2}\ h_{00} = -\ \frac{1}{2}\ \underset{2}{h}_{00} = -\ \frac{1}{4}\ \gamma_{00} = \frac{a}{r}\ . \tag{XII-10}$$

فنضع إذاً:

$$a = Gm' \tag{XII-81}$$

إذا كان الكمون ناتجاً عن كتلة m'. نستنتج إذاً أن:

$$\frac{a}{r} = \frac{Gm'}{r} = U. \tag{XII-82}$$

بهذا الاختيار للإحداثيات وبالتقريب المستعمل نجد:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \frac{1}{c^2}\ \underset{2}{h}^{\mu\nu} + 0(\epsilon^4).$$

وتكون الصيغة الأساسية (باستعمال (XII-80)):

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{2U}{c^2}\right)(dx^2 + dy^2 + dz^2) + \left(1 - \frac{2U}{c^2}\right)c^2\,dt^2. \tag{XII-83}$$

2.4 ـ موجات الجاذبية

إذا درسنا الحلول غير السكونيّة خارج المادة نجد الموجات الجاذبية المتكـوِّنة من مجال متغيِّر بسرعة والتي لا مثيل لها في نظرية نيوتن للجاذبية.

وإذا اكتفينا بالمعادلة التقريبية:

$$\Box\,\underset{2}{\gamma}^{\mu\nu} = 0, \tag{XII-84}$$

يمكن أن نحدِّد الحلول ذات صيغـة الموجـة المستقيمة. وصيغتهـا إذا كانت منتشرة باتجاه ox هي:

$$\underset{2}{\gamma}^{\mu\nu} = \underset{2}{\gamma}^{\mu\nu}\,(x^1 - x^0). \qquad \text{(XII-85)}$$

وتسمح شروط الإحداثيـات بإدخـال قيود أخـرى على هـذه الحلول. إذ يمكن أن نثبت[10] أن تبديلاً مناسباً للإحداثيـات يجعل هـذه الموجـات محدَّدة بـالمركَّبـات غير المنعدمة:

$$\underset{2}{\gamma}^{22} = -\underset{2}{\gamma}^{23} \quad \text{:أو} \quad \underset{2}{\gamma}^{23}, \qquad \text{(XII-86)}$$

وتتيح هذه الإمكانية وضع $\underset{2}{\gamma}^{22} = -\underset{3}{\gamma}^{33}$ إذا أدرنا المحاور بزاوية $\frac{\pi}{2}$ حول ox.

ولا تعود تظهر هذه الموجات المستقيمة إذا عدنا إلى المعـادلات الدقيقـة للمجال. فالحلول الدقيقة التي يمكن أن نحصل عليها هي موجات أسطوانية. وقـد درس هذه الموجات أينشتاين وروزن Rosen[11] ثم بونـور W.B. Bonnor[12]. ويشرح برغمـان[13] غياب موجات الجاذبية المستقيمة كمـا يلي: تنقـل هذه المـوجات طـاقة تكـوِّن مجالاً جاذبيًّا مستقراً stationnary. ويؤثر هذا المجال حسب مبادىء النظريـة في هندسـة الفضاء الريماني. ولكن الموجة المستقيمة تحمل طاقة ثابتة ومحدَّدة في كـل نقطة من الفضاء مما يعني أن ابتعاد الفضاء الرباعي عن التكوين الإقليدي يمكن أن يـزداد إلى ما لا نهاية في كل الاتجاهات.

نشير أيضاً إلى أن التجارب لم تكشف عن وجود موجات الجـاذبية وأن أهميتهـا تبقى حتى الآن نظرية بحتة[14].

5) معادلات المجال وحركة المصادر

تختلف معـادلات المجال الجـاذبي عن معادلات المجـال الكهـرمغنطيسي. فتكـون نتائجهما إذاً غير متشابهة. فمعادلات الجاذبية غـير خطيّة إذ يـدخل فيهـا حاصـل

---

(10) لدراسة الموجات الجاذبية المستقيمة ارجع إلى الصفحة 188 من المرجع [9] P.G. BERGMANN.

(11) A. EINSTEIN et ROSEN «On gravitational waves» Journ. Franklin. Inst. 223, 1937, 43.

(12) W.B. BONNOR. Ann. Inst. H. Poincaré XV fasc. III, 1957, 146; Nature, 181 1958, 1196.

(13) P.G. BERGMANN [9] p. 189.

(14) نشـير إلى النتائـج الأخـيرة لبـيراني PIRANI Actes du Congrés sur la gravitation-Chapel Hill 1957.
وليشنرويكز A. LICHNEROWICZ, C.R. Ac. Sc. Juillet 1958.

دوالّ الكمون الجاذبي ومشتقاتها الأولى. أما معادلات المجال الكهرمغنطيسي فهي خطية إذ لا يدخل فيها حاصل المجال ومشتقاته على الأقل في الصياغة الماكسويلية.

هكذا تكون العلاقة بين المجال ومصادره مختلفة تماماً في النظريتين. لننظر مثلاً في مجال مجموعة من الجسيمات المشحونة. يمكن مبدئياً فصل مجال أحد الجسيمات عن المجال الإجمالي. وذلك لأن كلا من هذين المجالين والفرق بينهما يشكِّل حلولاً لمعادلات المجال الكهرمغنطيسي الخطيَّة[15]. ومن جهة ثانية إن القوة المؤثِّرة على شِحنة كهربائية (قوة لورنتز) مستقلة تماماً عن معادلات ماكسويل. مما يعني أن وجود قوى غير كهرمغنطيسية على الشحنة لا يغير في شيء من معادلات ماكسويل.

أما في حالة المجال الجاذبي فلا يمكن فصل المجال الجاذبي المؤثِّر على جسيم معين عن المجال الإجمالي لمجموعة من الجسيمات. فالفرق بين هذين المجالين ليس حلاً لمعادلات الجاذبية غير الخطيِّة. أضف إلى ذلك أن معادلات المجال ليست مستقلة عن القوى التي تؤثر على جسيمٍ ذي كتلة: فالقوى غير الجاذبية التي تؤثر على هذا الجسيم تحدث تغيرات في الموتِّر $T_{\mu\nu}$ وبالتالي في معادلات المجال.

في الكهرتحريكية الكلاسيكية لا يمكن استخلاص حركة الجسيم من معادلات المجال. أما في النظرية غير الخطية مثل النسبية العامة فإن حركة الجسيمات ترتبط ارتباطاً وثيقاً بمعادلات المجال. وفعلاً يمكن أن نثبت بطريقتين مختلفتين أنه يمكن استخلاص حركة جسيم غير مشحون من المعادلات غير الخطية للمجال الجاذبي. فتظهر معادلات الحركة كشروط يجب التقيد بها في كل درجات التقريب approximation لتأمين صحة معادلات المجال.

1.5 ـ استخلاص معادلات الحركة من معادلات المجال دون جانب ثان او طريقة النقط الشاذة

أ ـ معادلات المجال في مختلف درجات التقريب: لقد توسَّعت طريقة النقط الشاذة بأعمال أينشتاين وانفلد وهوفمان[16]. وتنطلق هذه الطريقة من معادلات

---

(15) في الواقع هذا التمييز ليس محدداً تماما.

(16) A. EINSTEIN, L. INFELD, B. HOFFMANN. Ann. Math. 39, 1938, 65.

A. EINSTEIN, L. INFELD. Ann. Math. 41, 1940, 455; Canad. J. Math. 1, 1949, 209.

L. INFELD et P. R. WALLACE, Phys. Rev. 57, 1940, 797.

= L. INFELD et A. SCRILD, Rev. of Mod. Phys. 21, 1949, 408.

المجال المكتوبة لخارج المادة حيث ينعدم الموتِّر $M_{\mu\nu}$. وتدخل المصادر كنقط شاذة في هذا المجال وتكون معادلات المجال دون جانب أيمن صالحة خارج سطوح مغلقة محيطة بهذه النقط الشاذة.

من المناسب استبدال معادلات المجال:

$$G_{\mu\nu} = 0 \qquad \text{(XI-83)}$$

بالمعادلات:

$$S^{*}_{\mu\nu} \equiv G_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\ \eta_{\mu\nu}\,\eta^{\rho\sigma}\,G_{\rho\sigma} = 0. \qquad \text{(XII-87)}$$

وفعلاً إذا وضعنا كما في المعادلات (XII-1) و (XII-2):

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}\ \ ,\ \ \eta_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}\,(-1,-1,-1,+1). \qquad \text{(XII-88)}$$

وأحللنا الصيغ (XII-88) في المعادلة (XII-87) تظهر الصيغ:

$$\gamma_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\ \eta_{\mu\nu}\,\eta^{\rho\sigma}\,h_{\rho\sigma} \qquad \text{(XII-89)}$$

المحدَّدة في الدرجة الثانية من التقريب بالمعادلة (XII-32). وإذا أحللنا الصيغة (XII-88) في المعادلة (XII-87) نجد المجموعة التالية من المعادلات[17]:

$$\partial^2_p\gamma_{00} + 2A_{00} = 0 \qquad \text{(XII-90)}_1$$

$$\partial^2_p\gamma_{0r} - \partial_\rho\partial_r\gamma_{0p} + 2A_{0r} = 0 \qquad \text{(XII-90)}_2$$

$$\partial^2_p\gamma_{rs} - \partial_p\partial_r\gamma_{ps} - \partial_p\partial_s\gamma_{pr} + \delta_{rs}\partial_p\partial_q\gamma_{pq} + 2A_{rs} = 0 \qquad \text{(XII-90)}_3$$

حيث:

$$2A_{00} = -\partial_p\partial_q\gamma_{pq} + G'_{pp} + G'_{00} \qquad \text{(XII-91)}_1$$

= L. INFELD, Acta Phys. Polo. XIII, 1954, 187.
PHAM TAN HOANG. Thèse, Paris (1957)0 La méthode des Singularités pour les équations du mouvement en Relativité Générale et en théorie du champ unifié.

(17) في هذا المقطع تكرار المؤشر يعني الجمع حتى وإن كان المؤشران مكتوبين كلاهما في الأعلى أو في الأسفل.

$$(XII\text{-}91)_2 \qquad 2A_{or} = \partial_r\partial_0\gamma_{00} - \partial_0\partial_p\gamma_{pr} + 2G'_{0r}$$

$$(XII\text{-}91)_3 \quad 2A_{rs} = \partial_0^2 (\delta_{rs}\gamma_{00} - \gamma_{rs}) - 2\delta_{rs}\partial_0\partial_p\gamma_{p0} + \partial_0\partial_r\gamma_{s0} + \partial_0\partial_s\gamma_{ro} + 2 \left(G'_{rs} + \frac{1}{2}\ \delta_{rs} (G'_{00} - G'_{pp} \right).$$

وتمثل $G'_{\mu\nu}$ الصيغ التربيعية المشكَّلة انطلاقاً من الموتِّر $g_{\mu\nu}$ ومشتقاته الأولى.

وبالافتراض أن مجال الجاذبية ضعيف $(h_{\mu\nu} \ll 1)$ يمكن أن نعتمد نظام إحداثيات شبه غاليلي وأن ننشر المركِّبات $g_{\mu\nu}$ كما في (XII-22) حسب القوى المتزايدة للكمية الصغيرة $\epsilon = \frac{1}{c}$. واستناداً إلى نتائج المقطع السابق نجد للموتِّر $\gamma_{\mu\nu}$ نشراً بالصيغ التالية:

$$(XII\text{-}92)_1 \qquad \gamma_{00} = \epsilon^2 \underset{2}{\gamma_{00}} + \dots + \epsilon^{2\ell-2} \underset{2\ell-2}{\gamma_{00}} + O(\epsilon^{2\ell}).$$

$$(XII\text{-}92)_2 \qquad \gamma_{0p} = \epsilon^3 \underset{3}{\gamma_{0p}} + \dots + \epsilon^{2-1} \underset{2\ell-2}{\gamma_{0p}} + 0(\epsilon^{2\ell+\ell})$$

$$(XII\text{-}92)_3 \qquad \gamma_{pq} = \epsilon^4 \underset{4}{\gamma_{pq}} + \dots + \epsilon^{2\ell} \underset{2\ell}{\gamma_{pq}} + 0(\epsilon^{2\ell+2}).$$

نحل هذه الصيغ في المعادلات (XII-90) في حالة شبه السكون (أي في حالة كون مشتقة الزمان $\partial_0 = \frac{1}{c}\ \frac{\partial}{\partial t}$ أعلى من مشتقة المكان $\partial_p = \frac{\partial}{\partial x^p}$ بدرجة في الكمية الصغيرة ϵ). فتتخذ المعادلات (XII-90) شكل المعادلات التقريبية في الدرجة ℓ:

$$(XII\text{-}93)_1 \qquad \partial_p^2 \underset{2\ell-2}{\gamma_{00}} + 2 \underset{2\ell-2}{A_{00}} = 0$$

$$(XII\text{-}93)_2 \qquad \partial_p^2 \underset{2\ell-1}{\gamma_{00}} - \partial_p\partial_r \underset{2\ell-1}{\gamma_{0p}} + 2 \underset{2\ell\to 2}{A_{0r}} = 0$$

$$(XII\text{-}93)_3 \qquad \partial_p^2 \underset{2\ell}{\gamma_{rs}} - \partial_p\partial_r \underset{2\ell}{\gamma_{ps}} - \partial_p\partial_s \underset{2\ell}{\gamma_{pr}} + \delta_{rs}\, \partial_p\partial_q \underset{2\ell}{\gamma_{pq}} + 2 \underset{2\ell}{A_{rs}} = 0.$$

ب ـ حل معادلات المجال: لنفترض أن المادة تتألف من النقط الشاذة 1...k...n ولنحسب تكامل (XII-93) على السطح المغلق S المحيط بكل نقطة شاذة ذات الإحداثيات $\overset{k}{\xi}_p$.

في المعادلة $(XII\text{-}93)_1$ الكمية A_{00} معروفة في كل درجات التقريب. تتيح إذاً هذه المعادلة تحديد γ_{00}. ولكن هذا التحديد ليس كاملاً في الدرجة $2\ell - 2$ بل يمكن زيادة كميات متناسبة مع $\psi = \frac{1}{r}$. لذلك نتوقع وجود عدد k من النقط القطبيـة $(\bar{\gamma}_{00}{}^{(p)})$ وعدد k من ثنائيات القطب $(\bar{\gamma}_{00}{}^{(d)})$ تعطي الصيغة:

$$(XII\text{-}94) \qquad \bar{\gamma}_{00} = \bar{\gamma}_{00}{}^{(p)} + \bar{\gamma}_{00}{}^{(d)}.$$

ويصبح حل المعادلة $(XII\text{-}93)_1$:

$$(XII / 95) \qquad \gamma'_{00} = \gamma_{00} + \bar{\gamma}_{00}.$$

حيث الكميات التي يعلوها خط ترمز إلى الحلول الناتجة عن وجود النقط الشاذة.

لإيجاد الحلول المتعلقـة بوجـود جسيمات تفتـرض أن مساهمـات النقط القطبية $\bar{\gamma}_{00}{}^{(p)}$ ومساهمات ثنائيات القطب $\bar{\gamma}_{00}{}^{(d)}$ هي بالصيغة التالية:

$$(XII\text{-}96) \qquad \underset{2\ell-2}{\bar{\gamma}_{00(p)}} = - 4\underset{2\ell-2}{\overset{k}{m}} \overset{k}{\psi}$$

$$(XII\text{-}96) \qquad \underset{2\ell-2}{\bar{\gamma}_{00(d)}} = \underset{2\ell-2}{\overset{k}{Sr}} \, \partial_r \overset{k}{\psi}$$

حيث $\overset{k}{S_r}$ و $\overset{k}{m}$ تتغير مع الـوقت و $\overset{k}{\psi}$ هي الدوال $\frac{1}{r}$ لثنـائي القطب k الموجـود في النقطة $(\overset{k}{\xi_p})$ أي:

$$(XII\text{-}98) \qquad \left(\overset{k}{r}\right)^2 = \left(x^p - \overset{k}{\xi}{}^p\right)\left(x^p - \overset{k}{\xi}{}^p\right). \qquad \text{مع:} \quad \overset{k}{\psi} = \frac{1}{\overset{k}{r}}$$

لنحسب تكامل المعادلات $(XII\text{-}93)_2$ و $(XII\text{-}93)_3$ على السطـح S بعد تبـديل $\gamma_{\mu\nu}$ و $A_{\mu\nu}$ بالموتّرات $\gamma'_{\mu\nu}$ و $A'_{\mu\nu}$ لأخذ النقط الشاذة بالحسبان. نلاحظ أولاً أن الحـدود terms في المعـادلات $(XII\text{-}93)_2$ و $(XII\text{-}93)_3$ التي تعطي مساهمـة في التكامـل عـلى السطح هي $A'_{\mu r}$ وحدها. إذ إن الحدود الأخرى تكتب دائماً بالصيغة:

$$(XII\text{-}99) \qquad \partial_p \left\{F_{\mu[rp]}\right\} = \partial_p \left\{\partial_p\gamma_{\mu r} - \partial_r\gamma_{\mu p} + \delta_{\mu r}\partial_s\gamma_{ps} - \delta_{\mu p}\partial_s\gamma_{rs}\right\}$$

حيث $F_{\mu[rp]}$ متخالفة التناظر بـالمؤشرات r و p فيكون تكـامل تبـاعد $F_{\mu(rp)}$ منعـدماً

بالتطابق على السطح S. علينا إذاً أن نحسب التكامـلات المتعلقة بـالحدود $A'_{\mu r}$ وأن نجعلها منعدمة. وتكون المعادلات $(XII\text{-}93)_2$ و $(XII\text{-}93)_3$ قابلة للتكامل إذا:

$$(XII\text{-}100) \quad \frac{1}{4\pi} \int A'_{\mu r} n_r \, dS = \frac{1}{4\pi} \int A_{\mu r} n_r \, dS + \frac{1}{4\pi} \int \overline{A}_{\mu r} = 0.$$

$A_{\mu r}$ تتعلق بالحلول بدون نقط شاذة و $\overline{A}_{\mu r}$ ترتبط بمساهمـة النقط الشاذة أي النقط القطبية وثنائيات القطب. n_r هي مركِّبـات المتَّجه الأحـادي العمودي عـلى السطح في النقطة x^r أي:

$$(XII\text{-}101) \qquad n_r = \cos(x^r, n).$$

لننظر أولاً في التكامل المتعلق بـ $A_{\mu r}$. يمكن أن نثبت أنه لا يتغـير مع السطـح S بل مع الوقت فقط[18]. فنجد إذاً:

---

(18) فعلاً لنفترض أن معادلات المجال صحيحة في الدرجة $2\ell-2$.

$$(1) \qquad \underset{2\ell-2}{S_{\mu\nu}} = 0$$

في هذه الحالة تصبح المعادلات التطابقية (XI-84) للموتِّر $\underset{2\ell-2}{S_{0\mu}}$

$$(2) \qquad \partial_r \underset{2\ell-1}{S_{0r}} = 0$$

لأن الحدود الإضافية الداخلية في هذه المعادلات التطابقية يمكن صياغتها بواسطـة الموتِّـر $\underset{2\ell-2}{S_{\mu\nu}}$ المنعدِم استناداً إلى (1). وبسبب المعادلة (1) والتحديـد (XII-87) للموتِّـر $S^*_{\mu\nu}$ يعبِّر عن المعـادلة (2) بـالدرجة $2\ell-2$ من التقريب بالمعادلة $\partial_r S_{0r} = 0$. وما صيغة $(XII\text{-}90)_2$ إلاّ S^*_{0r} بحيث تقـود المعادلـة (2) حتماً إلى:

$$(3) \qquad \partial_r \underset{2\ell-1}{A_{0r}} = 0$$

وبطريقة مشابهة إذا كانت معادلات المجال تحتوي بالإضافة إلى المعادلة (1) على

$$(4) \qquad \underset{2\ell-1}{S_{0m}} = 0$$

تصبح معادلات الحفظ (XI-84) إذا ما طبقت على $\underset{2\ell}{S_{rs}}$

$$(5) \qquad \partial_r \underset{2\ell}{S_{rs}} = 0$$

وتختفي بقية الحدود بسبب معـادلات المجال (1) و (4). أخـيراً تعادل المعـادلة (5) الشرط $\partial_r S r_s = 0$. فتعادل إذاً استناداً إلى الصيغة $(XII\text{-}90)_3$ لـ S^*_{rs} الشرط

$$(6) \qquad \partial_r \underset{2\ell}{A_{rs}} = 0$$

$$\frac{1}{4\pi}\int A_{\mu r} n_r \, dS \equiv c_\mu(\tau) \qquad \text{(XII-102)}$$

ويأخذ شرط قابلية التكامل في (XII-100) الصيغة التالية:

$$c_\mu(\tau) = -\frac{1}{4\pi}\int \overline{A}_{\mu r} n_r dS. \qquad \text{(XII-103)}$$

ولا تنعدم الكميات $c_\mu(\tau)$ بشكل عام. لذلك يجب وجود النقط القطبية وثنائيات القطب لتأمين وجود حلول للمعادلات (XII-93).

بالشرط الإضافي $S_r = 0$ الذي يقود إلى اختفاء ثنائيات القطب في الدرجة $2\ell - 2$ من التقريب توفُّر المعادلات (XII-103) وجود حلول للمعادلة $(\text{XII-93})_3$. وتحدِّد هذه الشروط الثلاثة حركة النقط الشاذة فتظهر معادلات حركة النقط الشاذة كشروط وجود حلول لمعادلات المجال (XII-93) في درجة التقريب المعينة.

ج ـ اختيار نظام الإحداثيات: يمكن أن نسهل صياغة معادلة المجال وحلولها باختيار نظام إحداثيات مناسب. وهذا الإختيار ممكن بفضل وجود أربع كميات كيفية تدخل في كل درجة تقريب[19].

لنختر مثلاً نظام إحداثيات تساوي درجة الحرارة محدَّداً بالشروط التالية (انظر (XII-18)):

$$g_{\mu\nu}\left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\} = 0 \quad \text{أو} \quad \partial_\rho\left(\sqrt{-g}\; g^{\mu\rho}\right) = 0. \qquad \text{(XII-104)}$$

= هكذا بفضل معادلات الحفظ الأربع تقود معادلات المجال في الدرجات $2\ell-2$ و $2\ell-1$ من التقريب إلى الشروط (3) و (6) في الدرجات $2\ell-1$ و 2ℓ.

وتعني هذه الشروط الصحيحة دائماً استناداً إلى معادلات المجال أن التكاملات على السطح والمتعلقة بـ $A_{\mu r}$ مستقلة تماماً عن شكل السطح وتتغير فقط مع الوقت. فنجد إذاً المعادلة (XII-102) بسبب معادلات الحفظ (XI-84).

(19) إذا كانت $\overset{*}{\gamma}_{00}$ و $\overset{*}{\gamma}_{0m}$ و γ_{mn} تمثل حلولاً للمعادلات (XII-93) تكون الكميات

$$\underset{2\ell-2}{\gamma_{00}} = \underset{2\ell-2}{\gamma_{00}}$$

$$\underset{2\ell-1}{\gamma_{0m}} = \underset{2\ell-2}{\overset{*}{\gamma}_{0m}} + \partial_m \underset{2\ell-1}{a_0}$$

$$\underset{2\ell}{\lambda_{mn}} = \underset{2\ell}{\overset{*}{\lambda}_{mn}} \times \partial_n \underset{2\ell}{a_m} - \partial_m \underset{2\ell}{a_n} - \delta_{mn}\partial_r \underset{2\ell}{a_r} + \delta_{mn}\partial_0 \underset{2\ell-1}{a_0}$$

(مع a_0 و a_m اختيارية) أيضاً حلولاً للمعادلات (XII-93).

فنلاحظ أن المعادلات:

$$(XII\text{-}105)_1 \qquad \underset{1}{\partial_0}\ \underset{2\ell-2}{\gamma_{00}} - \partial_p\ \underset{2\ell-2}{\gamma_{0p}} = 0$$

$$(XII\text{-}105)_2 \qquad \underset{1}{\partial_0}\ \underset{2\ell-2}{\gamma_{0r}} - \partial_s\ \underset{2\ell}{\gamma_{rs}} = 0$$

تشكل في الحالة $\ell = 2$ التقريب الأول للمعادلة (XII-104).

نختار إذاً نظام إحداثيات بحيث تكون المعادلات (XII-105) مستوفاة[20]. فتأخذ معادلات المجال (XII-93) الصيغة البسيطة التالية:

$$(XII\text{-}106)_1 \qquad \partial_p^2\gamma_{00} + 2A_{00} = 0$$

$$(XII\text{-}106)_2 \qquad \partial_p^2\gamma_{0r} + \partial_p\partial r\gamma_{0p} + 2A_{0r} = 0$$

$$(XII\text{-}106)_3 \qquad \partial_p^2\gamma_{rs} - \partial_r\partial_0\gamma_{0s} - \partial_s\partial_0\gamma_{0r} + \delta_{rs}\partial_p\partial_0\gamma_{0p} + 2A_{rs} = 0$$

حيث:

$$(XII\text{-}107)_1 \qquad 2\underset{2\ell-2}{A_{00}} = -\partial_p \underset{1}{\partial_0}\ \underset{2\ell-3}{\gamma_{0p}} + \underset{2\ell-2}{G'_{pp}} + \underset{2\ell-2}{G'_{00}}$$

$$(XII\text{-}107)_2 \qquad 2\underset{2\ell-2}{A_{00}} = \underset{1}{\partial_0}\ \partial_r \underset{2\ell-2}{\gamma_{00}} - \underset{2}{\partial_0^2}\ \underset{2\ell-3}{\gamma_{0r}} + 2\underset{2\ell-1}{G'_{0r}}$$

$$(XII\text{-}107)_3 \qquad 2\underset{2\ell}{A_{rs}} = -\underset{2}{\partial_0^2}\left(\delta_{rs}\underset{2\ell-2}{\gamma_{00}} + \underset{2\ell-2}{\gamma_{rs}}\right) + \underset{1}{\partial_0}\ \partial_r \underset{2\ell-1}{\gamma_{s0}} + \underset{1}{\partial_0}\ \partial_s \underset{2\ell-1}{\gamma_{r0}} + 2\left[\underset{2\ell}{G'_{rs}} + \frac{1}{2}\ \delta_{rs}\left(\underset{2\ell}{G'_{00}} - \underset{2\ell}{G'_{pp}}\right)\right].$$

---

(20) يختار أينشتاين وانفلد الشروط التالية:

$$\partial_0\gamma_{00} - \partial_r\gamma_{0r} = 0 \quad , \quad \partial_r \underset{2\ell}{\lambda_{rs}} = 0$$

وقد أجرى فام تان هوانغ PHAN TAN HOANG حسابات مستندة إلى استعمال شرط تساوي درجة الحرارة (XII-104) والتقريب (XII-105) (أطروحة «باريس» 1957).

د ـ **التقريب من الدرجة الثانية**: في الدرجة الثانية من التقريب $(\ell = 2)$ نجد استناداً إلى (XII-107) و (XII-92):

$$(XII\text{-}108)_1 \qquad 2\,\underset{2}{A}_{00} = 0$$

$$(XII\text{-}108)_2 \qquad 2\,\underset{3}{A}_{0r} = \underset{1}{\partial_0}\, \partial_r \underset{2}{\gamma}_{00}$$

$$(XII\text{-}108)_3 \qquad 2\,\underset{4}{A}_{rs} = -\underset{2}{\overset{2}{\partial_0}}\, \delta_{rs} \underset{2}{\gamma}_{00} + \underset{1}{\partial_0}\, \underset{3}{\partial_r}\, \underset{2}{\gamma}_{s0} + \underset{1}{\partial_0}\, \partial_s \underset{3}{\gamma}_{r0} + \frac{1}{4}$$

$$\partial_r \underset{2}{\gamma}_{00}\, \partial_s \underset{2}{\gamma}_{00} + \frac{1}{2}\, \underset{2}{\gamma}_{00}\, \partial^2_{rs} \underset{2}{\gamma}_{00} - \frac{3}{8}\, \delta_{rs} \partial_p \underset{2}{\gamma}_{00}\, \partial_p \underset{2}{\gamma}_{00}$$

حيث الحدود الثلاثة الأخيرة تأتي من $\underset{4}{G'}^{\mu\nu}$.

فـإذا أحللنا $(XII\text{-}108)_1$ و $(XII\text{-}108)_2$ في $(XII\text{-}106)_1$ وفي $(XII\text{-}106)_2$ نجـد بعد أخذ $(XII\text{-}105)_1$ بالحسبان:

$$(XII\text{-}109)_1 \qquad \partial^2_p \underset{2}{\gamma}_{00} = 0$$

$$(XII\text{-}109)_2 \qquad \partial^2_p \underset{3}{\gamma}_{0r} = 0$$

في حالة غياب نقط شاذة تُستوفى هذه المعادلات بالحل الخاص:

$$(XII\text{-}10) \qquad \underset{2}{\gamma}_{00} = 0 \quad , \quad \underset{3}{\gamma}_{0r} = 0.$$

ونستنتـج من ذلـك استنـاداً إلى المعـادلات (XII-108) أن التكـامـلات في الصيغـة (XII-102) منعدمة:

$$(XII\text{-}111) \qquad \underset{3}{c}_0 (\tau) \equiv \frac{1}{4\pi} \int \underset{3}{\overline{A}}_{0r}\, n_r\, dS = 0,$$

$$\underset{4}{c}_r (\tau) \equiv \frac{1}{4\pi} \int \underset{4}{\overline{A}}_{rs} n_s\, dS = 0.$$

وتمثل هذه شروط قابلية المعادلات $(XII\text{-}93)_2$ و $(XII\text{-}93)_3$ للحلول في درجـة التقريب الثانية.

α ــ لنتفحص الآن حل المعادلة $(XII\text{-}93)_1$:

$$(XII\text{-}114) \qquad \underset{2}{\overline{\gamma}}_{00} = -4m\underset{2}{\overset{k\,k}{\psi}}$$

المناسب لوجود عدد k من النقط القطبية دون وجود ثنائيات القطب. $\overset{k}{\psi}$ هي بالصيغة (XII-98) و $\overset{k}{m}$ هي دالّـة في $\overset{k}{x} = \tau$. فإذا أحللنا (XII-114) في المعادلة $(XII\text{-}108)_2$ نجد:

$$(XII\text{-}115) \qquad 2\underset{3}{\overline{A}}_{0r} \simeq -4\partial_r\left(\underset{3}{\overset{k}{m}\overset{k}{\psi}}\right)$$

حيث وضعنا:

$$(XII\text{-}116) \qquad \overset{k}{\dot{m}} = \frac{\partial \overset{k}{m}}{\partial \tau}$$

وأهملنا الحدود التي هي بدرجة أقل من $\left(\overset{k}{r}\right)^{-2}$ مثل (استناداً إلى (XII-98)).

$$(XII\text{-}117) \qquad \partial_0 \overset{k}{\psi} = \partial_0\left(\frac{1}{\overset{k}{r}}\right) = -\frac{1}{2\left(\overset{k}{r}\right)^3}$$

$$\partial_0\left(\overset{k}{r}\right)^2 = \frac{(x^p - \overset{k}{\xi}_p)}{\left(\overset{k}{r}\right)^3}\ \overset{k}{\dot{\xi}}_p = -\overset{k}{\dot{\xi}}_p\, \partial_p \overset{k}{\psi}$$

حيث:

$$(XII\text{-}118) \qquad \dot{\xi}_p = \frac{\partial \xi p}{\partial \tau}\ .$$

فإذا أحللنا (XII-115) في المعادلة (XII-112) نجد حالاً أن هذا الشرط مستوفى إذا:

$$(XII\text{-}119) \qquad \underset{2}{\overset{k}{m}} = 0 \quad , \quad \underset{r}{\overset{k}{m}} = c^{te}.$$

مما يعني أنه في التقريب من الدرجة الثانية $\ell = 2$ تكون الكتل مستقلة عن الوقت.

β ـ لنرجع الآن إلى الشروط (XII-113) التي تشكّل معادلات الحركة. كي نكتب صيغة $\overline{A}_{rs}$ استناداً إلى $(XII\text{-}108)_3$ نحتاج إلى صيغة $\underset{3}{\overline{\gamma}}_{0r}$ بالإضافة إلى $\underset{2}{\gamma}_{00}$ وحسب التقريب $(XII\text{-}105)_1$ لشرُوط تساوي درجة الحرارة نكتب:

$$(XII\text{-}120) \qquad \partial_p \underset{3}{\overline{\gamma}}_{0p} = \underset{1}{\partial_0}\ \underset{2}{\overline{\gamma}}_{00} = -4\underset{2}{\overset{k}{m}}\ \underset{1}{\partial_0 \overset{k}{\psi}}\ .$$

وإذا أخذنا (XII-117) بعين الاعتبار نجد إذاً:

$$\partial_p \overline{\gamma}_{0p} = 4\overset{k}{\underset{2}{m}}\overset{k}{\underset{1}{\xi}}_p\, \partial_p \overset{k}{\psi} \qquad \text{(XII-121)}$$

أي:

$$\underset{3}{\overline{\gamma}}_{0p} = 4\overset{k}{\underset{2}{m}}\,\overset{k}{\underset{1}{\xi}}_p \partial_p \overset{k}{\psi} \qquad \text{(XII-122)}$$

ونكتب المعادلة $(XII\text{-}108)_3$ بالصيغة البسيطة:

$$\underset{1}{A}_{rs} = 2\,\overset{k}{\underset{2}{m}}\partial_0\, \partial_s \overset{k}{\underset{1}{\xi}}_r \overset{k}{\psi} + 2\partial_r \underset{2}{U}\partial_s \underset{2}{U} + 4\,\underset{2}{U}\partial^r_{rs} \underset{2}{U} - 3\delta_{rs}\, \partial_p \underset{2}{U}\partial_p \underset{2}{U} \qquad \text{(XII-123)}$$

مع:

$$\underset{2}{U} = \frac{1}{4}\,\underset{2}{\overline{\gamma}}_{00} = -\,G\overset{k}{\underset{2}{m}}\overset{k}{\psi}. \qquad \text{(XII-124)}$$

لحساب الحدود التربيعية ننشر الدالّة U بـالقرب من النقطـة $x^p = \overset{k}{\xi}_p$ فنجد إذاً $\ell \neq k$:

$$\overset{\ell}{U} = \overset{\ell}{U} + (x^p - \overset{k}{\xi}_p)\,\widetilde{\partial}_p \overset{\ell}{U} + \frac{1}{2\,\ell}\;(x^p - \overset{k}{\xi}_p)\,(x^q - \overset{k}{\xi}_q)\,\widetilde{\partial}^2_{pq}\,\overset{\ell}{U} + \cdots \qquad \text{(XII-125)}$$

حيث الكميات التي تعلوها إشارة~ تعني قيم U و $\partial_p U$ و $\partial^2_{pq} U$ في النقطة $x^p = \overset{k}{\xi}_p$.
وإذا حسبنا مختلف الحدود في (XII-123) وأحللناها في هذه المعادلة نجد:

$$\underset{4}{\overline{A}}_{rs} = 2\overset{k}{\underset{2}{m}}\partial_s \overset{k}{\underset{2}{\xi}}{}^r \overset{k}{\psi} + 2\left(\partial_r \underset{2}{\overline{U}}\, \Sigma'_1\, \widetilde{\partial}_s \underset{2}{\overset{\ell}{U}} + \partial_s \overset{k}{\underset{2}{U}}\Sigma'_1\, \widetilde{\partial}_r \underset{2}{\overset{\prime}{U}} \right)$$
$$+\, 4\partial_{rs} \overset{k}{\underset{2}{U}}\Sigma'_1\, (x^p - \overset{k}{\xi}_p)\, \widetilde{\partial}_p \overset{\ell}{\underset{2}{U}} - 6\, \delta_{rs}\partial_p \overset{k}{\underset{2}{U}}\Sigma'_1\, \widetilde{\partial}_p \underset{2}{U} \qquad \text{(XII-126)}$$

حيث أهملنا الحدود بدرجة أدنى وترمز Σ'_1 إلى الجمع لكل القيم $\ell \neq k$.

لنحسب تكامل الصيغة (XII-126) على السطح S حول النقطة $x^p = \overset{k}{\xi}_p$ فنجد:

$$\underset{4}{c}_r\,(\tau) = -\,\frac{1}{4\,\pi}\,\int \underset{4}{\overline{A}}_{rs}\, n_s\, dS = -\,2G\overset{k}{\underset{2}{m}}\Big(\overset{k}{\underset{2}{\xi}}{}^r + \Sigma'_\ell\, \tilde{\partial}_r \overset{\ell}{\underset{2}{U}}\Big). \qquad \text{(XII-127)}$$

وبشكل خاص تكتب الشروط (XII-113) إذا $\ell = 2$:

(XII-128)
$$\boxed{\overset{k}{\underset{2}{\xi}}{}^{r} = -\Sigma'_1 \widetilde{\partial}_r \overset{\ell}{\underset{2}{U}}}$$

هذه هي معادلات الحركة المتوقعة في الميكانيك النيوتني: الجسيم النقطي ذو الإحداثيات $x^p = \overset{k}{\xi}_p$ يخضع لقوة مشتقة من الكمون $-\Sigma'_\ell U'$ وباستعمال التقريب من الدرجات المتتالية التي تدخل فيها حسابات مشابهة لما سبق يمكن أن نستنتج من معادلات المجال معادلات الحركة في الدرجة الأعلى من التقريب.

2.5 ـ استخلاص معادلات الحركة من معادلات المجال مع جانب ثانٍ أو طريقة موتّر الطاقة: هذه الطريقة للحصول على معادلات الحركة هي من أعمال دارموا G. Darmois[21] ودي دوندر Th. de Donder[22]. وقد قام بحساب الحلول بطرق متنوعة فوك V.A. Fock[23] وبابا بترو A. Papapetrou[24] ودو بتروفا de Petrova[25] وهينكن F.Hennequin[26].

ننطلق من معادلات المجال المكتوبة داخل المادة والصالحة للتوزيع المتواصل للمادة غير المشحونة والغير قابلة للإستقطاب. نفترض كما فعلنا في المقطع الثالث من هذا الفصل أن هذا التوزيع من المادة يشبه غازاً مثالياً. فتدخل مساهمته من خلال الموتّر المادي:

(XII-129)
$$M_{\mu\nu} = (\mu_0 c^2 + p)\, u_\mu u_\nu - p g_{\mu\nu}.$$

وتكون معادلات المجال بالصيغة:

(XII-130)
$$S_{\mu\nu} \equiv G_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, g_{\mu\nu}\, G = \chi M_{\mu\nu}.$$

نختار إحداثيات تساوي درجة الحرارة المحدَّدة بالمعادلة (XII-18). لقد حسبنا في المقطع الثاني صيغة $S_{\mu\nu}$ في هذه الإحداثيات الخاصة. فتكون معادلات المجال بالصيغة (XII-21).

---

(21) G. DARMOIS. [20]
(22) Th. de DONDER. [21].
(23) V.A. FOCK. J. Phys. Ac. Sc. U.R.S.S., 1, 1939, 81.
(24) A. PAPETROU. Proc. Phys. Soc., 64, 1951, 37.
(25) PETROVA. Zh. eksper. teor. Fiz., 19, 1949, 989.
(26) F. HENNEQUIN. Thése de doctoral, Paris, 1956.

وإذا اعتمدنا هيكلاً اسنادياً شبه غاليلي يسمح لنا بكتابة صيغ النشر (XII-22) للموتّر $g_{\mu\nu}$ يمكن أن نكتب المعادلات (XII-130) في أية درجة للتقريب. وفي الدرجة الثانية تأخذ هذه المعادلات الصيغة (XII-47). وحلولها كما وجدنا في المقطع الثالث تحدَّد بالمعادلات (XII-52) و (XII-54) و (XII-69) أيّ[27]:

$$\frac{h_{pq}}{2} = -2\,\delta_{pq}\,\Sigma_A\,U_A \quad , \quad \frac{h_{00}}{2} = -2\,\Sigma_A U_A \tag{XII-131}$$

$$h_{p0} = 4\,\Sigma_A\,\overset{A}{v}_p\,U_A \tag{XII-132}$$

حيث U_A تعني الكمون الناتج عن الجسم A ذي الكثافة μ_A. ويخضع هذا الكمون للمعادلة:

$$\Delta\,U_A = -\frac{\chi}{2}\,c^4\mu_A = -\,4\pi G\mu_A. \tag{XII-133}$$

هكذا تكون الكميات $h_{\mu\nu}$ محدَّدة في مختلف درجات التقريب. ويمكن إحلال قيمها (XII-131) و (XII-132) في معادلات حركة الغاز المثالي. فحركة الغاز المثالي غير المشحون في مجال الجاذبية ذي الكمون $g_{\mu\nu}$ تحدَّد بالمعادلة (VIII-194) حيث توضع $F_p = 0$. فنجد هكذا:

$$\frac{d}{dt}\int \mathcal{M}^0_p\,d\mathcal{V} = \frac{c}{2}\int \mathcal{M}^{\rho\sigma}\,\partial_p g_{\rho\sigma}\,d\mathcal{V}. \tag{XII-134}$$

فإذا اكتفينا بالتقريب من الدرجة الثانية نجد المعادلتين:

$$\frac{1}{c}\,\mathcal{M}^0_p = \frac{\sqrt{-g}}{c}\,(\mu_0 c^2 + p)\,u_p u^0 \simeq -\,\mu_O v^p \tag{XII-135}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^{\rho\sigma}\partial_p g_{\rho\sigma} &= \sqrt{-g}\,\left[(\mu_0 c^2 + p)\,u^\rho u^\sigma \partial_p g_{\rho\sigma} - p g^{\rho\sigma}\partial_p g_{\rho\sigma}\right] \\ &\simeq -\,2\mu_0 \partial_p U\end{aligned} \tag{XII-136}$$

حيث أخذنا بالحسبان المعادلتين (VII-191) و (XII-152) وصيغ u_p و u_0 المحسوبة في المعادلات (XII-41).

---

(27) $\overset{k}{a}{}^p$ هنا إلى إحداثيات مركز كتلة الجسم. فإذا رجعنا إلى طريقة النُقط الشاذة تكون $\underset{kk}{a^p}$ مساوية لـ $\underset{k}{\xi_p}$ التي ترمز إلى إحداثيات الجسم k. ممـا يعني أن $\ddot{a}^p$ هي $\ddot{\xi}_p$ وأن $\Sigma' U_R(A)$ هي $G\Sigma' m/r$. ونحتفظ بهاتين الطريقتين بالترميز لتسهيل قراءة المؤلفات الأصلية.

هكذا تكون حركة جسم A الناتجة عن (XII-134) وفق المعادلة:

$$\frac{d}{dt} \int \mu_A \, {}^A\nu_p \, d\mathcal{V}_A = \int \mu_A \partial_p U \, d\mathcal{V}_A. \quad \text{(XII-137)}$$

في الدرجة الثانية من التقريب. ولكن كتلة الجسم[28] هي:

$$m_A = \int \mu_A \, d\mathcal{V}_A \quad \text{(XII-138)}$$

والسرعة ${}^A\nu_p$ ثابتة على كامل الجسم A. فتكتب المعادلة (XII-137) بالصيغة:

$$\frac{d}{dt} (m_A {}^A\nu_p) = \int \mu_A \partial_p U \, d\mathcal{V} A. \quad \text{(XII-139)}$$

ويكتب الكمون بالصيغة التالية:

$$U = U_A + \Sigma' U_B (A). \quad \text{(XII-140)}$$

حيث U_A هو الكمون الذي يكوِّنه الجسم A في النقطة x(A) بداخله. و $U_B(A)$ هو الكمون (الثابت عملياً على كامل الجسم A) الذي يكونه الجسم B في نقطة x(A) من الجسم A. وترمز Σ' إلى أن الجمع يجب أن يكون على كل الأجسام B ما عدا A. فنجد من (XII-140):

$$\int \mu_A \partial_p U \, d\mathcal{V}_A = m_A \partial_p \left(\Sigma' U_B (A)\right) + \int \mu_A \partial_p U_A \, d\mathcal{V}_A \quad \text{(XII-141)}$$

وتحدَّد هكذا حركة الجسم A بالمعادلة:

$$m_A \ddot{a}^p = m_A \partial_p \left(\Sigma' U_B (A)\right) + \int \mu_A \partial_p U_A dV_A$$

حيث a^p هي إحداثيات مركز كتلة A.

وتتبسط المعادلة (XII-142) إذا كان الجسم A ذا تناظر كروي فنجد في هذه الحالة:

$$\partial_p U_A = \frac{\partial U_A}{\partial_r} \quad \frac{\partial r}{\partial x^p} = \frac{\partial U_A}{\partial_r} \quad \frac{x^p - a^p}{r} \quad \text{(XII-143)}$$

حيث:

$$r^2 = (x^p - a^p)(x^p - a^p). \quad \text{(XII-144)}$$

(28) قد يكون من الطبيعي اعتماد تحديد الصيغة (VIII-187) للكتلة إذ ان هذا التحديد يدخل في معادلات الحفظ. ولكن هذا يرجع عملياً إلى التحديد (XIII-138) في درجة التقريب المستعملة في هذا المقطع.

ونجد إذاً:

$$\int \mu_A \partial_p U_A \, d\mathcal{V}_A = \int \mu_A \frac{\partial U_A}{\partial r} \frac{x^p - a^p}{r} \, d\mathcal{V}_A = 0. \qquad \text{(XII-145)}$$

هكذا استناداً إلى المعادلة (XII-142) وفي الدرجة الثانية من التقريب تتيح نظرية النسبية العامة أن نستخلص من معادلات المجال معادلات الحركة التالية:

$$\boxed{a^p = \partial_p \left(\Sigma' U_B (A)\right).} \qquad \text{(XII-146)}$$

التي تتفق مع المعادلات النيوتنية للحركة. وقد قام المؤلفون في المراجع[26,25,24,23] من الصفحة 398 بالحسابات في درجات التقريب الأعلى فأتت النتائج متفقة مع نتائج طريقة النقط الشاذة.

ب ـ دراسة حل دقيق ولكن في حالة خاصة لمعادلات المجال: حل شفارتزشيلد

6) مجال الجاذبية حول جسم ذي تناظر كروي

إن التحديد الدقيق لمجال الجاذبية حول جسم غير مشحون ذي تناظر كروي له أهمية خاصة إذا أردنا دراسة النتائج التجريبية لنظرية النسبية العامة. وقد قام شفارتزشيلد Schwarzchild[29] بدراسة هذا الموضوع. ويعطي فعلاً هذا الحل قيمة المجال الجاذبي تقريباً حول الأجرام السماوية. بنية فلك ريمان حول هذه الأجسام محدَّدة بالصيغة الأساسية:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} \, dy^\mu \, dy^\nu. \qquad \text{(XII-147)}$$

لتحديد الموتِّر $g_{\mu\nu}$ نستعمل معادلات مجال الجاذبية قرب هذه الأجسام أي المعادلات التفاضلية العشر:

$$G_{\mu\nu} = G^{\rho}_{\mu\nu\rho} = \partial_\rho \left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\} - \partial_\nu \left\{ {\rho \atop \mu\rho} \right\} + \left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\} \left\{ {\rho \atop \lambda\rho} \right\} - \left\{ {\lambda \atop \mu\rho} \right\} \left\{ {\rho \atop \lambda\nu} \right\} = 0. \qquad \text{(XII-148)}$$

---

(29) SCHWARZSCHILD, Berl. Ber., 1916, p.189.

ونعرف أن هذه المعادلات ليست مستقلة إذ إنها ترتبط بالمعادلات التطابقية الأربع (XI-84). تتيح إذاً المعادلات (XII-148) تحديد ست من دوالّ الكمون (6=4−10). أما المركّبات الأربع الأخرى من الموتّر $g_{\mu\nu}$ فتبقى اختيارية ومرتبطة بهيكل الإسناد المستعمل.

وحساب رموز كريستوفل:

$$\left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}) \qquad \text{(XII-149)}$$

يَسهل كثيراً إذا كان الجسم الذي يكوِّن المجال ذا تناظر كروي فتكون الصيغة ds^2 ذاتها بتناظر كروي مما يتيح تحديد صيغتها مسبقاً وحصر عدد المركّبات $g_{\mu\nu}$ الواجب حسابها.

لنستعمل إذاً الإحداثيات الكروية:

$$y^1 = r \ , \ y^2 = \theta \ , \ y^3 = \varphi \ , \ y^0 = ct. \qquad \text{(XII-150)}$$

فتكتب الصيغة الأساسية ds^2 في حالة الفضاء الريماني ذي التناظر الكروي وفي حالة السكون بالصيغة(30):

---

(30) بشكل اعم يمكن ان نبحث عن الحلول المتناظرة كرويًا بالصيغة

$$ds^2 = g_{00}\,(dy^0)^2 + 2g_{p0}\,dy^p\,dy^0 + g_{pq}\,dy^p\,dy^q, \qquad (1)$$

حيث الإحداثيات y^p تخضع للعلاقة

$$r^2 = \sum_{p=1}^{3} (y^p)^2.$$

ويمكن تبسيط الصيغة (1) إلى

$$ds^2 = g_{00}\,(dy^0)^2 - g_{pq}\,dy^r\,dy^q \qquad (2)$$

وذلك بوضع

$$X_p = \frac{y^p}{r} \quad \text{حيث} \quad g_{pq} = \delta_{pq} - D(r)\,\chi_p\chi_q$$

فنحصل على الحل السكوني

$$g_{00}(r) = 1 - \frac{2G_m}{rc^2} \ , \quad g_{pq} = -\,\delta_{pq} - \frac{\frac{2G_m}{rc^2}}{1 - \frac{2G_m}{rc^2}}\,\chi_p\chi_q \ , \quad g_{p0} = 0.$$

ارجع إلى الصفحة 198 من المرجع [9] P.G BERGMANN,

$$(XII-151) \qquad ds^2 = \alpha\, dr^2 - \beta\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) + \sigma c^2\, dt^2.$$

فتصبح الصيغة ds^2 متطابقة مع الصيغة الأساسية للفضاء الإقليدي في الإحداثيات الكروية.

لتحديد مركِّبات الموتِّر الأساسي يلزمنا تحديد الدوال الثلاث α و β و σ دوال في r. إذ إن:

$$(XII-153) \qquad g_{11} = -\alpha \;,\; g_{22} = -\beta \;,\; g_{33} = -\beta\sin^2\theta \;,\; g_{00} = \sigma,$$

إذا حسبنا انطلاقاً من الصيغة (XII-153) رموز كريستوفل (XII-149) ثم مركِّبات موتِّر ريتشي لكتابة معادلات المجال (XII-148) نجد أن احدى الدَّوال α و β و σ تبقى اختيارية. هذه الخاصية ترجع إلى معادلات الحفظ (XI-84). نختار عادة:

$$(XII-154) \qquad \beta = r^2.$$

من المناسب استعمال الترميز:

$$(XII-155) \qquad \sigma = e^{2\ell} \quad , \quad \sigma = e^{2n}.$$

فتصبح مركِّبات الموتِّر الأساسي:

$$(XII-156) \qquad g_{11} = -e^{2\ell} \;,\; g_{22} = -r^2 \;,\; g_{33} = -r^3\sin^2\theta \;,\; g_{00} = e^{2n},$$

ورموز كريستوفل:

$$\left\{ {1 \atop 11} \right\} = \ell', \; \left\{ {1 \atop 33} \right\} = \left\{ {1 \atop 22} \right\} \cos^2\theta = -re^{2\ell}\cos^2\theta, \; \left\{ {1 \atop 00} \right\} = n'e^{2(R-l)}$$

$$(XII-157) \qquad \left\{ {2 \atop 33} \right\} = \sin\theta\cos\theta \;,\; \left\{ {2 \atop 12} \right\} = \left\{ {3 \atop 13} \right\} = \frac{1}{r} \;,$$

$$\left\{ {3 \atop 23} \right\} = -\mathrm{tg}\,\theta \;,\; \left\{ {0 \atop 10} \right\} = n'$$

وإذا أحللنا هذه النتيجة في المعادلات (XII-148) نجد أن المركِّبات غير المنعدمة تطابقيا لمركِّبات ريتشي تعطي المعادلات:

$$(XII-158)_1 \qquad G_{11} = -n'' + n'^2 + \ell'\left(\frac{2}{r} + n'\right) = 0$$

$$G_{22} = G_{33}/\cos^2\theta = 1 + re^{-2l}\left(\ell' \frac{1}{r} - n'\right) = 0 \qquad \text{(XII-158)}_2$$

$$G_{00} = e^{2(n-\ell)}\left(n'' + n'^2 - n'\left[\ell' - \frac{2}{r}\right]\right) = 0. \qquad \text{(XII-158)}_3$$

لنشكل المعادلة $(XII\text{-}158)_3 + (XII\text{-}158)_1$ $e^{2(n-\ell)}$ فنجد:

$\ell' + n' = 0$ أو:

$$\log \alpha\sigma = c^{te} \qquad \text{(XII-159)}$$

ومنها نستنتج أن:

$$\alpha\sigma = c^{te} = 1 \qquad \text{(XII-160)}$$

إذ إن العلاقات الحدية (XII-152) تفرض:

$\alpha\sigma \to 1$ إذا $r \to \infty$

لنضع إذاً:

$$l + n = 0. \qquad \text{(XII-161)}$$

في المعادلة $(XII\text{-}158)_2$ فيمكن أن نكتب معادلتين: الأولى هي:

$$e^{2n}(2rn' + 1) = k^2 \qquad \text{(XII-162)}$$

والثانية هي المعادلة المشتقة من هذه.

ولتأمين الشروط الحدّية (XII-159) (الصالحة إذا $n' = 0$) علينا أن نختار $k^2 = 1$. عندئذ نحل (XII-162) فنجد:

$$e^{2R}r = -\frac{2a}{c^2} \qquad \text{(XII-163)}$$

أي:

$$\sigma = 1 - \frac{2a}{c^2 r} = \frac{1}{\alpha} \qquad \text{(XII-164)}$$

حيث $\frac{a}{c^2}$ هي ثابت تكامل.

فتكون الصيغة الأساسية للفضاء الريماني حول جسم ساكن ذي تناظر كروي:

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{2a}{rc^2}} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) + \left(1 - \frac{2a}{rc^2}\right)c^2dt^2 \qquad \text{(XII-165)}$$

وإذا ابتعدنا عن الجسم $r \to \infty$ يتفق هذا الحل مع الشروط الحديـة (XII-152) أي أن الصيغة الأساسية تصبح إقليدية.

بـدلًا من استعمال الإحـداثيات القطبيـة الكرويـة (XII-150) يمكن أن نستعمل الإحداثيات r_1,θ,φ حيث:

$$r = \left(1 + \frac{a}{2r_1c^2}\right)^2 r_1 \tag{XII-166}$$

ومنها:

$$dr = \left(1 - \frac{a^2}{4r_1^2c^4}\right) dr_1 \quad , \quad \sigma = \frac{\left(1 - \frac{a}{2r_1}\right)^2}{\left(1 + \frac{a}{2r_1}\right)^2} \tag{XII-167}$$

مما يتيح كتابة الصيغة الأساسية (XII-165) كما يلي:

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{a}{2r_1c^2}\right)^4 (dr_1^2 + r_1^2\, d\theta^2 + r_1^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2) + \frac{\left(1 - \frac{a}{2r_1c^2}\right)^2}{\left(1 + \frac{a}{2r_1c^2}\right)^2}\, c^2\, dt^2. \tag{XII-168}$$

لنحدِّد الآن الإحداثيات:

$$x^1 = r_1 \sin\theta \cos\varphi \quad , \quad y^1 = r_1 \sin\theta \sin\varphi \quad , \quad z^1 = r_1 \cos\theta. \tag{XII-169}$$

المسماة الإحداثيات المتناحية isotropic. فتصبح الصيغة الأساسية (XII-168):

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{a}{2r_1c^2}\right)^4 \left[(dx^1)^2 + (dy^1)^2 + (dz^1)^2\right] + \frac{\left(1 - \frac{a}{2r_1c^2}\right)^2}{\left(1 + \frac{a}{2r_1c^2}\right)^2}\, c^2\, dt^2. \tag{XII-170}$$

إذا ابتعدنا عن الجسم يمكن أن نكتب الصيغة التقريبية إذا r_1 كبيرة:

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{2U}{c^2}\right)\left[(dx^1)^2 + (dy^1)^2 + (dz^1)^2\right] + \left(1 - \frac{2U}{c^2}\right) c^2\, dt^2 \tag{XII-171}$$

حيث وضعنا:

$$U = \frac{a}{r_1} \qquad \text{(XII-172)}$$

ولكن الصيغة (XII-171) ما هي إلا الصيغة (XII-83) التي حصلنا عليها في المقطع 4§ باستعمال طريقة تقريبية. في الصيغة (XII-83) تعني الدالّة U الكمون النيوتني:

$$U = \frac{K\, m'}{r} \qquad \text{(XII-173)}$$

فنستنتج إذاً أن:

$$a = KM'$$

ومن جهة ثانية إذا رجعنا إلى المعادلة (XII-164) نجد أن الثابت a يرتبط بخصائص الجسم الذي يكوِّن المجال الجاذبي فهي إذاً كتلته العطالية m'. نجد إذاً:

$$M' = \frac{K_1}{K}\, m' \qquad \text{أي:} \qquad a = K_1 m'$$

ويكتب قانون نيوتن بالصيغة:

$$F = -K\,\frac{M\,M'}{r^2} = -\frac{K_1^2}{K}\,\frac{m\,m'}{r^2} = -G\,\frac{m\,m'}{r^2}.$$

وإذا اخترنا $K_1 = K$ يمكن أن نكتب:

$$M' = m' \;,\; K_1 = K = G \;,\; a = GM' = Gm'$$

أي:

$$\sigma \simeq \frac{1}{\alpha} = 1 - \frac{2G_m}{c^2 r}. \qquad \text{(XII-174)}$$

ملاحظة: بدلاً من الحالة السكونية كان من الممكن أن نبحث عن الحلول ذات التناظر الكروي المتغيرة مع الوقت. فتصبح المركّبات $g_{\mu\nu}$ دوالّ في البعد r والوقت t وقد تبين أن هذا الحل يرجع حتماً إلى حلول المعادلات المتعلقة بالحالة السكونية[31].

---

(31) BIRKHOFF. Relativity and Modern Physics, Harvard University Press. 1923, p.253. – H.MINEUR. Bulletin de la Société Math. de France, 56, 1928, 50.

كان هذا العمل يرمي إلى دراسة مجال الجاذبية للنجوم الملتهبة المتغيرة مع الوقت. وهو مجال ذو تناظر كروي ولكنه متغير مع الوقت.

7) المجال بالقرب من جسيم مشحون ذي تناظر كروي

في هـذه الحـالـة يكـون لمعـادلات المجـال جـانب أيمن يمثـل مسـاهمـة المجـال الكهرمغنطيسي. لنفترض أن هذه المساهمة تتمثل خارج المادة بموتِّر ماكسويل $\tau_{\mu\nu}$.

$$\text{(XII-175)} \qquad T_{\mu\nu} = \tau_{\mu\nu} = -\varphi_{\mu\nu}\varphi^{\mu\rho} + \frac{1}{4}\, g_{\mu\nu}\varphi_{\rho\sigma}\varphi^{\rho\sigma}.$$

فتستبدل معادلات المجال (XII-148) بالمعادلات:

$$\text{(XII-176)} \qquad S_{\mu\nu} \equiv G_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, g_{\mu\nu}\, G = \chi T_{\mu\nu} = \chi\tau_{\mu\nu}.$$

وإذا ضربنا هذه المعادلات بـ $g^{\mu\nu}$ وجمعنا على كل المؤشرات نجد:

$$\text{(XII-177)} \qquad T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} \qquad \text{مع:} \qquad -G = \chi T$$

وإذا أحللنا هذه النتيجة في (XII-176) نجد:

$$\text{(XII-178)} \qquad G_{\mu\nu} = \chi\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, g_{\mu\nu}\, T\right).$$

ولكن نـلاحظ أن الكمية τ الثـابتة في التحـويل والمشكَّلـة بواسطـة مركَّبـات مـوتِّـر ماكسويل تنعدم بالتطابق أي:

$$\text{(XII-179)} \qquad \tau = g^{\mu\nu}\,\tau_{\mu\nu} = -\varphi_{\mu\rho}\varphi^{\mu\rho} + \frac{1}{4}\,\delta^{\mu}_{\mu}\,\varphi_{\rho\sigma}\,\varphi^{\rho\sigma} \equiv 0.$$

فتصبح معادلات الجاذبية خارج المادة وبوجود مجال كهرمغنطيسي

$$\text{(XII-180)} \qquad G_{\mu\nu} = \chi^{\tau\mu\nu}$$

لنحصر اهتمامنا بالحالات السكونية. إذا استعملنـا الإحداثيـات القطبية تكـون المركَّبة الوحيدة للمجال الكهربائي هي:

$$\text{(XII-181)} \qquad \varphi_{10} = \frac{e}{r^2}$$

وتكون المركبات $g_{\mu\nu}$ غير المنعدمة بالصيغة (XII-153)

فإذا أحللنا هذه النتيجة في المعادلة (XII-175) نجد:

$$(XII\text{-}182)_1 \qquad \tau_{11} = \frac{1}{4}\ g_{11}\,(2\varphi_{10}g^{11}g^{00}\varphi_{10}) - \varphi_{10}g^{00}\varphi_{10}$$

$$= -\frac{1}{2}\ g^{00}\varphi_{10}\varphi_{10} = -\ \frac{1}{2\,\sigma}\ \frac{e^2}{r^4}$$

$$(XII\text{-}182)_2 \qquad \tau_{22} = \frac{\tau_{33}}{\cos^2\theta} = \frac{1}{4}\ g_{22}\,(2\varphi_{10}g^{11}g^{00}\varphi_{10}) = \frac{1}{2\,\alpha\,\sigma}\ \frac{e^2}{r^4}$$

$$(XII\text{-}182)_3 \qquad \tau_{00} = \frac{1}{4}\ g_{00}\,(2\varphi_{10}g^{11}g^{00}\varphi_{10}) - \varphi_{01}g^{11}\varphi_{01}$$

$$= -\frac{1}{2}\ g^{11}\varphi_{01}\varphi_{01} = \frac{1}{2\,\alpha}\ \frac{e^2}{r^4}$$

وتنعدم مركّبات $\tau_{\mu\nu}$ الأخرى. فإذا أحللنا هذه المركّبات في الجانب الأيمن لمعادلات المجال (XII-180) نجد بحساب مشابه لحساب المقطع السابق الحل التالي[32]:

$$(XII\text{-}183) \qquad \beta = r^2\ \ ,\ \ \sigma = \frac{1}{\alpha} = 1 - \frac{2G_m}{c^2r} + \frac{\chi e^2}{2r^2}\ .$$

الثوابت e و m تميز الجسيم الذي يولّد مجال الجاذبية ويدخل في الحساب بطرق مختلفة تماماً: m هي ثابت تكامل تظهر مع حلول معادلات المجال ذاتها، أما e فتدخل من خلال موتّر ماكسويل وهي معطيات خارجية عن صيغة مجال الجاذبية ولكن وجودها يؤثر في مجال الجاذبية.

8) مسار جسيم غير مشحون بالقرب من جسم ذي تناظر كروي

يسير الجسيم غير المشحون في مجال الجاذبية على أحد الخطوط التقاصرية في الفضاء الريماني. ومعادلات هذه الخطوط هي:

$$(XII\text{-}184) \qquad \frac{d^2y^\rho}{ds^2} + \left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\} \frac{dy^\mu}{ds}\ \frac{dy^\nu}{ds} = 0.$$

وفي الحالة الخاصة لمجال الجاذبية يولّده جسم ذو تناظر كروي من المناسب استبدال رموز كريستوفل $\left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\}$ بقيمها المحسوبة بالنسبة للكمون:

(32) G.B. JEFFERY, Proc. Roy. Soc., 99 A, 123.
H. RASSNER, Ann. d. Phys., 50, 1916, 106.
H. WEYL, Ann. d. Phys., 54, 1917, 117; [27].

$$g_{00} = -\frac{1}{g_{11}} = \left(1 - \frac{2_m G}{c^2 r}\right), \quad g_{22} = \frac{g_{33}}{\sin^2\theta} = -r^2. \qquad \text{(XII-185)}$$

لنكتب أولاً المعادلة (XII-184) للمؤشر $\rho = 2$. فإذا وضعنا $y^1 = r$ و $y^2 = \theta$ و $y^3 = \varphi$ نجد:

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} + \frac{2}{r}\frac{dr}{ds}\frac{d\theta}{ds} - \cos\theta\sin\theta\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = 0. \qquad \text{(XII-184)}_2$$

فإذا اخترنا نظام الإحداثيات الكروية بحيث تكون الحركة الابتدائية في السطح المستوي $\theta = \frac{\pi}{2}$ تقود الشروط الابتدائية $\frac{d\theta}{ds} = 0$ و $\cos\theta = 0$ إلى $\frac{d^2\theta}{ds^2} = 0$. مما يعني أن الحركة تستمر في هذا السطح $\theta = \frac{\pi}{2}$.

وتكتب المعادلات (XII-184) للمؤشر $\rho = 3$ و $\rho = 0$ بالصيغ:

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} + \frac{2}{r}\frac{d\varphi}{ds}\frac{dr}{ds} = 0 \qquad \text{(XII/184)}_3$$

$$\frac{d^2t}{ds^2} + \frac{\sigma'}{\sigma}\frac{dr}{ds}\frac{dt}{ds} = 0, \quad \left(\sigma' = \frac{d\sigma}{ds}\right) \qquad \text{(XII-184)}_4$$

ويحسب تكامل هذه المعادلات فنجد:

$$r^2\frac{d\varphi}{ds} = \frac{h}{c}, \quad \frac{dt}{ds} = \frac{k}{\sigma c^2}, \qquad \text{(XII-186)}$$

حيث h و k ثابتا تكامل.

يمكن عندئذ حل المعادلة (XII-184) للمؤشر $\rho = 1$. ونحصل على النتيجة ذاتها إذا استعملنا الصيغة الأساسية (XII-165):

$$ds^2 = -\frac{1}{\sigma}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) + \sigma c^2 dt^2 \qquad \text{(XII-187)}$$

والغينا dt و ds من هذه الصيغة باستعمال (XII-186). فنجد هكذا:

$$\frac{1}{\sigma}\left(\frac{h}{r^2 c}\frac{\partial r}{\partial\varphi}\right)^2 + \frac{h^2}{c^2 r^2} - \frac{k}{\sigma c^2} = -1. \qquad \text{(XII-188)}$$

لنضع الآن:

$$\frac{1}{r} = u. \qquad \text{(XII-189)}$$

فنكتب (XII-188) بالصيغة التالية إذا أخذنا (XII-174) بالحسبان:

$$\left(\frac{\partial u^2}{\partial \varphi}\right) + u^2 = -\frac{c^2}{h^2}\left(1 - \frac{k^3}{c^4}\right) + \frac{2G_m}{h^2}u + \frac{2G_m}{c^2}u^3. \quad \text{(XII-190)}$$

وإذا حسبنا التفاضل بالنسبة إلى ρ وقابلنا مع (XII-188) نجد معادلات المسارات:

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{G_m}{h^2} + \frac{3Gmu^2}{G^2} \quad \text{(XII-191)}$$

$$r^2\frac{d\varphi}{ds} = \frac{h}{c}, \quad \text{(XII-192)}$$

أو استناداً إلى (XII-186) نجد:

$$t^2\frac{d\varphi}{dt} = \frac{h\sigma c}{k} = \frac{hc}{k}\left(1 - \frac{2G_m}{rc^2}\right). \quad \text{(XII-193)}$$

وتتفق هذه المعادلات مع حركة الأجرام السماوية لدرجة عالية من الدقة. ولكي تشكّل اثباتاً تجريبيا للنسبية العامة يجب أن تقود إلى توقعات مختلفة عن توقعات نظرية نيوتن فتفصل التجربة هكذا لصالح إحدى هاتين النظريتين.

في الميكانيك النيوتني تحدَّد مسارات جسيم الاختبار في مجال جاذبية جسم ساكن ذي تناظر كروي بالمعادلات:

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{G_m}{h^2} \quad \text{(XII-194)}$$

$$r^2\frac{d\varphi}{dt} = h. \quad \text{(XII-195)}$$

التي تختلف عن معادلات النسبية العامة (XII-191) و (XII-192) $\frac{3Gm}{c^2}u^2$ فإذا كانت سرعة جسيم الاختبار صغيرة بالنسبة إلى c يكون هذا الحد صغيراً جداً كي تستطيع التجربة الكشف عنه. إذ إن:

$$\frac{\frac{3Gmu^2}{c^2}}{\frac{G_m}{h^2}} = \frac{3h^2u^2}{c^2} = 3\left(r\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = 3\left(\frac{r}{c}\ \frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 \quad \text{(XII-196)}$$

فتكون عندئذ سرعة الجسيم $r\frac{d\varphi}{d\tau}$ صغيرة بالمقارنة مع سرعة الضوء c.

ولكن يمكن الكشف عن الحد الإضافي في الصيغة (XII-191) ببعض الحالات الخاصة التي سندرسها الآن.

9) مقارنة حل شفارتزشيلد مع التجربة

1.9 ـ تقدم نقطة رأس الكواكب

لقد رأينا أن من أهم التباينات بين توقعات الميكانيك النيوتني والتجربة يتعلق بحركة الكوكب عطارد إذ إن نقطة رأسه تتقدم بزاوية 43 ثانية من كل قرن. وتستخلص هذه من المعادلة النيوتنية (XII-194) ذات الحل:

$$u_0 = \frac{mG}{h^2}\left[\, 1 + A\cos(\varphi - \bar{\omega}\ )\right]. \qquad \text{(XII-197)}$$

حيث A و $\bar{\omega}$ ثابتا تكامل وترمز A إلى انحراف المسار عن المركز وترمز $\bar{\omega}$ إلى اتجاه نقطة الرأس.

لنكتب المعادلة الكلاسيكية لمسار إهليلجي بمحاور a و b مستعملين إحداثيات قطبية مركزها في إحدى البؤرتين:

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + e\cos\varphi}{a\,(1 - e^2)} = \frac{1}{p}\ (1 + e\cos\varphi) \qquad \text{(XII-198)}$$

حيث:

$$e = \frac{r_{max.} - r_{min.}}{r_{max.} + r_{min.}} \qquad \text{(XII-199)}$$

$$p = \frac{b^2}{a} = a\,(1 - e^2) \qquad \text{(XII-200)}$$

فإذا قابلنا الصيغ (XII-197) و (XII-198) نجد:

$$\frac{Gm}{h^2} = \frac{1}{p} \quad , \quad A = e \qquad \text{(XII-201)}$$

وتكتب الصيغة (XII-201) أيضا بالصيغة:

$$h^2 = (Gm)\,p = G\,ma\,(1 - e^2). \qquad \text{(XII-202)}$$

لنرجع الآن إلى معادلة الحركة (XII-191) المستخلصة من النسبية العامة، ولنحسب حلول هذه المعادلة بالتقاريب المتتالية وذلك بوضع الصيغة (XII-197) التي

هي حل تقريبي للمعادلة (XII-191) في الحد الذي يدخل في هذه المعادلة إضافة إلى المعادلة الكلاسيكية (XII-194) فنجد هكذا:

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u \simeq + \frac{6G^3m^2}{c^2h^4} \; e \cos(\varphi - \overline{\omega}). \qquad \text{(XII-203)}$$

الحدود الأخرى تعطي مساهمات صغيرة جداً ويمكن إهمالها. أما الحد $\cos(\varphi - \overline{\omega})$ في الصيغة (XII-203) فيدخل فيه التردد frequency الذاتي وقد يسبب ظواهر طنين resonance. وتقبل المعادلة (XII-203) الحل الخاص:

$$u_1 = \frac{G^3m^3}{c^2h^4} \; e\varphi \sin(\varphi - \overline{\omega}) \qquad \text{(XII-204)}$$

أما الحل بدرجة التقريب الثانية فنحصل عليه بجمع (XII-197) و (XII-204) فنجد:

$$u = u_0 + u_1 = \frac{mG}{h^2}\left[1 + e\cos(\varphi - \overline{\omega} = \delta\overline{\omega})\right] \qquad \text{(XII-205)}$$

حيث وضعنا:

$$\delta\overline{\omega} = \frac{3m^2G^2}{c^2h^2}\,\varphi. \qquad \text{(XII-206)}$$

بالمقارنة مع (XII-202) نستنتج أن:

$$\frac{\delta\overline{\omega}}{\varphi} = \frac{3m^2G^2}{c^2h^2} = \frac{3mG}{ac^2(1-e^2)}. \qquad \text{(XII-207)}$$

فيكون تقدم نقطة الرأس بعد دورة كاملة للكوكب (أي $\varphi = 2\pi$):

$$\delta\overline{\omega} = \frac{6\pi mG}{ac^2(1-e^2)}. \qquad \text{(XII-208)}$$

وفي الحالة الخاصة لمسار حول الشمس نجد:

$$m = 1.983 \times 10^{33}\ \text{gr}. \qquad \text{(XII-209)}$$

$$\frac{2mG}{c^2} = \frac{2 \times 1.983 \times 10^{33} \times 6.66 \times 10^{-8}}{9 \times 10^{20}} = 2.95 \times 10^5\text{cm}. \qquad \text{(XII-210)}$$

$$(\text{XII-211}) \qquad \delta\overline{\omega} = \frac{3\pi \times 2.95 \times 10^5}{a(1-e^2)} \ \text{rad}$$

$$= \frac{360 \times 3600}{2\pi} \cdot \frac{3\pi \times 2.95 \times 10^5}{a(1-e^2)} \ \text{seconds of angles}$$

$$= \frac{57.348 \times 10^{10}}{a(1-e^2)} \ \text{seconds of angles}$$

فإذا كانت T هي دورة الكوكب مقيسة بالأيام الأرضية يكون تقدم نقطة الرأس في قرن كامل:

$$(\text{XII-212}) \qquad d\,\Omega = \frac{100\, T_{earth}}{T_{planet}}\,\delta\overline{\omega} = \frac{36.252\,\delta\overline{\omega}}{T}$$

أي:

$$(\text{XII-213}) \qquad d\Omega = \frac{20946.357 \times 10^{12}}{a(1-e^2)\,T}$$

قد تكون قيمة التصحيح $\delta\overline{\omega}$ كبيرة للكواكب الصغيرة (إذ تكون a صغيرة) إذا كان انحراف مسارها عن المركز كبيراً. وانحراف المسار عن المركز كبير في حالة الكوكب عطارد ذي معطيات المسار التالية:

$$(\text{XII-214}) \qquad \begin{cases} a = 5.8 \times 10^{12}\ \text{cm} \\ e = 0.2056 \\ T = 87.97\ \text{days} \end{cases}$$

ومنها نستنتج أن:

$$(\text{XII-215}) \qquad a(1-e^2) = 5.555 \times 10^{12}$$

فإذا أحللنا هذه القيمة في الصيغة (XII-213) نجد القيمة التالية لتقدم نقطة رأس عطارد:

$$(\text{XII-216}) \qquad d\Omega = \frac{20 \times 946.36 \times 10^{12}}{5.55 \times 87.97 \times 10^{12}} = 42'',9.$$

ويتفق هذا التوقع تماماً مع التجربة.

2.9 ـ إنحراف الأشعة الضوئية في مجال الجاذبية

يبقى حل شفارتزشيلد مقبولاً في حالة انتشار الضوء في مجال الجاذبية لجسم ساكن ذي تناظر كروي بدلاً عن جسم اختيار كتلته m. فتكون مسارات الأشعة الضوئية أيضاً الخطوط التقاصرية ولكنها «بطول» منعدم. والشرط لذلك:

$$\text{(XII-217)} \qquad ds = 0$$

يقود ذلك استناداً إلى الصيغة (XII-192) إلى:

$$\text{(XII-218)} \qquad h \rightarrow \infty.$$

فتصبح معادلة مسارات الأشعة الضوئية استناداً إلى (XII-191) و (XII-218):

$$\text{(XII-219)} \qquad \frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{3Gmu^2}{c^2}$$

لنحسب حلول (XII-219) بالتقاريب المتتالية. حلّ هذه المعادلة دون جانب أيمن هو:

$$\text{(XII-220)} \qquad u_0 = \frac{\cos\varphi}{R},$$

حيث R هي ثابت تكامل. لنستبدل u بهذه الصيغة في الحد $1 \gg \frac{3Gmu^2}{c^2}$. فنجد لمعادلة الحركة هذه مع جانب أيمن الحل الخاص:

$$\text{(XII-221)} \qquad u_1 = \frac{G}{c^2}\,\frac{m}{R^2}\,(\cos^2\varphi + 2\sin^2\varphi).$$

ويكون حل المعادلة (XII-219) في التقريب الثاني بالصيغة:

$$\text{(XII-222)} \qquad u = u_0 + u_1 = \frac{\cos\varphi}{R} + \frac{G}{c^2}\,\frac{m}{R^2}\,(\cos^2\varphi + 2\sin^2\varphi),$$

$$\left(u = \frac{1}{r}\right).$$

وإذا استعملنا الإحداثيات الديكارتية $(x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi)$ نجد معادلة المسارات:

$$x = R - \frac{mG}{c^2R} \quad \frac{x^2 + 2y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \tag{XII-233}$$

ويعبِّر الحد الأخير من هذه المعادلة عن ابتعاد الشعاع الضـوئي عن الخط المستقيم $x = R$. وقيمة الزاوية α لهذا الانحناء هي:

$$\alpha = \frac{2mG}{c^2R} \quad \left(\frac{x^2 + 2y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)_{y \gg x} = \frac{4mGy}{c^2R} \tag{XII-225}$$

وهي ضعف القيمة التي نتوقعها باستعمال النظرية النيوتنية إذ نجد:

$$U = \frac{Gm}{r} . \qquad \text{:مع} \qquad \gamma = \text{grad } U \tag{XII-225}$$

فإذا كان الجسيم يتحرك على مسار متواز مع Oy على مسافة R من جسم كتلتـه m تكون معادلة الحركة:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = Gm \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) = - \frac{Gm}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} = - \frac{Gmx}{r^3} \tag{XII-226}$$

وإذا كانت سرعة الجسيم تساوي سرعة الضوء نجد:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 0 \quad , \quad \frac{dy}{dt} = c. \tag{XII-227}$$

فتكون قيمة التسارع إذاً $x = R$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = c^2 \frac{d^2x}{dy^2} = - \frac{GmR}{(R^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{XII-228}$$

أي تقريبا:

$$x = R - \frac{Gmy}{c^2R} . \tag{XII-229}$$

وتكون قيمة انحراف الأشعة الضوئية:

$$\alpha' = \frac{2mG}{c^2R} . \tag{XII-230}$$

ولقد قيس فعلاً انحراف الأشعة الضوئية في مجال جاذبي شديد وذلك بمراقبة النجوم الثابتة المتواجدة مثلاً في اتجاه قريب من اتجاه الشمس. ويمكن إجراء هذا القياس في حال كسوف الشمس إذ يكون ضوء الشمس خافتاً مما يتيح مشاهدة النجوم. تنحرف الأشعة القادمة من هذه النجوم عند مرورها في مجال جاذبية الشمس. فإذا كان ذلك صحيحاً يجب أن تشاهد هذه النجوم باتجاه مغاير قليلاً عن اتجاهها عندما لا تكون الشمس في هذا الاتجاه. وبعض النجوم التي تحجبها الشمس عادة تصبح مرئية بسبب تقوّس الأشعة الضوئية.

وقد جرت خلال كسوف عام 1919 مشاهدة نجوم في مجموعة النجوم القلاص Hyades القريبة ظاهرياً عندئذ من الشمس. وتتفق القيمة المقيسة لهذا الانحراف مع توقعات نظرية أينشتاين. ولكن القيمة المقيسة تقريبية في الواقع بسبب صغرها $(\alpha \simeq 1''75)$.

نشير أيضاً إلى النتائج التي حصل عليها كامبل Campbell وترمبلر Trumpler[33] اللذان وجدا:

$$\alpha_1 = 1''72 \pm 0''11 \quad , \quad \alpha_2 = 1''82 \pm 0''15. \qquad \text{(XII-231)}$$

بيد أن الظواهر المقيسة هي في حدود دقة التجربة.

ج ـ نتيجة أخرى للنسبية العامة: انزياح الطيف نحو الأحمر

تشكّل التجارب المتعلقة بتقدم نقطة رأس عطارد وانحراف الأشعة الضوئية قرب الأجسام اختباراً لحل شفارتزشيلد. أما انزياح الطيف نحو الأحمر رغم أنه يمكن تفسيره بالاستناد إلى بعض خصائص هذا الحل فهو لا يرتبط حتمياً بالمسارات قرب الأجسام التي تتوقعها النسبية العامة.

يجب أولاً التمييز بين الانزياح نحو الأحمر الذي ندرسه في هذا المقطع، والانزياح نحو الأحمر الذي اكتشفه هبل Hubble عام 1929 في طيف السديم Nebula خارج المجرات. فهذه الظاهرة التي يكون فيها الانزياح كبيراً تبقى صعبة الفهم. وهناك نظريتان لتفسيرها:

---

(33) W.W. CAMPBELL et R. TRUMPLER. Lick Obsérvatory Bull. 11, 1923, 41 et 13, 1928, 130.

M.W. OVENDEN. Sci. Progr. 40, 1952, 645.

S.A. MITCHELL. Eclipses of the Sun, 1951 (New-York, Columbia Univ. Press).

a ـ النظريات الكونية cosmological التي تعرض عدة نماذج للكون المتوسع.

b ـ نظريات «تعتُّق» Aging الضوء لدى مروره في الفضاء الكوني.

لن ندرس في هذا الكتاب ظاهرة هبل بل سنكتفي بدرس الانزياح نحو الأحمر في الأشعة الصادرة عن جسم موجود في مجال جاذبية جسم آخر ساكن وبتناظر كروي (كمجال الشمس مثلاً).

الذرات التي تكوِّن الحدود الغازيّة لنجمة ثابتة تشكِّل مصادر ضوئية في مجال جاذبية النجمة. ويمكن اعتبار هذه الذرات ساعات يقاس وقتها الذاتي بواسطة ارتجاجاتها. التردد الذاتي ν_0 لهذه الذرة هو عدد الارتجاجات في وحدة الوقت الذاتي.

$$\nu_0 = \frac{dN}{d\tau} \quad \text{مع:} \qquad ds^2 = c^2\, d\tau^2. \qquad \text{(XII-232)}$$

لنعتمد نظام إحداثيات تكون فيه النجمة الساكنة والسرعة الوسطية للذرة منعدمة والصيغة الأساسية في موقع الذرة:

$$ds^2 = g_{00} c^2\, dt^2. \qquad \text{(XII-233)}$$

المشاهد الثابت في هذا الهيكل الإسنادي يعتبر أن تردد الذرة هو:

$$\nu = \frac{dN}{dt} = \nu_0 \sqrt{g_{00}}. \qquad \text{(XII-234)}$$

ولكن الصيغة الأساسية قرب النجمة هي صيغة شفارتزشيلد ولا تحتوي في هذه الحالة إلّا على الحد المتناسب مع dt^2. واستناداً إلى الصيغة (XII-164) نجد:

$$g_{00} = \sigma = 1 - \frac{2m}{rc^2}\, G. \qquad \text{(XII-235)}$$

فإذا أحللنا هذه النتيجة في المعادلة (XII-234) نجد:

$$\nu = \sqrt{1 - \frac{2m}{rc^2}\, G}\, \nu_0 \simeq \nu_0 \left(1 - \frac{mG}{rc^2} \right) \qquad \text{(XII-236)}$$

وبالتالي:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_0} = - \frac{mG}{rc^2} \qquad \text{(XII-237)}$$

فالمشاهد الموجود على الأرض مثلاً يجد أن تردد الذرات على سطح الشمس يقل عن التردد الذاتي بالكمية $\Delta\nu$. فإذا كانت M و R ترمز إلى كتلة وشعاع الشمس نجد:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_0} = -\frac{MG}{c^2R}. \quad \text{(XII-238)}$$

ولكن التردد ν_0 هو تقريباً تردد إشعاع ذرة من ذات النوع على سطح الأرض. وذلك لأن المسافة بين النجمة إلى هذه الذرة الأرضية هي كبيرة إلى درجة يمكن فيها اعتبار $g_{00} = 1$ فيكون الفرق $\Delta\nu$ منعدماً. هكذا تبدو خطوط طيف ذرات النجوم زائحة نحو الأحمر إذا قورنت بخطوط طيف الذرات الأرضية من ذات النوع.

يكبر هذا الانزياح كلما اشتد المجال الجاذبي للنجمة. ففي حالة الشمس نجد:

$$M = 1.983 \times 10^{33}\ \text{gr.},\quad R = 6.95 \times 10^{10}\ \text{cm.} \quad \text{(XII-239)}$$

ومن ثم:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_0} = -2.10 \times 10^{-6}. \quad \text{(XII-240)}$$

وتكون هذه الظاهرة ثلاثين مرة أكبر للذرات على سطح النجم المسمى رفيق الشِّعرَى اليمانية Sirius ذي الكثافة القريبة من كثافة الماء. وتتفق القيم المقيسة في هذه الحالة مع توقعات النسبية العامة[34].

مع ذلك نشير إلى أن الإنزياح نحو الأحمر يفترض فقط الصيغة (XII-235) للكمون g_{00} أي:

$$g_{00} = 1 + U. \quad \text{(XII-241)}$$

وأن هذا الإنزياح يتفق تماماً مع أية نظرية تتوقع تغيُّراً في التردد بالصيغة (XII-236) وهذا هو حال النظريات الإقليدية للجاذبية (بيركهوف Birkhoff وموشينسكي Moshinsky[35]). فرغم أن هذا الإنزياح يمكن تفسيره باستعمال نتائج

---

(34) SAINT-JOHN.Astrophys.Journ. 1928, 67, 165.
ADAMS. Proc. Nat. Acad., 1925, 11, 383.
D.M. POPPER. Astrophys. Journ., 120, 1954, 316.
G.P. KUIPER.

(35) BIRKHOFF. Proc. Nat. Acad., 1943, 29, 231.

النسبية العامة فإنه لا يمكن اعتباره اثباتاً للتأويل الهندسي للجاذبية. إذ يمكن تفسيره أيضاً في نطاق كون مينكوفسكي ومبادىء النسبية الخاصة.

ونشير أيضاً أنه بالرغم من أن الظواهر الثلاث التي درسناها هنا تتفق تجريبياً مع توقعات النسبية العامة، فإن الظاهرتين الأخيرتين تبقيان على حدود دقة القياسات التجريبية.

يبقى أن السند الأقوى لنظرية النسبيّة التي تتفق معها التجارب دون أن تفرضها هو في تناسقها الداخلي وبساطة مبادئها والتعميم الطبيعي لمبدأ النسبية الذي تطرحه. إذ تقدم هذه النظرية التفسير الطبيعي الوحيد لتكافؤ الكتلة الجاذبية والكتلة العطالية. فهي المثل الرائع لنظرية حقيقية للمجالات، أي النظرية التي تكون فيها حركة المصادر جزءاً من قوانين المجال.

يبدو إذاً من المغري أن نحاول توسيع هذه النظرة الإندماجية لتشمل المجال الكهرمغنطيسي الذي يبقى بعيداً كل البعد عن الصياغة الهندسية. وبعد أن كانت النظرية الكهرمغنطيسية نموذجاً لصيغة مبدأ النسبية الخاصة تبقى رافضة الانصياع لفكرة النسبية العامة. إذ تبقى مساهمة المجال الماكسويلي بالموتِّر $\tau_{\mu\nu}$ خارجية عن النظرية النسبية العامة. وحركة الأجسام المشحونة تنتج عن قوى مستقلة تماماً عن المجال الجاذبي.

وعكس ذلك يمكن أن نتأمل أن الصياغة الهندسية لمجال معمَّم تتيح توسيع نتائج حركة الجسيمات غير المشحونة لتنطبق على حركة الجسيمات المشحونة: فتكون حركتها ناتجة عن توافق معادلات المجال. أخيراً قد تبدو هذه الأولية لمفهوم المجال كتمهيد لنظرية المجال البحت تستخلص فيها خصائص الجسيمات بكاملها من خصائص المجال. وتبقى هذه الطموحات الواسعة بعيدة كل البعد عن التحقيق حتى في النطاق الكلاسيكي. طبعاً تبقى مفاهيم النظريات الكمومية إلى درجة كبيرة خارج نطاق النسبية العامة. إذ إن تكميم المعادلات غير الخطية مثل معادلات مجال الجاذبية يطرح مسائل صعبة لم تتبين أيّة حلول أو تأويلات واضحة لها.

النظريات التوحيدية للكهرمغنطيسية والجاذبية
الصفات المميزة لنظرية المجال البحت

النظريات التوحيدية والنظريات غير الثنائية non dualist

نعني عادة بالنظرية التوحيدية تأويلاً مشابهاً (وغالباً هندسياً) للظواهر الكهرمغنطيسية والجاذبية. فتشكّل معادلات المجال التي تستخلص من هذه النظرية شروط بنية الفضاء غير الإقليدي.

وتطلق أيضاً صفة التوحيدية على النظرية التي تحاول دمج مفاهيم المجال والجسيم. مبدئياً ليس هناك قاسم مشترك بين هذين النوعين من المحاولات التوحيدية إلّا تشابه الاسم. بيد أن محاولات قد جرت لصياغة نظريات تجمع بين هذين النوعين من التوحيد: صياغة هندسية للمجال الكهرمغنطيسي والمجال الجاذبي ودمج خصائص الجسيمات بالمجال المعمَّم. حاليا ليس هناك نظرية مصاغة من هذا النوع حتى في النطاق الكلاسيكي البحت. ورغم عدم التوصل حتى الآن إلى صياغة نظرية حقيقية للمجال البحت يمكن أن نفكر أن نظرية توحيدية للمجال المعمَّم (الكهرمغنطيسي والجاذبي) قد تتيح استخلاص حركة النقط الشاذة (أي مصادر المجال) من معادلات المجال المعمَّم. فلا يبدو وجود هذه النقط الشاذة خارجياً عن المجال. بل إن حركة هذه النقط الشاذة تستخلص من الشروط التي يخضع لها المجال.

هناك إذاً قرابة بين هاتين العمليتين للدمج: تأويل موحّد للمجال وعدم التمييز بين المجال ومصادر المجال أو استخلاص حركة الجسيمات من الشروط المفروضة على المجال، (وهذا موضوع مختلف تماما).

لتحاشي أي التباس سنحتفظ بالتعبير «النظريات التوحيدية» لمحاولات دمج النظرية الكهرمغنطيسية بالجاذبية، وسنطلق على محاولات الدمج بين مصادر المجال والمجال ذاته اسم «النظريات غير الثنائية».

أ ـ النظريات التوحيدية

1) النظريات التوحيدية قبل النسبية العامة

يمكن أن نتساءل أولاً إلى أي مدى يجب إيجاد رابط بين الكهرمغنطيسية والجاذبية. فالشحن والكتل تتفاعل عن بعد حسب القانون $\frac{1}{r^2}$. رغم هذا الشبه الشكلي لم يكن بالإمكان صياغة نظرية توحيدية unified therory تلعب فيها الشِحنة q دوراً مشابهاً لدور الكتلة الجاذبية.

وقد جرت محاولة (فوبل ـ وين Föppl-Wien) لصياغة التفاعلات الجاذبية على نموذج التفاعلات الكهربائية عن بعد. وذلك بتحويل قوة الجاذبية إلى نوع من الموازنة بين التفاعلات وبين الشِحن بصياغة مشابهة لنظرية لورنتز في الالكترونات. ولكن تعارض إشارات القوى النيوتنية والكولونية (في حالة الشحن بإشارة واحدة) يقود إلى اختلافات كبيرة بين النظريتين مما يجعل دمج النظريتين مستحيلاً.

وبعد صياغة النسبية الخاصة أصبح من المُلح إيجاد صياغة توحيدية أو على الأقل التوصل إلى قانون للجاذبية يتفق مع النسبية الخاصة على نموذج البصريات.

فقد ربحت البصريات الجولة في صراعها مع الميكانيك الكلاسيكي (التقليدي) وأصبحت معادلات ماكسويل الثابتة في تحويل لورنتز نموذجاً للفيزياء النسبية. هكذا حلت النظريات النسبية للمجال محل نظريات التفاعل عن بعد التي هيمنت على كل الفيزياء في أوائل القرن التاسع عشر لتكون رائدة في الفيزياء. وبانقلاب الأدوار هذا أصبح على الجاذبية أن تتبع نموذج البصريات.

ولكن رغم المحاولات المبتكرة لم تَبْدُ أيَّة نظرية نسبية للجاذبية مقبولة. وبشكل خاص اصطدمت محاولات منكوفسكي ثم محاولات منكوفسكي وبوانكاريه بالتناقض بين المحافظة على الشِحن الكهربائية والكتلة المتغيِّرة مع السرعة. فقد انتهت إلى الفشل جميع المحاولات لصياغة نظريات توحيدية حتى عام 1916 وهو تاريخ صياغة النسبية العامة.

2) النسبية العامة وصياغة النظريات التوحيدية

لقد اقترح أينشتاين تأويلاً عميقاً وفريداً للظواهر الجاذبية عندما اقترح نظرية النسبية العامة. فأصبح قانون الجاذبية المعبَّر عنه بشروط بنية فضاء ريمان متفقاً مع نظرية النسبية. وتتيح هذه النظرية الجديدة إيجاد نظرية نيوتن في التقارب الأول، ومعالجة بعض التناقضات بين التجربة ونظرية نيوتن وأهمها تقدم نقطة رأس عطارد.

ولكن مسألة العلاقات مع الكهرمغنطيسية نقلت إلى ساحة أخرى. فالتأويل الهندسي للجاذبية يعزلها تماماً عن بقية الفيزياء وعن الكهرمغنطيسية بشكل خاص. فالنظرية التوحيدية لم تعد بتقريب ظواهر متباعدة نوعاً ما، بل بتوسيع الصياغة الهندسية للجاذبية كي تشمل الكهرمغنطيسية، وإلا وجب القبول بالصفة المميِّزة للظواهر الجاذبية وتدخلها بطريقة فريدة في تحديد حركة الجسيمات المشحونة.

3) تأويل المجال الكهرمغنطيسي والمجال الجاذبي حسب النظريات التوحيدية

بعد النسبية العامة أصبح الهدف لأكثر النظريات التوحيدية توسيع الصياغة الهندسية التي ظهر نجاحها في حال المجال الجاذبي لتشمل المجال الكهرمغنطيسي.

تصوغ النسبية العامة قوانين الجاذبية بعشرة شروط على بنية تقوُّس الفضاء الريماني الرباعي. إذ إن هذا التقوُّس هو المِيزة الوحيدة للفضاء الريماني. لكن هذه الإمكانية لتأويل قوانين الجاذبية كشروط بنية هندسيّة لا تترك مجالاً لمحاولات تأويل مشابهة للكهرمغنطيسية. وذلك لأن الإمكانيات التي تتركها البنية الريمانية لا تسمح بوجود شروط إضافية تتناسب مع معادلات ماكسويل. لاستخلاص الكهرمغنطيسية من البنية الهندسية يجب إذاً توسيع النطاق الريماني والرباعي للنسبية العامة. فيمكن عندئذ التحرك في اتجاهين مختلفين تماماً.

أ ـ النظريات الريمانية بأبعاد أكثر من أربعة

مع المحافظة على الصفة الريمانية للفضاء يمكن توسيع أبعاده ليصبح خمسة أو ستة أبعاد. نشير في هذا النطاق إلى محاولات كالوزا Kaluza[1] عام 1921 ونظرية

(1) KALUZA. Sitzungsber. d. Preuss. Akad. d. Wiss., 1921, p.966.

أينشتاين ـ ماير Einstein-Mayer[2] عام 1931 والنظريات الإسقاطية projective[3]، ونذكر أيضا النظريات الأحدث بخمس عشرة متغيِّرة للمجال (جوردان Jordan[4] وتيري Thiry[5] ونظرية بودولانسكي Podolanski[6] بستة أبعاد). ويظهر الدور المساعد، للفضاء ذي الأبعاد الخمسة في النظريات الإسقاطية. ودمج الكهرمغنطيسية والجاذبية لا يتخذ معنىً فيزيائياً حقيقياً إلّا في هذا الفضاء الخماسي المساعد والذي ليس هو الفضاء الفيزيائي ذاته. ومن المفيد في هذا الصدد مقابلة هذا التأويل بالتأويل الذي تفترضه مثلاً نظرية أينشتاين ـ برغمان ـ بارغمان Einstein - Bergmann - Bargmann[7] أو نظرية بودولانسكي المذكورة أعلاه. إذ إن هذه النظرية تحاول تأويل الفضاء الخماسي أو السداسي كفضاء فيزيائي حقيقي ولكن بتركيب خاص. فالفضاء الخماسي الذي تقترحه نظرية أينشتاين ـ برغمان ـ بـارغمان ينغلق على نفسه في الإتجاه الخامس. وفضاء بودولانسكي السداسي هو بشكل طبقات بحيث تكون نقط طبقة معينة هي نقط الفضاء الرباعي للزمان والمكان. تبقى هذه المحاولات أمينة على روحية النسبية العامة إذ تحاول إدخال فضاء ريماني لا يستعمل فقط صياغة توحيدية مقبولة بل يشكل فضاءً فيزيائياً حقيقياً.

وتتميز النظريات الخماسية باستطاعتها تأويل مسارات الجسيمات المشحونة كفصائل من الخطوط التقاصرية. كل فصيلة منها تناسب قيمة $\frac{e}{m}$. وما هذه إلّا تعميم للنتائج التي حصلت عليها النسبية العامة في حالة الجسيمات غير المشحونة.

غير أن عدداً كبيراً من الفيزيائيين يعتبر هذه المحاولات اصطناعية. فنجاح صياغة مناسبة للفضاء الخماسي يُقنِّع فقط التقصير في إيجاد تطوير مناسب في الفضاء الرباعي الذي يبقى وحده الفضاء الفيزيائي الحقيقي. فالصياغة الاسطوانية (التي تعتبر كل كمية فيزيائية دالّة بأربع إحداثيات وليس خمساً) تبقى نقطة الضعف في الصياغات الخماسية. إذ إنها تحدّ من تغاير covariance المعادلات لأن الإحداثية x^5 تلعب دوراً خاصاً. فتقود إلى استحالة تحقيق الإندماج التوحيدي الكامل كما فعلت

(2) EINSTEIN-MAYER. Berl. Ber., 1931, p.541; 1932, p.130.

(3) O. VEBLEN. Projective Relativitatstheorie, Berlin, 1933.
W. PAULI. Ann. d. Phys., 18, 1933, 305.

(4) JORDAN Ann. Phys., 1947, p.219.

(5) Y. R. THIRY. C.R. Ac. Sc., 226, 1948, 216 et 1881; Thèse, Paris (1950).

(6) PODOLANSKI. Proc. Roy. Soc., 201, 1950, 234.

(7) A. EINSTEIN, V. BARGMANN, P.G. BERGMANN. Theodore von Kármán Anniversary volume. Pasadena, 1941, p.212.

النظرية الكهرمغنطيسية مثلاً بدمج المجالين الكهربائي والمغنطيسي.

ب ـ النظريات الرباعية غير الريمانية

خلافاً لذلك يمكن الإحتفاظ برباعية الفضاء الفيزيائي، ولكن مقابل ذلك يجب التخلي عن الصفة الريمانية لهذا الفضاء، وذلك لاستيعاب شروط هندسية جديدة. فيصبح هكذا تركيب الفضاء أكثر تعقيداً.

التشكيلات الهندسية ذات الارتباط التآلفي يمكن أن تحتوي بشكل عام على فتل torison ونوعين من التقوُّس:

α ـ التقوُّس الريماني العادي أي «تقوس الدوران» المحدد برموز ريمان ـ كريستوفل Reimann-Christoffel:

$$\Omega\rho_{\mu} = R^{\rho}{}_{\mu\nu\sigma} \ [dy^{\nu} \ \delta y^{\sigma}]$$

β ـ تقوُّس «تشابه الوضع» Homothetic المحدَّد بالثابت في التحويل:

$$\Omega = \Omega^{\mu}_{\mu} = R^{\mu}_{\mu\nu\sigma} \ [dy^{\nu}\delta y^{\sigma}]$$

γ ـ أخيراً يرتبط الفتل الذي أدخله كارتان Cartan بصفة اللاتناظر في مُعامل الارتباط التآلفي $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$ التي تعمِّم رموز كريستوفل $\left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\}$.

$$\Omega^{\rho} = \Gamma^{\rho}_{\mu\nu} \ [dy^{\mu}\delta y^{\nu}]$$

في الواقع لم يلاحظ أكثر العاملين في هذا الموضوع مجموعة عناصر بنية الفضاء (أي الفتل والتقوُّسات) التي يمكن أن يستعملوها. لذلك استمرت النظريات التوحيدية مدة طويلة تبدو نظريات كيفية، يمكن دائماً إجراء تعديلات عليها.

في الواقع ان الإمكانيات التي يمكن أن تطمح النظريات التوحيدية إليها في نطاق التشكيلات الهندسية ذات الارتباط التآلفي تنحصر في إمكانية استعمال عناصر البنية الهندسية الثلاثة (الفتل والتقوُّسين). فهناك نظريات بدون فتل ولكن بتقوسين مثل نظرية ويل Weyl[8] ونظريات يدخل فيها فتل دون تقوُّسات مثل نظرية أينشتاين[9] عام

(8) H. WEYL. Sitzungsberichte d. Preuss Akad d. Wiss., 1918, 465; Ann. d. Phys., 59, 1919, 101; [27] Chap. XI.

(9) A. EINSTEIN, Théorie unitaire du champ physique, Ann. Inst., Il. Poincaré. 1931.

1929. أخيراً يمكن طرح نظريات بأي ارتباط تآلفي مع فتل وتقوُّسين. وقد أتاحت هذه الإمكانية لأينشتاين أن يطور نظرية توحيدية. عامة تشكل الإمتداد الطبيعي لنظرية الجاذبية[10].

4) النظريات التوحيدية الكلاسيكية وامكانية توقعات جديدة

لا يمكن إنكار الفائدة المنهجية للنظريات التوحيدية في النطاق الكلاسيكي. فهي تتيح عملية دمج هندسي واسع يقود طبيعياً إلى معادلات الجاذبية والكهرمغنطيسية. ولكن يؤخذ على هذه النظريات الإكتفاء بهذا الدمج دون محاولة إيجاد توقعات مبتكرة خاصة بها. فرغم أنه من المفيد أن نشرك معادلات ماكسويل في صياغة أينشتاين للنسبية العامة، فقد يكون مخيباً للأمل أن لا نستطيع الذهاب أبعد من ذلك. ومن الطبيعي أن نفكر أن عملية مهمة مثل دمج الكهرمغنطيسية والجاذبية يجب أن تقود إلى توسعات نظرية جديدة. للأسف ظهرت النظريات التوحيدية أغلب الأحيان رافضة لأي شيء يتعدى المنهجية البحتة.

أما النظريات ذات المركّبات الخمس عشرة للمجال ونظرية أينشتاين ـ شرودنغر الحديثة فإنها تحاول أن تتحاشى هذا المأخذ. بتخليها عن الدمج البسيط بين نظريتين كاملتي الصياغة تخلص هذه النظريات إلى قوانين تشكل قوانين أينشتاين وماكسويل الصيغة التقاربية الأولى لها.

نستطيع مثلاً تأويل نتائج النظرية لخمس عشرة متغيِّرة للمجال بالافتراض أن معامل الجاذبية χ ليس ثابتاً[11] أو أن هناك استقطاباً للفراغ[12] أو أنه من المفيد ادخال فضاء مطابق conformal[13]. وتستخلص من معادلات المجال في هذه النظرية معادلات الحركة للجسيمات المشحونة. ويمكن تحديد هذه الحركة بالدقة التي نتوخاها بطريقة التقاريب المتتالية.

ومن جهة ثانية تقود نظرية أينشتاين ـ شرودنغر إلى معادلات كهرمغنطيسية غير خطية وتدخل فيها حدود ناتجة عن الجاذبية. فيكون هناك ترابط وثيق بين

---

(10) A. EINSTEIN. The Meaning of Relativity (Appendix II).
M.A. TONNELAT. La Théorie du champ unifié d'Einstein, GAUTHIER-VILLARS 1955.

(11) Y. THIRY. Thèse, Paris 1950.

(12) A. LICHNEROWICZ. [25], p.201.

(13) F. HENNEQUIN. Thèse, Paris, 1955.

الكهرمغنطيسية والجاذبية. وتتيح أخيراً هذه النظرية تحاشي بعض الصعوبات التي تعترض الكهرمغنطيسية الخطية.

عملياً يمكن أن تقود هذه النظريات إلى توقعات يمكن مقارنتها بالتجربة إذا كانت الظواهر المتوقعة في نطاق الإمكانيات التجريبية المتاحة. لننظر مثلاً في تغيُّرات معامل الجاذبية χ المرتبطة بالنسبة $\frac{e}{m}$ في بعض تأويلات النظريات بخمس عشرة متغيِّرة للمجال. قد يظهر هذا التوقع متفقاً مع وجود مغنطيس الدوران أي تكوين مجال مغنطيسي بدوران الأجسام غير المشحونة $(\mu \neq 0, \rho = 0)$. وما هذه إلاّ ظاهرة بلاكت Blackett التي اقترحت لها صيغة تجريبية empirical. للأسف يبدو أن مغنطيس الدوران هذا، إذا كان موجوداً فعلاً، له تأثيرات أقل بكثير مما تتوقعه قاعدة بلاكت. إن أي اختفاء أو تحوير في هذه الظاهرة لا يؤكد (ولا ينفي طبعاً) تأويلات نظرية جوردان ـ تيري Jordan-Thiry.

وكذلك هو حال التأثيرات بين المجال الجاذبي والمجال الكهرمغنطيسي التي تتوقعها نظرية أينشتاين ـ شرودنغر. فوجود تيار يرجع فقط إلى تقويس الفضاء يبقى أبعد من أن تكشفه التجربة. والظواهر المميِّزة التي تتوقعها هذه النظرية التوحيدية صغيرة إلى درجة أنه لا يمكن اعتمادها كاختبار تجريبي للنظرية، أو كدليل على التأويل الفيزيائي للكميّات الهندسية المنبثقة عن النظرية ذاتها. وتعود هذه الصعوبات إلى الضعف في الوسائل التجريبية في مجالات هذه النظريات.

5) النظريات التوحيدية والنظريات الكمومية

يشكل وجود النظريات الكمومية الحاجز الأكثر صعوبة لصياغة النظريات التوحيدية. فقد بقيت حتى الآن كل محاولات التوحيد بين مجال الجاذبية والمجال الكهرمغنطيسي المكمَّم في مرحلة ما قبل الولادة. ويمكن أن نتساءل أيضاً هل أن مجال الجاذبية ذاته يمكن تكميمه، وهل من المناسب أن نحاول تكميمه. وتتنوع محاولات تكميم مجال الجاذبية تبعاً للصياغة الكلاسيكية المستعملة كأساس لهذا التكميم.

1.5 ـ النظريات الخطيّة

تفترض هذه النظريات أن ظواهر الجاذبية تخضع بدقة لمعادلات خطيّة. ويمكن استخلاص هذه المعادلات من التقريب شبه الغاليلي لقانون أينشتاين. ولكن هذه في الواقع طريقة استكشافية heuristic لا ترتبط مبدئياً بأي تأويل غير إقليدي دقيق.

ويمكن أيضاً أن نستخلص المعادلات الخطيَّة للجاذبية من معادلات المجال لجسيم ذي دومة 2 أو من معادلات الموجة لهذا الجسيم.

في هذه الحالات يصبح من الأسهل تصور تقريب بين هذه المعادلات الخطية وبين المعادلات الكهرمغنطيسية التي هي أيضاً خطيّة. ومن جهة ثانية ليس هناك مبدئياً صعوبات تعترض تكميم المعادلات الخطية للجاذبية لأن ذلك التكميم يستعمل تكافؤ التغيير في فضاء مينكوفسكي أي فقط في تحويلات لورنتز.

ولكن للأسف عند تجريد هذه المعادلات من التأويل الهندسي الذي هو محور النسبية العامة تصبح كيفية إلى درجة كبيرة. فهي تتيح سهولة خادعة لأنها لا تستند إلى بداهة ولا إلى التجربة. عكس ذلك إن مجرد عدم وجود موجات الجاذبية يبدو أنه يبعد نظرية الجاذبية عن أيّة صياغة خطية واضحة.

2.5 ـ النظريات غير الخطية

تفترض هذه النظريات أن مجال الجاذبية يخضع للمعادلات التفاضلية المنبثقة عن نظرية أينشتاين. ولكنها تستغل نتائج النسبية العامة بطريقة مختلفة.

فإما أن تفترض هذه النظريات أن معادلات أينشتاين تشكل صياغة مقبولة ولكنها يجب أن تعتبر في فضاء إقليدي تماماً، ويكفي لذلك افتراض تكافؤ تغيير تحويلات لورنتز فقط[14]. وإما أن تعطي هذه النظريات للمعادلات غير الخطية التأويل غير الإقليدي الذي اقترحه أينشتاين. يجب عندئذ قبول تكافؤ التغيير العام لهذه المعادلات في أي تحويل للإحداثيات. في هذه الحالة الأخيرة تعترض طريقة التكميم صعوبات عديدة. يظهر حالياً إذاً أنه لا يمكن الحصول على قوانين مكمَّمة للجاذبية بطريقة واضحة.

حتى إذا افترضنا أن تكميم مجال الجاذبية هدف مرجوّ دون قيود، فإننا لم نصل بعد إليه بطريقة مرضية. إما أن ينطبق هذا التكميم على معادلات خطية اصطناعية إلى درجة كبيرة، أو أنه يصطدم بصعوبات تجعله كيفياً. ومن جهة ثانية يظهر أن تكميم المجالات الأخرى محتم مما يدعونا إلى الاعتقاد أن صياغة النظريات التوحيدية هدف طبيعي ما دمنا في النطاق الكلاسيكي. ومن نواح كثيرة يمكن أن يكون هذا الهدف مصدر تقدم إذ إنه قد ينجب صياغة غير خطية للنظرية الكهرمغنطيسية مع الفوائد

---

(14) ارجع مثلاً إلى
GUPTA, Quantification du champ de gravitation d'Einstein. Approximation linéaire, Proc. Phys. Soc., 65 n°3, 1952, p.161.

(وأيضاً العقبات) المرتبطة بهذه الصياغة غير الخطية. فقد يعطي تأويلاً أكثر اقناعاً لحركة المصادر، وقد يكشف عن ارتباط بين المجالات. أخيراً قد يزيل الاعتباطية في صياغة النسبية العامة المتعلقة باختيار الموتّر $T_{\mu\nu}$. فهو إذاً التوسع الطبيعي لنظريات المجال ويتطلب فقط مقارنتها مع التجربة.

أما في مجال التكميم فيبدو أن صياغة النظريات التوحيدية أو حتى نظرية الجاذبية وحدها لم تتحقق حتى الآن بطريقة مرضية. وقد لا تتحقق أبداً أو قد يكون هذا الهدف بدون معنى.

لقد ظهر في السنوات الأخيرة أن النظرية الكمومية للمجالات قد حققت بعض طموحات الفيزياء النظرية. فقد نجحت بأن تتفق مع التجربة بشكل رائع. ولا شك في أن نجاح نظرية فيزيائية يقاس بمقدرتها على التوقع. إن وجود نظريات استنتاجية ومنبثقة عن مبدأ هندسي بسيط وقابل للتوسعات المنطقية هو طريق صعب ولكنه جذاب. لذلك نأمل أن تكون النظريات التوحيدية قادرة على صياغة توقعات جديدة يمكن مقابلتها مع التجربة، وأن تنجح الكهرباء التحريكية الكمومية بإيجاد تنسيق أوثق بين هذه التوسعات. وقد يكون هذا مبدأ التقريب الحقيقي الذي لا يمكن وليس من المعقول أن نشرع به بطريقة منهجية. ولكنه يبقى لا غنى عنه لاستكمال نظريات المجال.

ب ـ النظريات غير الثنائية

6) المجال ومصادره

تبقى العلاقة بين المجال ومصادره، كما كانت دائماً، إحدى أصعب المسائل التي على الكهرباء التحريكية حلها في النطاق الكلاسيكي كما في النطاق الكمومي. إذا أردنا تبسيط المسألة إلى أقصى حدود نقول إن فكرة المصادر النقطية تصطدم بالصعوبات المعروفة للطاقة الذاتية اللامتناهية. ولكن مفهوم المصادر الكبيرة يخالف متطلبات النسبية وتلازمه فرضيات كيفية في أغلب الأحيان. بين النظريات العديدة التي صيغت حول هذا الموضع نستطيع أن نميز بين النظريات الثنائية والنظريات غير الثنائية.

أ ـ النظريات الثنائية تفترض أن الجسيمات التي هي مصادر المجال تبقى مع خصائصها المميِّزة مثل الكتلة والشِحنة الكهربائية مستقلة عن المجال ذاته. في هذا السياق نذكر مثلاً الأبحاث التي تتحاشى صعوبات الطاقة اللامتناهية بإدخال مجالين يعوض الواحد عن الآخر. وقد طوِّرت نظريات مبنية على أسس مختلفة منذ ذلك الحين

وتشكِّل حالياً الكهرباء التحريكية الكلاسيكية.

ب ـ عكس ذلك تفترض النظريات غير الثنائية أن المصدر والمجال ليسا مستقلين الواحد عن الآخر.

لنتحاشَ فرضيات البنية structure كما في النظريات القديمة للإلكترون التي لا تصلح للصياغة النسبية. لقد صيغت نظريات تدخل فيها أوقات متعدِّدة أو نظريات غير خطية. وقد ظهر أن النظريات من كلا النوعين غير صالحة للتكميم.

لقد تطرقنا مثلاً في الفصل التاسع إلى مبادىء نظرية مي Mie ونظرية بورن وانفلد. هذه الأخيرة تستند إلى وجود علاقات غير خطيّة بين المجال والتحريض الكهرمغنطيسي. وهذه اللاخطِّيّة تتيح تحديد مجال كهرمغنطيسي متناه في كل نقطة من الفضاء حتى في موقع الجسيم النقطي بدلاً من المجال الماكسويلي اللامتناهي في موقع الجسيم النقطي.

ويتيح هذا تحديد كميات مميزة للجسيم مثل شحنته وربما كتلته تبعاً للكميات المميِّزة للمجال، وكذلك كثافات الشِحنة والتيار والكتلة. هذا الدمج ممكن ما دام المجال الكهربائي (الذي يميز الشحنة) يبقى متناهياً في موقع الشِحنة، وهذه الخاصية ناتجة عن لا خطِّية المعادلات في هذه النظرية.

بطبيعة الحال نظرية بورن هي نظرية كهرمغنطيسية وإقليدية بحتة، وليس لها أيّة علاقة مباشرة مع النظريات التوحيدية.

7) اللاخطية ومميزات نظرية المجال البحت

هناك مِيزة مشتركة لإلكترونية بورن ونظريات الجاذبية هي اللاخطية. واستناداً إلى نتائج النسبية العامة هذه اللاخطية شرط ضروري ولكنه غير كافٍ[15] لاستنتاج حركة النقط الشاذة من معادلات المجال.

1.7 ـ استخلاص معادلات الحركة

تبنى الكهرباء التحريكية الكلاسيكية على معادلات ماكسويل التي هي معادلات

(15) يجب أن تخضع أيضاً معادلات المجال إلى أربع معادلات تطابقية على الأقل. وهذا ليس صحيحاً في حالة الكهرباء التحريكية (حتى الكهرباء التحريكية غير الخطية) انظر الصفحة 241 من المرجع Berg-mann [9].

تفاضلية جزئية من الرتبة الأولى. وهي معادلات خطِّيَّة (أي لا يدخل فيها جداء دوالّ المجال أو مشتقاتها). فيكون حاصل جمع أو طرح حلين لهذه المعادلات حلاً أيضاً لهذه المعادلات. إذا كوَّن جسيمان مجالين كهرمغنطيسيين عندما يكون كل منهما منفرداً يكون كل من هذين المجالين حلاً لمعادلات ماكسويل. وإذا كان الجسيمان مجتمعين يكوّنان معاً مجالاً كهرمغنطيسياً يساوي مجموع المجالين. وهذا المجموع هو أيضاً حل لمعادلات ماكسويل. في هذه الحالة يستحيل أن نستخلص من معادلات ماكسويل شرطاً إضافياً لتمييز تفاعل الشحنتين أي قانون كولون. لإيجاد هذا الشرط الإضافي يجب أن يكون المجال الإجمالي للجسمين مجتمعين حلاً لمعادلات المجال في حالة توفر هذا الشرط وفقط في هذه الحالة. وهذا الشرط المفروض على معادلات المجال ذاتها يشكل بالضبط معادلات الحركة للجسيمين. ولكن إذا كانت معادلات المجال خطِّيَّة فإن هذا الشرط ليس ضرورياً لأن مجموع المجالات الجزئية هو دائماً حل مناسب لمعادلات المجال.

هذا الشرط الإضافي لا يمكن إذاً استخلاصه من معادلات المجال بل يجب فرضه مستقلاً عن هذه المعادلات: ويشكِّل هذا الشرط صيغة قوة لورنتز.

أما إذا كانت معادلات المجال غير خطِّيَّة لا يكون مجموع مجالين يشكِّلان حلين لهذه المعادلات حلاً لهذه المعادلات أيضاً. فالمجال الإجمالي لجسيمين ليس حلاً إلاّ إذا توفرت بعض شروط الإنسجام. هذه الشروط يمكن عند الاقتضاء أن تشكل معادلات الحركة لهذين الجسيمين. فتكون حركة الجسيمين محدَّدة بمعادلات المجال ذاتها: وهذه الحركة هي تماماً ما يجعل شروط الإنسجام محققة.

ومعادلات الجاذبية التي يقترحها أينشتاين ليست خطية. الجانب الأيسر من المعادلات $S_{\mu\nu}$ هو دالّة في المشتقات الثانية لكمون الجاذبية $g_{\rho\sigma}$ وجداء المشتقات الأولى $S_{\mu\nu}(\partial_\lambda^2 g_{\rho\sigma}, \partial_\lambda g_{\rho\sigma}, g_{\rho\sigma})$. أما الجانب الأيمن $T_{\mu\nu}$ فيمثل مساهمة المادة التي تكوِّن مجال الجاذبية. يمكن إذاً أن نستخلص معادلات الحركة (أي في التقريب الأول قانون نيوتن) من قانون مجال الجاذبية. لذلك يمكن اعتبار النسبية العامة نظرية للمجال أكثر كمالاً من الكهرباء التحريكية.

2.7 ـ دمج مصادر المجال بالمجال ذاته

في المحاولات الأخيرة لأينشتاين كانت الجسيمات تندمج في بنية المجال ذاته إذ «يمكن أن نعتبر المادة كمناطق من الفضاء حيث المجال شديد جداً... فالحجر الذي يسقط هو في هذه النظرة مجال متغيِّر تسقط فيه المنطقة ذات شدة المجال الأكبر

بسرعة الحجر. في هذه الفيزياء الجديدة ليس هناك مكان للمادة والمجال بالوقت ذاته لأن المجال هو الحقيقة الوحيدة».

وفعلاً يحاول أينشتاين أن يستخلص مساهمة المادة (أي الجانب الأيسر $T_{\mu\nu}$ في معادلات المجال) من المساهمة الهندسية البحتة (الجانب الأيمن أي $S_{\mu\nu}$) للمجال المعمَّم. لذلك يجب طبعاً أن يحتوي الموتِّر $S_{\mu\nu}$ المساهمة المحتملة للمجال الكهرمغنطيسي. هكذا تبدو النظرية غير الثنائية الكاملة في منظار النسبية العامة (أي اندماج المصادر بالمجال) حتماً نظرية توحيدية (لمجال الجاذبية في المجال الكهرمغنطيسي).

يبدو إذاً أن النظرية التوحيدية في الفيزياء لا تكون بانسجام داخلي إلّا إذا كانت توحيدية مضاعفة وذلك:

أ ـ بدمج المجال الكهرمغنطيسي ومجال الجاذبية بحيث تشتمل على الكهرباء التحريكية الكلاسيكية.

ب ـ بدمج المجال المعمَّم هذا بالجسيمات فتكون حركة الجسيمات مستخلصة من معادلات المجال.

«إن النظرية المنسجمة للمجال، يقول أينشتاين، تفرض أن تكون جميع عناصرها متواصلة... ومن هنا نستخلص أن الجسيم ليس له مكان كمفهوم أساسي في نظرية المجال. لهذا السبب لا يمكن اعتبار نظرية ماكسويل كاملة بالإضافة إلى كون هذه النظرية لا تشمل الجاذبية.

ج ـ النظريات التوحيدية وغير الثنائية

لنقارن نتائج نظرية أينشتاين بنتائج الكهرباء التحريكية عند بورن ـ انفلد مثلاً.

ففي النظريتين نحاول أن ندمج مصادر المجال بالمجال ذاته. فهما نظريتان غير ثنائيتين. وفي النظريتين نستعمل معادلات غير خطية. وهذه المعادلات غير الخطية شرط أساسي للحصول على معادلات الحركة. ولكنها لا تشكل شرطاً كافيًا لتحقيق هذا الهدف. فنظرية بورن ـ انفلد مثلاً إذا تركت إلى وسائلها الذاتية لا تقود إلى قانون كولون. وعكس ذلك نستطيع أن نحصل على معادلات حركة الجسيمات المشحونة إذا كانت معادلات مجال الجاذبية تحتوي في جانبها الأيمن مساهمة المجال الكهرمغنطيسي. نستطيع إذاً أن نسير باتجاه تطوير منسجم لنظرية المجال البحت باعتماد نظرية توحيدية من نوع نظرية أينشتاين ـ شرودنغر.

فهذه النظرية هي غير ثنائية وغير خطيّة مثل نظرية بورن. ولكنها إضافة إلى ذلك تقود إلى تأويل توحيدي (للمجال الكهرمغنطيسي ومجال الجاذبية) بينما نظرية بورن ـ انفلد لا تعني إلّا الكهرباء التحريكية. ومن جهة ثانية يتيح التأويل الهندسي، الذي هو في أساس هذه النظرية، إعطاء هذه النظرية تعليلاً حدسيًا intuitive وأيضاً تحاشي الاعتباطية التي تدخل في التحديدات الجديدة لدالّة الفعل ولموتّر الطاقة المعمَّم.

ومن الطبيعي أن تكون الصعوبات متعدِّدة في تأويل نظرية مزدوجة التوحيد (أي توحيدية وغير ثنائية). ونظرية أينشتاين ـ شرودنغر تعطي أمثلة متعدِّدة عن هذه الصعوبات التي ربما بقيت مستعصية. ولكنها تشير إلى السبيل الذي قد يقود إلى نتائج مهمة إذا أدخلت عليها تعديلات.

هذا البحث عن التوحيد من خلال النظريات الكلاسيكية للمجال لا يؤكد تعلُّق أينشتاين بشكل محدّد للنظرية. ولا يفسِّر «كتمسك وثيق بالنظرية الكلاسيكية». وفعلاً يتساءل أينشتاين عن ماهية النظرية الكلاسيكية. فنظرية نيوتن كانت تستعمل مفاهيم القوى التي استبدلت بالمجال المتواصل في نظرية هرتز وماكسويل التي كانت كلاسيكية أيضاً ولكن بطريقة أخرى. والنسبية العامة تعرض علينا صيغة مختلفة تقود إلى نظرية المجال البحت دون أن يكون نجاحها كاملاً. بيد أن النظرية الكلاسيكية موجودة كما يقول أينشتاين ولكنها «موجودة كمنهاج». فهي لا تعطي أيَّة حجة نهائية للذين يشكّون بمفهوم التواصل ذاته. «فهذا الشك جدير بالاعتبار ولكن أين السبيل الآخر؟»».

هل إن الصياغة الهندسية أي بشكل أدق هل إن النظرية الفيزيائية بمجملها ومن ضمنها الهندسة التي تفترضها هي مسألة يمكن التحقق منها؟ في الواقع يطرح السؤال مع ما يشمل من أمور كيفية كما في باقي الفيزياء. فحيوية المتطلبات التوحيدية ذاتها تجعلها تبحث على تحقيق ذاتها في المعطيات التي يقدمها لها كل عصر أيّ حالياً في صياغات رياضية تسندها وتقودها بالوقت ذاته. هذه الصياغة غالباً ما تتقدم على التأويل الحدسي للنتائج التي تقود إليها. والصعوبات تكمن عندئذ في غموض التحقيقات الذي تفرضه المعطيات التجريبية غير المؤكدة في أكثر الأحيان (النظريات الكونية) وفي صعوبة التكيُّف مع أساليب أخرى في مجالات مختلفة (كتلك التي تقترحها النظريات الكموميَّة مثلاً).

إن السبيل الذي تفتحه النظريات التوحيدية يطلب مزيداً من التعمُّق أكثر من التوسع فيه. عندئذ يمكن أن يكون مدخلاً مفيداً إلى اندماج ضروري ولكنه صعب.

الجزء الرابع

ملحق في الرياضيات

الاستدلال في الفضاء المتَّجِهي الإقليدي(1)

نقول إن الفضاء بعدد أبعاد n هو فضاء متَّجِهي إذا كانت عناصره ...A,B (كل منها محدَّد بمركَّبات عددها n) لها الخصائص العادية للمتَّجِهات: التبادلية commutativity والتشاركية associativity والتوزعية distributivity وتسمى العناصر ...A,B متَّجِهات.

ويوصف الفضاء المتَّجهي بأنه إقليدي إذا كان لكل متَّجِهين A و B جداء نرمز إليه بالصيغة (A,B) له الخصائص العادية للجداء السلَّمي.

اصطلاح الجمع: نستعمل دائماً اصطلاح الجمع التالي: إذا تكرر مؤشر مكتوب في الأعلى وفي الأسفل في حاصل الضرب يعني ذلك الجمع على قيم هذا المؤشر سواء كتبت علامة الجمع Σ أو لا:

$$A_\mu B^\mu = A_1 B^1 + A_2 B^2 + \ldots + A_n B^n$$

وليس لهذا المؤشر (الذي يعني ببساطة عملية الجمع) قيمة محدَّدة: فهو مؤشر صامت ويمكن استبداله بأي مؤشر آخر ($A_\mu B^\mu = A_\lambda B^\lambda$).

وتنطبق نتائج هذا الفصل على أي فضاء إقليدي عدد أبعاده n. ولكن التطبيقات

---

(1) نستعمل الجزء A من هذا الفصل في الفصل السادس. الصياغة الرباعية للنسبية الخاصة، إلاّ أن هذه الصياغة للنسبية الخاصة تحدّ من بعض فرضيات الجزء A بحصرها في هياكل الإسناد المتعامدة والمنظَّمة. مع ذلك من المفيد كما ذكرنا في مقدمة الفصل السادس إدخال طريقة الاستدلال العامة للفضاء الإقليدي. وقد تركنا هذه الدراسة إلى الملحق في الرياضيات وهو موضوع هذا الفصل.

التي سنتطرق إليها هي في الفضاء الرباعي الإقليدي. وكما درج الاستعمال تأخذ المؤشرات اليونانية $\mu, \nu, \rho, \sigma...$ القيم 1,2,3,0.

أ ـ استعمال المحاور المستقيمة

1) التغاير والتغاير المخالف

ليكن S هيكلاً اسناديا محدداً بالإحداثيات المستقيمة x^μ. لكل محور متَّجه أحادي e_μ. مما يجعل كل متَّجه A يكتب بالصيغة:

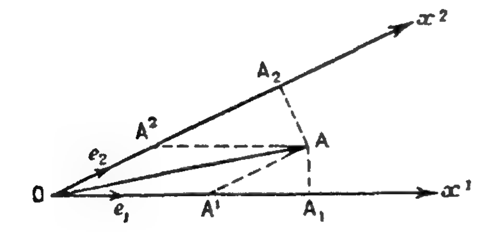
$$A = A^\mu e_\mu \quad \text{(XI-1)}$$

تمثل الكميات A^μ اسقاطات projections المتَّجه A بالتوازي على محاور الإحداثيات. وتسمى هذه الكميات المركَّبات المخالفة للتغيُّر contravariant components للمتَّجه A (انظر الرسم 42).

ومن جهة ثانية نحدِّد الكميات:

$$A_\mu = A \cdot e_\mu \quad \text{(XIV-2)}$$

وهي الإسقاطات العمودية للمتَّجه A على المحاور ونسميها المركَّبات الموافقة للتغيُّر covariant components للمتَّجه A.



الشكل 42 ـ استعمال المحاور المنحنية.

ونسمي $g_{\mu\nu}$ الجداء العددي (السُّلمي) للمتَّجهات القاعدية Base vectors:

$$(e_\mu \cdot e_\nu) = g_{\mu\nu}. \quad \text{(XIV-3)}$$

وتكون الأعداد $g_{\mu\nu}$ والمتَّجهات الاحادية القاعدية e_μ ثابتة في الفضاء أي أنها لا تتغيَّر من نقطة إلى أخرى في الفضاء إذ إننا نستعمل إحداثيات مستقيمة. واستناداً إلى تحديدها بالذات تكون الكميات $g_{\mu\nu}$ متناظرة أي:

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}. \quad \text{(XIV-4)}$$

وتحسب المركَّبات الموافقة للتغيُّر من المركَّبات المخالفة للتغيُّر باستعمال الكميات $g_{\mu\nu}$. إذ إن:

$$A_\mu = A \cdot e_\mu = A^\nu(e_\nu \cdot e_\mu) = g_{\mu\nu} A^\nu. \quad \text{(XIV-5)}$$

وأخيراً نحدِّد الكميات $g^{\mu\nu}$ بالعلاقة:

$$g_{\mu\rho}g^{\nu\rho} = \delta^\nu_\mu. \quad \text{(XIV-6)}$$

فنستنتج من العلاقات (XIV-5) و (XIV-6) أن:

$$g^{\mu\rho}A_\rho = g^{\mu\rho}g_{\rho\sigma}A^\sigma = \delta^\mu_\sigma A^\sigma = A^\mu. \quad \text{(XIV-7)}$$

مما يعني أن المركَّبات الموافقة للتغيُّر والمركَّبات المخالفة للتغيُّر لمتَّجِه معين ترتبط بالعلاقة:

$$A_\mu = g_{\mu\nu}A^\nu \quad , \quad A^\mu = g^{\mu\nu}A_\nu. \quad \text{(XIV-8)}$$

لتكن g محدِّدة الأعداد g_μ أي:

$$g = \text{Det. } g_\mu. \quad \text{(XIV-9)}$$

فنستنتج بسهولة من المعادلة (XIV-6) أن المحدِّد الأصغر minor لـ $g_{\mu\nu}$ هو:

$$\text{minor } g_{\mu\nu} = gg^{\mu\nu}. \quad \text{(XIV-10)}$$

حالة خاصة: هياكل الإسناد المتعامدة: إذا كانت الإحداثيات متعامدة نجد من التحديد (XIV-3) أن:

$$e_\mu \cdot e_\nu = \delta_{\mu\nu}. \quad \text{(XIV-11)}$$

حيث:

$$\delta_{\mu\nu} = \begin{cases} 0 & \text{إذا } \mu \neq \nu \\ 1 & \text{إذا } \mu = \nu. \end{cases} \quad \text{(XIV-12)}$$

إذا:

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\sigma} \quad \text{(XIV-13)}$$

ومنها استناداً إلى (XIV-8):

$$A^\mu = A_\mu. \quad \text{(XIV-14)}$$

مما يعني إذا كنا نستعمل الإحداثيات المتعامدة والمنظَّمة ($g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$) أنه لا ضرورة للتمييز بين المركِّبات المكافئة التحويل والمركبات المعاكسة التحويل. لذلك لا يستعمل هذا التمييز في المسائل المتعلقة بالفضاء الثلاثي الإقليدي شرط أن نستعمل الاحداثيات المتعامدة والمنظمة وهذا دائماً ممكن.

2) نظيم المتَّجِهات ـ الجداء العددي (السلمي) لمتجهين

يحدَّد الجداء السلمي لمتجهين A و B في فضاء متَّجِهي بالصيغة:

$$A \cdot B = (A^{\mu} e_{\mu}) \cdot (B^{\nu} e_{\nu}) = A^{\mu} B^{\nu} (e_{\mu} \cdot e_{\nu}). \quad \text{(XIV-15)}$$

أي استناداً إلى الصيغة (XIV-3):

$$A \cdot B = g_{\mu\nu} A^{\mu} B^{\nu}. \quad \text{(XIV-16)}$$

ويكون المتَّجِهان متعامدين إذا انعدم جداؤهما العددي أي:

$$A \cdot B \equiv g_{\mu\nu} A^{\mu} B^{\nu} = 0 \quad \text{(XIV-17)}$$

والجداء السلمي لمتَّجِه A بنفسه يسمى نظيم Norm المتَّجِه. نظيم المتَّجِه هو مربع قياسه (مقداره) Modulus:

$$|A|^2 = g_{\mu\nu} A^{\mu} A^{\nu}. \quad \text{(XIV-18)}$$

وإذا كان نظيم المتَّجِه يساوي الوحدة نقول إن المتَّجِه منظَّم أو أحادي.

نقول إن الفضاء الإقليدي أصولي إذا كان نظيم أي متَّجِه غير الصفر إيجابياً.

وبشكل خاص يشكل طول المتَّجِه ds ذي المركِّبات dx^{μ} الصيغة الأساسية للفضاء الإقليدي:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^{\mu}\, dx^{\nu}. \quad \text{(XIV-19)}$$

حالة خاصة: استعمال الإحداثيات المتعامدة: إذا استعملنا نظام محاور متعامدة للفضاء المتَّجِهي أي:

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}, \quad \text{(XIV-13)}$$

ويكون الجداء السلمي للمتَّجهين A و B:

$$A \cdot B = g_{\mu\nu}A^{\mu}B^{\nu} = \Sigma_{\mu}A^{\mu}B^{\mu}. \quad \text{(XIV-20)}$$

أما النظيم (أي مربع طول المتَّجِه) فيكون استناداً إلى (XIV-20):

$$|A|^2 = g_{\mu\nu}A^{\mu}A^{\nu} = \Sigma_{\mu}(A^{\mu})^2. \quad \text{(XIV-21)}$$

وبشكل خاص تكون الصيغة الأساسية في هذا الفضاء:

$$ds^2 = \Sigma_{\mu}(dx^{\mu})^2. \quad \text{(XIV-22)}$$

تعمِّم إذاً الصيغ (XIV-20) و(XIV-21) و (XIV-22) التحديدات المعروفة في الفضاء الثلاثي للجداء السلمي وطول المتَّجِه والمسافة بين نقطتين متقاربتين $M(x^{\mu})$ و $M'(x^{\mu} + dx^{\mu})$.

3) تبديل المحاور المتعامدة

لنحول المتَّجِهات الأحادية القاعدية e_{μ} للمحاور x^{μ} إلى المتَّجِهات الأحادية القاعدية e'_{μ} للمحاور x'^{μ} وفق العلاقة:

$$e'_{\mu} = a^{\nu}{}_{\mu'}\, e_{\nu}. \quad \text{(XIV-23)}$$

ومُعامِل التحويل هنا $a^{\nu}{}_{\mu'}$ هي أعداد ثابتة تميِّز تحويل المحاور المنحنية.

تكون المتَّجِهات الجديدة e'_{μ} مستقلة عن بعضها إذا:

$$a = |a^{\nu}{}_{\mu'}| \neq 0. \quad \text{(XIV-24)}$$

وبالعكس تكتب المتَّجهات e_{μ} بالنسبة إلى e'_{μ} حسب القاعدة:

$$e_{\mu} = a^{\nu'}_{\mu}\; e'_{\nu} \quad \text{(XIV-25)}$$

مع:

$$a' = |a^{\omega}_{\mu}| \neq 0. \quad \text{(XIV-26)}$$

فإذا قارنا (XIV-23) و (XIV-25) نجد:

$$e'_{\mu} = a^{\nu}{}_{\mu'}\, e = a^{\nu}_{\mu}\, a^{\rho'}_{\nu}\; e'_{\rho} \quad , \quad \text{(XIV-27)}$$

$$e_{\mu} = a^{\nu'}_{\mu}\; e'_{\nu} = a^{\nu'}_{\mu}\; a^{\rho}{}_{\nu'}\, e_{\rho}.$$

أي شرط تعامد التحويل:

$$a^{\nu}_{\mu'}\, a^{\rho'}_{\nu} = a^{\rho}_{\nu}\, a^{\nu'}_{\mu} = \delta^{\rho}_{\mu} \quad , \tag{XIV-28}$$

مع:

$$\delta^{\rho}_{\mu} = \begin{cases} 0 & \mu \neq \rho \quad \text{:إذا} \\ 1 & \mu = \rho \quad \text{:إذا} \end{cases} \tag{XIV-29}$$

والشروط (XIV-28) تعـادل تحديـد المعامِـل $a^{\nu}_{\mu'}$ بالنسبـة إلى $a^{\sigma'}_{\rho}$ المستخلصـة من العلاقات الخطِّية (XIV-23) والعلاقات المعاكسة لها. إذ نجد:

$$a^{\nu'}_{\mu} = \frac{\text{minor } a^{\mu}{}_{\nu'}}{[a]} \ , \quad a^{\nu}_{\mu'} = \frac{\text{minor } a^{\mu'}_{\nu}}{[a']} \tag{XIV-30}$$

ومنها نستنتج الشروط (XIV-28).

واستناداً إلى خصائص المحدِّدات نجد بشكل خاص:

$$[a]\,[a'] = 1. \tag{XIV-31}$$

كل متَّجِه X يكتب بالصيغة:

$$X = x^{\mu} e_{\mu} \tag{XIV-32}$$

وتكون مركِّباته المخالفة للتغير x^{μ} في نظام المحـاور المستقيمة ذات القـاعدة e_{μ} و x'^{μ} في نظام المحاور المستقيمة ذات القاعدة e'_{μ} كما يلي:

$$X = c^{\mu} e_{\mu} = x'^{\mu} e'_{\mu} \tag{XIV-33}$$

أي:

$$x^{\mu}\, a^{\nu'}_{\rho}\, e'_{\nu} = x'^{\mu}\, e'_{\mu} \quad , \quad x'^{\mu}\, a^{\nu}_{\mu'}\, e_{\nu} = x^{\mu} e_{\mu}, \tag{XIV-34}$$

لأي من المتَّجِهات القاعدية e_{μ} و e'_{μ}. نجد إذا قواعد التحويل:

$$x^{\mu} = a^{\mu}_{\nu'}\, x'^{\nu}. \tag{XIV-35}$$

والقواعد العكسية:

$$x'^{\mu} = a^{\mu'}_{\nu}\, x^{\nu}. \tag{XIV-36}$$

4) الثوابت والمتّجهات والموترات

1.4 ـ الكميات الثابتة في التحويل

تكون كمية فيزيائية ثابتة في التحويل إذا كانت تحافظ على قيمتها في التحويل (XIV-23). سنكتفي في هذا الفصل بتحويلات المحاور المستقيمة فتكون المعامِلات $a^{\nu'}_{\mu}$ و $a^{\nu}_{\mu'}$ لا تتغيّر من نقطة إلى أخرى في الفضاء. كمثل على الثوابت في التحويل نذكر الصيغة الأساسية ds^2 ومؤشر دالمبر d'Alembert □:

$$ds^2 = dx_\mu\, dx^\mu \quad , \quad \square = \frac{\partial^2}{\partial x_\mu\, \partial x^\mu} \qquad \text{(XIV-37)}$$

2.4 ـ المتّجهات

نقول إن A هو متّجه إذا كان محدّداً بالمركّبات الموافقة للتغيّر A_μ التي تتحول مثل المتّجهات e_μ في التحويل. أما المركّبات المخالفة للتغيّر A^μ فتتحول مثل الإحداثيات x^μ.

وفعلاً نجد لتحويل المركّبات الموافقة للتغيّر:

$$A_\mu = A\cdot e_\mu = A\, a^{\nu'}_{\mu}\, e'_\nu = a^{\nu'}_{\mu}\, A'_\nu \qquad \text{(XIV-38)}$$

وللتحويل المخالف:

$$A'_\mu = A\, e'_\mu = A\, a^{\nu}_{\mu'}\, e_\nu = a^{\nu}_{\mu'}\, A_\nu. \qquad \text{(XIV-39)}$$

ومن جهة ثانية إذا أظهرنا المركّبات المخالفة للتغيّر يمكن أن نكتب:

$$A = A^\mu e_\mu = A'^\mu\, e'_\mu \qquad \text{(XIV-40)}$$

أي:

$$A^\mu\, a^{\nu'}_{\mu}\, e'_\nu = A'^\mu\, e'_\mu \quad , \quad A'^\mu \cdot a^{\nu}_{\mu'}\, e_\nu = A^\mu e_\mu. \qquad \text{(XIV-41)}$$

فتكون قواعد التحويل للمركّبات المخالفة للتغيّر:

$$A^\mu = a^{\mu}_{\nu'}\, A'^\nu \quad , \quad A'^\mu = a^{\mu'}_{\nu}\, A^\nu. \qquad \text{(XIV-42)}$$

3.4 ـ باستعمال المـركّبات المـوافقة للتغـير والمخالف للتغـير: يمكن أن نشكل الصيغ:

$$C_{\mu\nu} = A_\mu B_\nu \;,\; C^{\mu\nu} = A^\mu B^\nu \;,\; C_\mu^\nu = A_\mu B^\nu. \qquad \text{(XIV-43)}$$

التي تتحول حسب القواعد التالية

$$C'_{\mu\nu} = A'_\mu B'_\nu = a^\rho{}_{\mu'} a^\sigma{}_{\nu'} A_\rho B_\sigma = a^\rho{}_{\mu'} a^\sigma{}_{\nu'} C_{\rho\sigma} \qquad \text{(XIV-44)}$$

$$C'^{\mu\nu} = A'^\mu B'^\nu = a^{\mu'}_\rho a^{\nu'}_\sigma A^\rho B^\sigma = a^{\mu'}_\rho a^{\nu'}_\sigma C^{\rho\sigma} \qquad \text{(XIV-45)}$$

$$C'^\nu_\mu = A'_\mu B'^\nu = a^\rho{}_{\mu'} a^{\nu'}_\sigma A_\rho B^\sigma = a^\rho{}_{\mu'} a^{\nu'}_\sigma C^\sigma_\rho. \qquad \text{(XIV-46)}$$

كل كمية فيزيائية تتحول حسب هذه القواعد عند تحويل القـاعدة تسمى مـوتراً من الرتبة الثانية Second rank tensor.

بشكل عام الموتّر من الرتبة n هـو كمية ذات مـركّبات تحـدَّد بعدد من المؤشرات يساوي n وفق قانون التحويل:

$$A'_{\mu\nu..\rho\sigma} = a^\alpha{}_{\mu'} a^\beta{}_{\nu'} .. a^\gamma{}_\rho a_{\sigma'} a_{\alpha'} A_{\alpha\beta..\gamma\lambda} \qquad \text{(XIV-47)}$$

$$A'^{\mu\nu..\rho\sigma} = a^{\mu'}_\alpha a^{\nu'}_\beta .. a^{\sigma'}_\gamma a^{\sigma'}_\lambda A^{\alpha\beta..\gamma\lambda} \qquad \text{(XIV-48)}$$

$$A'_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma} = a^\alpha{}_{\mu'} a^\beta{}_{\nu'} .. a^{\rho'}_\gamma a^{\sigma'}_\lambda A^{..\gamma\lambda}_{\alpha\beta} \qquad \text{(XIV-49)}$$

أو العلاقة العكسية:

$$A_{\mu\nu..\rho\sigma} = a^{\alpha'}_\mu a^{\beta'}_\nu .. a^{\gamma'}_\rho a^{\lambda'}_\sigma A'_{\alpha\beta..\gamma\lambda} \qquad \text{(XIV-50)}$$

$$A^{\mu\nu..\rho\sigma} = a^\mu{}_{\alpha'} a^\nu{}_{\nu'} .. a^\rho{}_{\gamma'} a^\sigma{}_{\lambda'} A'^{\alpha\beta..\gamma\lambda} \qquad \text{(XIV-51)}$$

$$A^{..\rho\sigma}_{\mu\nu} = a^{\alpha'}_\mu a^{\beta'}_\sigma .. a^\rho{}_{\gamma'} a^\sigma{}_{\lambda'} A'^{\gamma\lambda}{}_{\alpha\beta}. \qquad \text{(XIV-52)}$$

5) الموتّرات المتناظرة والموترات المتخالفة التناظر

يكون الموتّر متناظراً symmetric بالنسبة إلى المؤشرين μ و ν إذا كانت مـركّباتـه $A_{\mu\nu}$ (أو $A^{\mu\nu}$) تخضع للعلاقة:

$$(XIV\text{-}53) \qquad A_{\mu\nu..} = A_{\nu\mu..}$$

فنرمز إليه عندئذ بالكتابة $A_{(\mu\nu)}$ (وأحيانا $A_{\mu\nu}$).

ويكون الموتِّر متخالف التنــاظر antisymmetric بـالنسبة إلى المؤشرين ν و μ إذا كانت مركِّباته تخضع للعلاقة:

$$(XIV\text{-}54) \qquad A_{\mu\nu} = - A_{\nu\mu}$$

فنرمز إليه عندئذ بالكتابة $A_{[\mu\nu]}$ (أو أحيانا $A^{\mu\nu}_{\nu}$).

كل موتِّر يمكن كتابته كمجموع موتِّر متناظر وموتِّر متخالف التناظر:

$$(XIV\text{-}55)\ A_{\mu\nu..} = \frac{1}{2}\ (A_{\mu\nu} + A_{\nu\mu}) + \frac{1}{2}\ (A_{\mu\nu} - A_{\nu\mu}) = A_{(\mu\nu)} + A_{(\mu\nu)}.$$

كما يمكن أن نتأكد أن صفتي التناظر لا تتبدلان عند تغيير المتَّجِهات القاعدية.

ملاحظة: كـل موتِّـر يشكل كـائناً هنـدسياً مستقـلاً. بمعنى أن تحويـل المحاور المنحنية (XIV-23) يعطي الموتِّر مركِّبات يمكن حسابها تماماً من المركِّبـات القديمـة ومُعامل التحويل $a^{\nu}_{\ \mu'}$ و $a^{\nu'}_{\mu}$.

6) تحويل الموتِّر الأساسي ـ الحالة الخاصة لهياكل الإسناد المتعامدة

تستخلص قاعدة تحويل مركِّبات الموتِّر المتناظر $g_{\mu\nu}$ من تحديده (XIV-3) مباشرة

$$(XIV\text{-}56) \qquad g'_{\mu\nu} = (e'_{\mu} \cdot e'_{\nu}) = a^{\rho}_{\ \mu'}\, a^{\sigma}_{\ \nu'}\, (e_{\rho} \cdot e_{\sigma}) = a^{\rho}_{\ \mu'}\, a^{\sigma}_{\ \nu'}\, g_{\rho\sigma}$$

أو العلاقة العكسية:

$$(XIV\text{-}57) \qquad g_{\mu\nu} = (e_{\mu} \cdot e_{\nu}) = a^{\rho'}_{\mu}\ a^{\sigma'}_{\nu}\ (e'_{\rho}\, e'_{\sigma}) = a^{\rho'}_{\mu}\ a^{\sigma'}_{\nu}\ g'_{\rho\sigma}.$$

أمـا تحويـل المركبـات المخـالفـة للتغـيُّر $g^{\mu\nu}$ فيستخلص مبـاشرة من المعـادلات (XIV-56) و (XIV-57) بعد أخذ المعادلة (XIV-6) بعين الاعتبار فنجد[2]

---

(2) نجد فعلاً استنادا إلى المعادلات (XIV-6) و (XIV-56)

$$= g'_{\rho\sigma}\, g'^{\rho\tau} = a^{\lambda}_{\ r'}\, a^{\delta}_{\ \sigma'}\, g_{\lambda\delta}\, g'^{\rho\tau} = \delta^{\tau'}_{\sigma}$$

$$g'^{\mu\nu} = a^{\mu'}_{\rho}\ a^{\nu'}_{\sigma}\ g^{\rho\sigma}.$$

أو العلاقة العكسية

$$g^{\mu\nu} = a^{\mu}_{\rho}\ ,\ a^{\nu}_{\sigma}\ ,\ g'^{\rho\sigma}.$$

ونتأكد من ثبات الصيغة الأساسية ds^2:

(XIV-60) $$ds^2 = dx_\mu\, dx^\mu$$

في التحويل انطلاقاً من (XIV-56) إذ نجد:

(XIV-61) $$ds'^2 = a_{\mu\nu}\, dx'^\mu\, dx'^\nu = g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu = ds^2.$$

الحالة الخاصة لهياكل الإسناد المتعامدة

إذا كانت هياكل الإسناد المستقيمة المحدَّدة بالمتَّجِهات القاعدية e_μ و e'_μ متعامدة نجد:

(XIV-62) $$g_{\mu\nu} = (e_\mu \cdot e_\nu) = \delta_{\mu\nu} \quad , \quad g'_{\mu\nu} = (e'_\mu \cdot e'_\nu) = \delta_{\mu\nu}$$

أي استناداً إلى (XIV-57):

(XIV-63) $$\delta_{\mu\nu} = a^{\rho}{}_{\mu'}\, a^{\sigma}{}_{\nu'}\, \delta_{\rho\sigma} = \Sigma_\rho\, a^{\sigma}{}_{\mu'}\, a^{\rho}{}_{\nu'}$$

وإذا ضربنا بـ $a^{\nu'}_{\lambda}$ وجمعنا على المؤشر ν آخذين بعين الاعتبار شروط التعامد (XIV-28) نجد:

(XIV-64) $$a^{\nu'}_{\lambda}\ \delta_{\mu\nu} = a^{\nu'}_{\lambda}\ \Sigma_\rho\, a^{\rho}{}_{\mu'}\, a^{\rho}{}_{\nu'} = a^{\lambda}{}_{\mu'}$$

أي:

(XIV-65) $$a^{\mu'} = a_{\mu'}.$$

= لنضرب بـ $a^{\nu}{}_{\tau'}, a^{\delta'}_{\pi}$ ولنجمع على المؤشرات المتكررة فنجد:

$$a^{\nu}{}_{\tau'}\, a^{\sigma'}_{\pi}\ a^{\lambda}{}_{\rho'}\, a^{\lambda}{}_{\sigma'}\, g_{\lambda\delta}\, g'^{\rho\tau} = \delta^{\tau}_{\sigma}\, a^{\nu}{}_{\tau'}\, a^{\sigma'}_{\pi} = \delta^{\nu}_{\pi}$$

$$\delta^{\lambda}_{\pi}\, a^{\nu}{}_{\tau'}\, a^{\lambda}{}_{\rho'}\, g_{\lambda\delta}\, g'^{\rho\tau} = a^{\nu}{}_{\tau'}\, a^{\lambda}{}_{\rho'}\, g_{\lambda'\pi}\, g'^{\rho\tau} = \delta^{\nu}_{\pi}$$

وإذا ضربنا بـ $g^{\mu\pi}$ نجد $$g^{\mu\pi}\, a^{\nu}{}_{\tau'}\, a^{\lambda}{}_{\rho'}\, g_{\lambda\pi}\, g'^{\rho\tau} = g^{\mu\pi}\, \delta^{\nu}_{\pi}$$

$$\delta^{\mu}_{\lambda}\, a^{\nu}_{\tau}\, a^{\lambda}_{\rho'}\, g'^{\rho\tau} = a^{\mu}{}_{\rho'}\, a^{\nu}{}_{\tau'}\, g'^{\rho\tau} = g^{\mu\nu}$$

وتقود هذه العلاقة إلى معادلة المحدِّدات [a] و [a′] التي تتعلق بالتحويل:

$$[a'] = [a]. \qquad \text{(XIV-66)}$$

ومن جهة ثانية تخضع هذه المحدِّدات استناداً إلى (XIV-28) إلى المعادلة:

$$[a]\,[a'] = 1 \qquad \text{(XIV-31)}$$

فإذا قارنا المعادلات (XIV-31) و (XIV-66) نجد:

$$[a] = [a'] = \pm 1 \qquad \text{(XIV-67)}$$

7) دوران المحاور في الفضاء الرباعي الإقليدي

لننظر في تحويل المحاور:

$$e'_\mu = a^{\nu}_{\mu'}\, e_\nu \quad , \quad e_\mu = a^{\nu'}_{\nu}\, e'_\nu \qquad \text{(XIV-23)}$$

الخاضع للشروط:

$$a^{\rho'}_{\mu}\; a^{\nu}_{\rho'} = \delta^{\nu}_{\mu} \qquad \text{(XIV-28)}$$

التي تؤمن المحافظة على أطوال المتّجهات (أو نُظُمها).

يكون هذا التحويل دورانا إذا توفر الشرطان التاليان:

أ ـ الكميات $g'_{\mu\nu}$ و $g_{\mu\nu}$ (المرتبطة بالجداء السلمي للمتّجهات) متساوية:

$$g'_{\mu\nu} = (e'_\mu \cdot e'_\nu) = (e_\mu \cdot e_\nu) = g_{\mu\nu}. \qquad \text{(XIV-68)}$$

نجد إذاً:

$$a^{\rho}_{\mu'}\, a^{\sigma}_{\nu'}\, g_{\rho\sigma} = g_{\mu\nu} \qquad \text{(XIV-69)}$$

أي إذا ضربنا بـ $a^{\nu'}_{\lambda}$ وجمعنا على المؤشرات المتكرِّرة مستعملين (XIV-28) نجد:

$$a^{\rho}_{\mu'}\, g_{\rho\lambda} = a^{\nu'}_{\lambda}\, g_{\mu\nu}. \qquad \text{(XIV-70)}$$

وأحيانا كثيرة تكون المحاور متعامدة بحيث ان الشرط (XIV-70) مع

$g_{\mu\nu} = g'_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ يصبح (XIV-65) أي:

$$a^{\lambda}_{\mu'} = a^{\mu'}_{\lambda} \qquad \text{(XIV-65)}$$

ب ـ يجب الافتراض أن:

$$[a] = [a'] = +1 \qquad \text{(XIV-71)}$$

نعلم استناداً إلى المقطع السابق أن الشرطين (XIV-65) و (XIV-31) يقودان إلى $[a] = [a'] = \pm 1$ فإذا فرضنا الاختيار (XIV-71) يكون الهيكلان الإسناديان المتعامدان المحددان بالمتّجهات e_μ و e'_μ «باتجاه واحد» ويمكن الانتقال من أحدهما إلى الآخر بدوران.

خلافاً لذلك إذا اخترنا $[a] = [a'] = -1$ يكون الهيكلان الإسناديان «باتجاه معاكس» ويمكن الانتقال من أحدهما إلى الآخر بدوران يضاف إليه انعكاس.

بالمختصر يكون دوران المحاور المتعامدة في الفضاء الإقليدي الرباعي محدداً بالعلاقات التالية:

$$e'_\mu = a^{\nu}_{\mu'} e_\mu \quad , \quad e_\mu = a^{\nu'}_{\mu} \, e'_\nu \qquad \text{(XIV-23)}$$

مع:

$$a^{\rho}_{\mu'} \, a^{\nu'}_{\rho} = \delta^{\nu}_{\mu} \qquad \text{(XIV-28)}$$

ومن جهة ثانية:

$$a^{\lambda}_{\mu'} = a^{\mu'}_{\lambda} \qquad \text{(XIV-65)}$$

$$[a] = [a'] = 1 \qquad \text{(XIV-71)}$$

العلاقتان (XIV-23) و (XIV-28) صحيحتان لكل تحويل خطي للمحاور المنحنية. أما الشرط (XIV-65) فيؤمن المحافظة على تعامد المحاور. وأخيراً الشرط (XIV-71) يؤمن للتحويل خاصية الدوران.

ب ـ استعمال الإحداثيات المنحنية

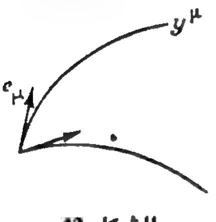
8) الانتقال من إحداثيات منحنية إلى احداثيات أخرى في فضاء متَّجهي إقليدي

لقد درسنا تحويلات هيكل اسناد مستقيم (x^μ) إلى هيكل إسناد مستقيم آخر (x'^μ). ويمكن دائماً في حالة فضاء متَّجهي إقليدي أن ندرس الظواهر المتعلقة بمنطقة واسعة من الفضاء في هيكل إسناد مستقيم ويمكن أن نختاره متعامداً. فتتخذ الصيغة الأساسية ds^2 الشكل المختصر (XIV-22).

وقد يكون من الممكن في بعض الحالات، بل من المستحسن، أن توصف الظواهر في هيكل إسناد احداثيات منحنية (y^μ). للانتقال من المركِّبات $A_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma}$ لموتِّر في هيكل الإسناد (M,y^μ) إلى مركبات هذا الموتر $A'_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma}$في هيكل الإسناد (M', y'^μ) يجب أولاً ربط هذين الهيكلين (M, y^μ) و (M', y'^μ). وبتعبير آخر يجب تحديد هيكل الإسناد (M', y'^μ) بالنسبة إلى هيكل الإسناد (M, y^μ) وهذا ما سنفعله الآن.

1.8 ـ الإحداثيات المنحنية وهياكل الإسناد الطبيعية المشاركة لها

عند استعمال الإحداثيات المنحنية تخصص كل نقطة M من الفضاء بإحداثيات منحنية (y^μ). ويعني هذا أنه إذا تركت جميع هذه الإحداثيات ثابتة ما عدا واحدة منها y^μ تتحرك النقطة M على خط منحن نرمز إليه أيضاً بـ y^μ في الشكل 43. ونسميه خط الإحداثية y^μ في النقطة M. في حالة الإحداثيات المستقيمة تكون خطوط الإحداثيات جميعها مستقيمة. لنرسم في النقطة M الخطوط المستقيمة المماسة على خطوط الإحداثيات وذات المتَّجهات الأحادية e_μ[3]. أيّ تحرك dM للنقطة M يكتب كما يلي باستعمال هذه المتَّجهات الأحادية:



الشكل 43 ـ
المرجع الطبيعي المشارك

(3) لندرس مثلاً نظام إحداثيات كروية قطبية (r,θ,φ). خطوط الإحداثيات هي الخط الشعاعي وخط الطول وخط العرض التي تمر في النقطة M. والخطوط هذه متعامدة في النقطة M. وهيكل الإسناد الطبيعي المشارك في النقطة M يتألف من المتَّجهات الأحادية المماسة على هذه الخطوط. وهو ايضاً هيكل إسناد متعامد وأُحادي. ولكن الموتِّر الأساسي $g_{\mu\nu}$ في النقطة M ليس $\delta_{\mu\nu}$ بهذه الإحداثيات المنحنية $y^\mu(r,\theta,\varphi)$ بل يتغيَّر من نقطة إلى أخرى. ونعني هنا بالمتَّجهات الأحادية مقياس الطول. ففي =

(XIV-72) $dM = e_\mu \, dy^\mu$ (1).

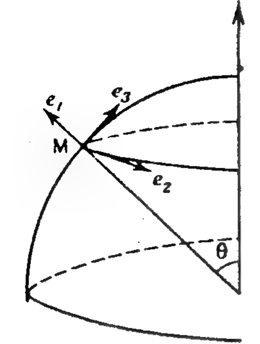
تشكل المحاور المستقيمة e_μ هيكل الإسناد الطبيعي المشارك للإحداثيات المنحنية في النقطة $M(y^\mu)$.

وإذا اخترنا نظاماً آخر للإحداثيات المنحنية (y'^μ) في النقطة M نحدِّد هيكلاً إسنادياً طبيعياً جديداً بواسطة المتجهات e'_μ المماسة على الخطوط y'^μ. فنجد عندئذ:

(XIV-73) $dM = e'_\mu \, dy'^\mu$

أي:

(XIV-74) $$e'_\mu = \frac{\partial M}{\partial y'^\mu} = \frac{\delta M}{\delta y^\nu} \frac{\partial y^\nu}{\partial y'^\mu} = a^\nu_{\mu'} \, e_\nu$$



الشكل 44 ـ خطوط الاحداثيات، هيكل الاسناد الطبيعي المشارك.

= الإحداثيات المستقيمة x', y', z' تكون المحاور المستقيمة المنطلقة من M متوازية مع هيكل الإسناد O x y z فنجد

(1) $e'_1 = 1$, $e'_2 = 1$, $e'_3 = 1$ $g'_{pq} = e'_p \cdot e'_q = \delta_{pq}$

نلاحظ بسهولة أن الانتقال من e'_3 إلى e_μ المحدَّدة سابقا كمتَّجهات مماسة على الخطوط y_r و y_θ و y_φ لا يسمح بالقول أن المتَّجهات e_μ لها طول يساوي وحدة الطول. إذ يمكن أن نكتب استناداً إلى (XIV-25)

(2) $e_p = a^{q'}_p \, e'_q$

وبما أن المحاور e'_q متعامدة وطولها يساوي وحدة الطول نجد:

(3) $(e^2_p) = (a^{1'}_p)^2 + (a^{2'}_p)^2 + (a^{3'}_p)^2$

والمعامل $a^{q'}_p = \frac{\partial x'^q}{\partial x^p}$ حيث:

$$x'^1 = x \quad , \quad x'^2 = y \quad , \quad x'^3 = z,$$
$$x^1 = r \quad , \quad x^2 = \theta \quad , \quad x^3 = \varphi$$

نستنتج من علاقات التحويل:

(4) $x = x'^1 = r \sin\theta \cos\varphi$, $y = x'^2 = r \sin\theta \sin\varphi$, $z = x'^3 = r \cos\theta$.

فإذا أحللنا قيمها في المعادلة (3) نجد:

(5) $e_1 = 1$, $e_2 = r$, $e_3 = r \sin\theta$.

ومنها قيم $g_{\mu\nu} = (e_\mu . e_\nu)$ في الإحداثيات r, θ, φ انظر الصفحة 81 من [35] LICHNEROWICZ.

ـ إذا كانت النقطة M تحدّد بمتغير وسيط ξ بطريقة أحادية نعني بـ dM المتّجه التفاضلي:

$$d\,OM = dO'M = \xi' \, d\xi$$

وهو لا يتغير مع أصل المحاور الاختياري O أو O' بل مع النقطة M فقط.

حيث وضعنا:

$$a^{\nu}_{\mu'} = \frac{\partial y^{\nu}}{\partial y'^{\mu}} \quad \text{(XIV-75)}$$

أما العلاقات العكسية فهي:

$$e_{\mu} = a^{\nu'}_{\mu}\, e'_{\nu}. \quad \text{(XIV-76)}$$

مع:

$$a^{\nu'}_{\mu} = \frac{\partial y'^{\nu}}{d\, y^{\mu}} \quad \text{(XIV-77)}$$

وتكون الصيغة الأساسية بالإحداثيات المنحنية (y^{μ}) و (y'^{μ}):

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dy^{\mu}\, dy^{\nu} = g'_{\mu\nu}\, dy'^{\mu}\, dy'^{\nu} \quad \text{(XIV-78)}$$

حيث حدَّدنا كما في المعادلة (XIV-3):

$$g_{\mu\nu} = (e_{\mu} \cdot e_{\nu}) \quad , \quad g'_{\mu\nu} = (e'_{\mu} \cdot e'_{\nu}). \quad \text{(XIV-79)}$$

أما إذا كان هيكل الإسناد متعامداً ومنظماً فتكون المركَّبات $g_{\mu\nu}$ مساوية لـ $\delta_{\mu\nu}$ وإذا كانت الإحداثيات منحنية فتحدَّد $g_{\mu\nu}$ في النقطة M بواسطة هيكل الإسناد الطبيعي المؤلف من المحاور المنحنية e_{μ} المشاركة للإحداثيات y^{μ} فنجد دائماً:

$$g_{\mu\nu} = (e_{\mu} \cdot e_{\nu}) = a^{\rho'}_{\mu}\, a^{\sigma'}_{\nu}\, (e'_{\rho}\, e'_{\sigma}) = a^{\rho'}_{\mu}\, a^{\sigma'}_{\mu}\, a'_{\rho\sigma}. \quad \text{(XIV-80)}$$

2.8 ـ لتكن M و M' نقطتين متقاربتين تفاضلياً في الفضاء المتَّجهي الإقليدي. بحيث أن $OM' = OM + dM$. للاختصار نرمز إلى OM' و OM بـ M' و M على التوالي. عند استعمال الإحداثيات المنحنية y^{μ} في النقطة M نحدِّد هيكلاً اسنادياً طبيعيا مشاركاً e_{μ} في هذه النقطة. ويصبح هذا الهيكل الإسنادي $e_{\mu} + de_{\mu}$ في النقطة $M + dM$. وعلينا وصل طريقة الاستدلال المحدَّدة بـ $(M + dM, e_{\mu} + de_{\mu})$ بتلك المحدَّدة بـ (M, e_{μ}). لذلك يجب تحديد dM و de_{μ} بالنسبة إلى هيكل الإسناد الطبيعي في النقطة M.

$$dM = \omega^{\mu}\, e_{\mu} \quad \text{(XIV-81)}$$

$$de_{\mu} = \omega^{\nu}_{\mu}\, e_{\nu} \quad \text{(XIV-82)}$$

حيث:

$$\omega^{\mu} = dy^{\mu} \quad , \quad \omega^{\nu}_{\mu} = \Gamma^{\nu}_{\ \mu\rho}\, dy^{\rho}, \tag{XIV-83}$$

وبما أن ω^{ν}_{μ} هي دالّة خطية في التغيرات dy^{ρ} يمكن أن نكتب:

$$dM = dy^{\mu}\, e_{\mu} \tag{XIV-84}$$

$$de_{\mu} = \Gamma^{\nu}_{\ \mu\rho}\, e_{\nu}\, dy^{\rho}. \tag{XIV-85}$$

ومنها نستنتج:

$$dg_{\mu\nu} = d(e_{\mu} \cdot e_{\nu}) = \Gamma^{\lambda}_{\ \mu\rho}\, (e_{\lambda} \cdot e_{\nu})\, dy^{\rho} + \Gamma^{\lambda}_{\ \nu\rho}\, (e_{\mu} \cdot e_{\lambda})\, dy^{\rho} \tag{XIV-86}$$

$$= (\Gamma_{\mu\rho,\nu} + \Gamma_{\nu\rho,\mu})\, dy^{\rho}$$

حيث وضعنا:

$$\Gamma^{\lambda}_{\ \mu\rho}\, h_{\lambda\nu} = \Gamma_{\mu\rho,\nu}. \tag{XIV-87}$$

ومن جهة ثانية نكتب استناداً إلى (XIV-84):

$$\partial_{\mu} M = e_{\mu}. \tag{XIV-88}$$

والشروط:

$$\partial_{\nu}(\partial_{\mu} M) = \partial_{\mu}(\partial_{\nu} M) \quad \text{أو:} \quad \partial_{\nu} e_{\mu} = \partial_{\mu} e_{\nu}, \tag{XIV-89}$$

يعبر عنها، إذا استعملنا (XIV-85)، بالعلاقة:

$$\Gamma^{\lambda}_{\ \mu\nu} \cdot e_{\lambda} = \Gamma^{\lambda}_{\ \nu\mu} \cdot e_{\lambda} \tag{XIV-90}$$

أو:

$$\Gamma^{\lambda}_{\ \mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\ \nu\mu} \quad , \quad \Gamma_{\mu\nu,\rho} = \Gamma_{\nu\mu,\rho}. \tag{XIV-91}$$

مما يعني أن المُعامِل $\Gamma^{\lambda}_{\ \mu\nu}$ متناظر في تبديل المؤشرات μ و ν. وإذا كتبنا المعادلة (XIV-86) بالصيغة:

$$\Gamma_{\mu\rho,\nu} + \Gamma_{\nu\rho,\mu} = \partial_{\rho}\, g_{\mu\nu}. \tag{XIV-92$_1$}$$

ثم بادلنا μ و ρ ثم ν و ρ في (XIV-90) نجد:

$$\text{(XIV-92)}_2 \qquad \Gamma_{\rho\mu,\nu} + \Gamma_{\nu\mu,\rho} = \partial_\mu g_{\rho\nu}$$

$$\text{(XIV-92)}_3 \qquad \Gamma_{\mu\nu,\rho} + \Gamma_{\rho\nu,\mu} = \partial_\nu g_{\mu\rho},$$

لنجمع المعادلات (XIV-92)_2 و (XIV-92)_3 ونطرح منها المعادلة (XIV-92)_1 نجد:

$$\text{(XIV-93)} \qquad \Gamma_{\mu\nu,\rho} = \frac{1}{2}\ (\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu}),$$

حيث أخذنا بعين الاعتبار تناظر $\Gamma_{\mu\nu,\rho}$ المعبَّر عنه بالعلاقة (XIV-91).

أخيراً إذا حدَّدنا الرموز:

$$\text{(XIV-94)} \qquad [\mu\nu, \rho] = \frac{1}{2}\ (\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu})$$

$$\text{(XIV-95)} \qquad \left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\} = \frac{1}{2}\ g^{\rho\sigma} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu})$$

ويكتب المعامل $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ بالصيغ التالية:

$$\text{(XIV-96)} \qquad \Gamma_{\mu\nu,\rho} = (\mu\nu, \rho] \quad , \quad \Gamma^\rho_{\mu\nu} = \left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\}.$$

تسمى الصيغ (XIV-94) و (XIV-95) رموز كريستوفل Christoffel من النوع الأول ومن النوع الثاني على التوالي. فالمعامِل $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ الذي يطابق رموز كريستوفل تكتب صيغه تبعاً للكميات $g_{\mu\nu}$ (المحدَّدة في هيكل الإسناد الطبيعي في M) ومشتقاتها الأولى. مما يتيح كتابة التغيرات dM و de_μ في هيكل الإسناد M. نكون هكذا قد ربطنا بين الهيكلين الإسناديين $(M+Md, e_\mu + de_\mu)$ و (M, e_μ).

ملاحظة (1): المعامل $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ الذي يحدِّد التغيرات de_μ أي التي تربط بين الهيكلين الإسناديين الطبيعيين في النقط المتقاربة تفاضليا في الفضاء يسمى معامِل الارتباط

القريب. ولا تشكل هذه الكميات مركَّبات موتِّر من الرتبة الثالثة[4].

ملاحظة (2): إذا ستعملنا إحداثيات منحنية للفضاء المتَّجِهي الإقليدي يتغير هيكل الإسناد الطبيعي المشارك من نقطة إلى أخرى. وتتغير أيضاً الكميات $g_{\mu\nu}$ من نقطة إلى أخرى استناداً إلى تحديدها $g_{\mu\nu} = (e_\mu \cdot e_\nu)$. فهي إذاً دوالّ في الإحداثيات y^μ. أما الارتباط القريب الذي يحدِّد العلاقة بين هيكلين إسناديين طبيعيَّيْن متقاربين تفاضليا فيعبر عنه برموز كريستوفل.

أما إذا استعملنا إحداثيات مستقيمة فتكون هياكل الإسناد الطبيعية متوازية في كل النقط. وتكون الكميات $g_{\mu\nu}$ متساوية في كل النقط من الفضاء فهي إذاً ثابتة. وينعدم بالتطابق المعامل $\Gamma^\rho{}_{\mu\nu}$ الذي يعبّر عن تغيرات هيكل الإسناد الطبيعي من نقطة إلى نقطة متقاربة تفاضليا.

---

(4) إذا أجرينا تحويل إحداثيات منحنية في النقطة M نكتب باستعمال (XIV-25):

(1) $$e_\mu = a^{\nu'}_\mu \; e'_\nu$$

ومنها:

(2) $$de_\mu = a^{\nu'}_\mu \; de'_\nu + (da^{\nu'}_\mu)\, e'_\nu$$

واستناداً إلى (XIV-82):

(3) $$de_\mu = a^{\nu'}_\mu \; \omega^{\rho'}_\nu \; e'_\rho + (da^{\rho'}_\mu)\, e'_\rho = (da^{\rho'}_\mu + a^{\nu'}_\mu \; \omega^{\rho'}_\nu)\, e'_\rho = (da^{\rho'}_\lambda + a^{\nu'}_\mu \; \omega^{\rho'}_{\nu'})\, a^\sigma{}_{\rho'}\, e^\sigma.$$

ولكن أيضاً في النقطة M:

(4) $$de_\mu = \omega^\sigma_\mu \, e_\sigma.$$

نجد إذاً بمقابلة (3) و (4):

(5) $$\omega^\sigma_\mu = \Gamma^\sigma{}_{\mu\lambda}\, dy^\lambda = (da^{\rho'}_\mu + a^{\nu'}_\mu \; \omega^{\rho'}_{\nu'})\, a^\sigma{}_{\rho'},$$

أي:

(6) $$\Gamma^\sigma{}_{\mu\lambda} = (\partial_\lambda\, a^{\rho'}_\mu + a^{\nu'}_\mu \; \Gamma'^{\rho}_{\nu\tau}\, a^{\nu'}_\lambda)\, a^\sigma{}_{\rho'},$$

لأن:

$$\omega^{\rho'}_{\nu'} = \Gamma'^{\rho}_{\nu\tau}\, dy'^\tau = \Gamma'^{\rho}_{\nu\tau}\, a^{\tau'}_\lambda \; dy^\lambda$$

إضافة إلى الحد $a^{\nu'}_\mu \; a^{\tau'}_\lambda \; a^\sigma{}_{\rho'}, \Gamma'^{\rho}_{\nu\tau}$ الذي يظهر إذا كانت الرموز $\Gamma^\sigma{}_{\mu\lambda}$ مركَّبات موتِّر تشير إلى أن تحويل هيكل الاسناد يدخل أيضا في الحساب $a^\sigma{}_{\rho'}, \partial_\lambda\, a^{\rho'}_\mu = a^\sigma{}_{\rho'}, \partial_\lambda\, \partial_\mu y'^\rho$ فتحويل الإحداثيات المنحنية يظهر إذا أن معامِل الارتباط القريب لا يتحول مثل مركبات موتِّر.

لا يستعمل هذا الاثبات أية فرضية تناظر للكميات $\Gamma^\rho{}_{\mu\nu}$. أما إذا افترضنا أن هذه الكميات غير متناظرة فإن الجزء المتخالف التناظر منها $\Gamma^\rho{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\,(\Gamma^\rho{}_{\mu\nu} - \Gamma^\rho{}_{\nu\mu})$ يتحول مثل مركبات موتِّر لأن الحد الإضافي $\partial_\mu\partial_\nu - \partial_\nu\partial_\mu$ يختفي في هذه الحالة.

وفي الحالة الخاصة جداً لإحداثيات مستقيمة ومتعامدة تكون الكميات $g_{\mu\nu}$ ثابتة ومساوية لرموز كرونكر $\delta_{\mu\nu}$.

9) العلاقات التفاضلية بين مركّبات الموتّر الأساسي

لتكن g محدّدة المركّبات المشابهة للتغير $g_{\mu\nu}$:

(XIV-9) $$g = \det g_{\mu\nu}.$$

نثبت أيضاً هنا أن:

(XIV-10) $$\text{minor } g_{\mu\nu} = gg^{\mu\nu}$$

وذلك باستعمال التحديد:

$$\sum_{\mu} g_{\mu\rho} \text{ min. } g_{\mu\nu} = g\delta_{\rho\nu}$$

والعلاقة:

(XIV-6) $$g_{\mu\rho}\, g^{\mu\sigma} = \delta^{\sigma}_{\rho}.$$

ولكن نجد أيضاً:

(XIV-97) $$dg = \sum_{\mu\nu} \text{min } g_{\mu\nu}.\, dg_{\mu\nu} = gg^{\mu\nu}\, dg_{\mu\nu}$$

وإذا استعملنا (XIV-6):

(XIV-98) $$dg = -\, gg_{\mu\nu}\, dg^{\mu\nu}$$

ومن جهة ثانية

(XIV-99) $$\begin{aligned} dg_{\mu\nu} &= d\,(g_{\mu\rho}\, g_{\nu\sigma}\, g^{\rho\sigma}) \\ &= g_{\mu\rho}\, g_{\nu\sigma}\, dg^{\rho\sigma} + \delta^{\rho}_{\nu}\, dg_{\mu\rho} + \delta^{\sigma}_{\mu}\, dg_{\nu\sigma} \\ &= g_{\mu\rho}\, g_{\mu\sigma}\, dg^{\rho\nu} + 2dg_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

فنجد إذاً:

(XIV-100) $$dg_{\mu\nu} = -\, g_{\mu\rho}\, g_{\nu\sigma}\, dg^{\rho\sigma}.$$

والعلاقة العكسية:

(XIV-101) $$dg^{\mu\nu} = -g^{\mu\rho}\, g^{\nu\sigma}\, dg_{\rho\sigma}.$$

لنرجع الآن إلى التحديد (XIV-95) لرموز كريستوفل. فإذا وضعنا $\rho = \nu$ نجد:

(XIV-102) $$\left\{ {\rho \atop \mu\rho} \right\} = \frac{1}{2}\, g^{\rho\sigma}\, \partial_\mu\, g_{\rho\sigma}$$

وإذا أخذنا (XIV-97) بعين الاعتبار يمكن أن نكتب[5]:

(XIV-103) $$\left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\} = \frac{1}{2\,g}\, \partial_\mu g = \partial_\mu \log \sqrt{|g|}$$

10) المشتقات الموافقة للتغيُّر

أ ـ مع تغيير هياكل الإسناد من (M, e_μ) إلى $(M+dM, e_\mu+de_\mu)$ تتبدل المركِّبات المخالفة للتغير A^μ لمتَّجِه A كما أن هيكل الإسناد الطبيعي المحدّد المشارك للإحداثيات المنحنية في M يتغير أيضاً. لنكتب:

(XIV-1) $$A = A^\mu\, e_\mu$$

فيكون تغيير A:

(XIV-104) $$dA = dA^\mu \cdot e_\mu + A^\mu de_\mu = (dA^\mu + \omega^\mu_\rho\, A^\rho)\, e_\mu = \nabla A^\mu e_\mu.$$

وتكون المركِّبات المخالفة للتغيُّر للمتَّجِه dA إذا قيست في هيكل الإسناد الطبيعي في M:

(XIV-105) $$\nabla A^\mu = dA^\mu + \omega^\mu_\sigma A^\sigma = dA^\mu + \Gamma^\mu_{\ \sigma\rho} A^\sigma\, dy^\rho.$$

تشكِّل الكميّات ∇A^μ مركِّبات متَّجِه (استناداً إلى تحديدها بالذات). فيكون للكميات $\nabla_\rho A^\mu = \dfrac{\nabla A^\mu}{d\,y^\rho}$ صفة موتِّرية وقيمتها:

(XIV-106) $$\boxed{\nabla_\rho A^\mu \equiv \frac{\nabla A^\mu}{d\,y^\rho} = \partial_\rho A^\mu + \Gamma^\mu_{\ \sigma\rho} A^\sigma.}$$

---

(5) في حالة فضاء إقليدي ومحاور متعامدة ومنظمة مع إحداثية رابعة حقيقية $(x^0=d)$ نجد:

$$g = g_{11}\, g_{22}\, g_{33}\, g_{00} = -1$$

أما الكميات $\Gamma^{\mu}_{\ \sigma\rho}A^{\sigma}$ فليست مركَّبات موتِّر وكذلك حال المشتقات العادية $\partial_{\rho}A^{\mu}$.

وتسمّى الكميات $\nabla_{\rho}A^{\mu}$ المشتقات الموافقة للتغيُّر أو المشتقات المطلقة للمركِّبات A^{μ}. وتسمى ∇A^{μ} التفاضلية المطلقة المركِّبة A^{μ} وتمثل التغيُّر الحقيقي للمتَّجه A مقيساً في هيكل الإسناد (y^{μ}) المحدَّد في M. ويشمل هذا التغيير الحقيقي تغيير المركِّبات A^{μ} وتغيير هيكل الإسناد الطبيعي لدى الانتقال من النقطة $M(y^{\mu})$ إلى النقطة القريبة منها تفاضلياً $M + dM\ (y^{\mu} + dy^{\mu})$. فالتفاضلية المطلقة والمشتقة الموافقة للتغيُّر لهما صفات موتِّرية.

ب ـ استناداً إلى (XIV-104) تمثل التفاضلية المطلقة ∇A^{μ} لمركِّبات متَّجه A المركِّبات المخالفة للتغيُّر $(dA)^{\mu}$ للمتَّجه dA أي تغير A. وكذلك تمثل التفاضلية المطلقة ∇A_{μ} لمركِّبات متَّجه A المركِّبات الموافقة للتغير $(dA)_{\mu}$ للمتَّجه dA أي تغير A. يعني هذا أن:

$$\nabla A_{\mu} = (dA)_{\mu} = dA \cdot e_{\mu} \qquad \text{(XIV-107)}$$

أي استناداً إلى (XIV-2) و (XIV-82):

$$\nabla A_{\mu} = d(A \cdot e_{\mu}) - A\, de_{\mu} = dA_{\mu} - A\omega^{\sigma}_{\mu}\, e_{\sigma}. \qquad \text{(XIV-108)}$$

أو:

$$\nabla A_{\mu} = dA_{\mu} - \omega^{\sigma}_{\mu}\, A_{\sigma} = dA_{\mu} - \Gamma^{\sigma}_{\ \mu\rho} A_{\sigma}\, dy^{\rho}. \qquad \text{(XIV-109)}$$

والمشتقة الموافقة للتغيُّر للمركِّبات A_{μ} تكتب بالصيغة:

$$\boxed{\nabla_{\rho}A_{\mu} \equiv \frac{\nabla A_{\mu}}{d\, y_{\rho}} = \partial_{\rho}A_{\mu} - \Gamma^{\sigma}_{\ \mu\rho}\, A_{\sigma}.} \qquad \text{(XIV-110)}$$

نشير إلى أن العلاقة (XIV-109) تقود إلى:

$$\nabla e_{\mu} \equiv de_{\mu} - \omega^{\sigma}_{\mu} e_{\sigma} \equiv 0. \qquad \text{(XIV-111)}$$

أي باستعمال (XIV-79) التي تمثِّل تحديد $g_{\mu\nu}$ في هذا الفضاء الإقليدي[6]:

---

(6) إذا كان الفضاء غير إقليدي لا تكون العلاقة (XIV-79) تحديداً بسيطاً لـ $g_{\mu\nu}$ ولا تكون هذه العلاقة صالحة للتفاضل différentiable ولا تكون العلاقة (XIV-112) صحيحة حتماً. وإذا كانت $\nabla g_{\mu\nu} \neq 0$ لا يمكن تحديد وحدة للطول واحدة في كل النقط في هذا الفضاء (أنظر الفصل الخامس عشر المعادلة (XV-76).

$$\nabla g_{\mu\nu} \equiv 0. \quad \text{(XIV-112)}$$

ومن البديهي أنه يمكن ايجاد رابط بين التحديدات (XIV-104) و (XIV-107) باستعمال الموتّر الأساسي. فاستناداً إلى (XIV-107) يمكن أن نكتب:

$$(dA)_\mu = dA \cdot e_\mu = \nabla A^\rho (e_\rho \cdot e_\mu) = g_{\mu\rho} \nabla A^\rho. \quad \text{(XIV-113)}$$

وإذا قارنا الصيغ (XIV-107) و (XIV-113) يمكن أن نكتب[7]:

$$\nabla A_\mu = g_{\mu\rho} \nabla A^\rho \quad \text{(XIV-114)}$$

٢ ج ـ **المشتقة الموافقة للتغيُّر لموتّر**: يمكن الحصول على المشتقة الموافقة للتغيُّر أو المطلقة لموتر بتعميم الصيغ (XIV-106) و (XIV-110) فنجد:

$$\boxed{\begin{aligned}\nabla_\rho A_{\mu\nu}{}^{\sigma\tau} = \partial_\rho A_{\mu\nu}{}^{\sigma\tau} + \Gamma^\sigma_{\lambda\rho} A_{\mu\nu}{}^{\lambda\tau} + \Gamma^\sigma_{\lambda\rho} A_{\mu\nu}{}^{\sigma\lambda} + \ldots \\ - \Gamma^\lambda_{\mu\rho} A_{\lambda\nu}{}^{\sigma\tau} - \Gamma^\lambda_{\nu\rho} A_{\mu\lambda}{}^{\sigma\tau} - \ldots\end{aligned}} \quad \text{(XIV-115)}$$

حيث الإشارة (+) تؤخذ للمؤشرات المخالفة للتغير والإشارة (−) تؤخذ للمؤشرات الموافقة للتغير.

د ـ **المشتقة الموافقة للتغيُّر للموتّر الأساسي**: بتطبيق العلاقة (XIV-115) على مركّبات الموتّر الأساسي $g_{\mu\nu} = e_\mu \cdot e_\nu$ نجد:

---

(7) يمكن كتابة صيغة التفاضل المطلق ∇A_μ مباشرة من (XIV-114) و (XIV-105) إذ إن:

$$\begin{aligned}\nabla A_\mu &= g_{\mu\rho} (dA^\rho + \Gamma^\rho_{\sigma\lambda} A^\sigma dy^\lambda) = dA_\mu - A^\rho (dg_{\mu\rho}) + g_{\mu\rho} \Gamma^\rho_{\sigma\lambda} A^\sigma dy^\lambda \\ &= dA_\mu - A^\rho (\Gamma^\sigma_{\mu\lambda} g_{\sigma\rho} + \Gamma^\sigma_{\rho\lambda} g_{\mu\sigma}) dy^\lambda + g_{\mu\sigma} \Gamma^\sigma_{\rho\lambda} A^\rho dy^\lambda \\ &= dA_\mu - \Gamma^\sigma_{\mu\lambda} A_\sigma dy^\lambda\end{aligned}$$

إذا:

$$\begin{aligned}dg_{\mu\rho} &= d(e_\mu \cdot e_\rho) = e_\mu \omega^\sigma_\rho e_\sigma + e_\rho \omega^\sigma_\mu e_\sigma \\ &= (\Gamma^\sigma_{\rho\lambda} g_{\mu\sigma} + \Gamma^\sigma_{\mu\lambda} g_{\rho\sigma}) dy^\lambda.\end{aligned}$$

ولكن هذه الطريقة تفترض أن $g_{\mu\rho} = e_\mu e_\rho$ صالحة للتفاضل أي أن $\nabla g_{\mu\rho} = 0$. هذا هو الحال في الفضاء الإقليدي ولكن هذا الاثبات لا يمكن تعميمه على الفضاء غير الإقليدي.

(XIV-116) $$\nabla_\rho g_{\mu\nu} = \partial_\rho g_{\mu\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\ \mu\rho} g_{\sigma\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\ \nu\rho} g_{\mu\sigma}$$

وذلك لأن الارتباط القريب لفضاء متّجهي إقليدي يعبّر عنه بواسطة رموز كريستوفل. فنجد إذاً:

(XIV-117) $$\nabla_\rho g_{\mu\nu} = \partial_\rho g_{\mu\nu} - \left\{ {\sigma \atop \mu\rho} \right\} g_{\sigma\nu} - \left\{ {\sigma \atop \nu\rho} \right\} g_{\mu\sigma}.$$

ولكن استناداً إلى التحديد (XIV-95) للرموز $\left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\}$ تنعدم الصيغة (XIV-117) بالتطابق. مما يعني أنه إذا كان الفضاء المتّجه إقليدياً نجد دائماً:

(XIV-118) $$\boxed{\nabla_\rho g_{\mu\nu} \equiv 0.}$$

وكذلك نجد للمركّبات المخالفة للتغير:

(XIV-119) $$\boxed{\nabla_\rho g^{\mu\nu} \equiv 0.}$$

11) الكثافات الموتّرية

الكثافات الموتّرية هي حاصل $\sqrt{-g}$ بموتّر. وترمز g هنا إلى محددة الموتّر الأساسي. فإذا كان $A^{\mu\nu}_{\rho\sigma}$ موتّراً نحدّد الكثافة الموتّرية بأنها:

(XIV-120) $$\boxed{a^{\mu\nu}_{\rho\sigma} = \sqrt{-g}\ a^{\mu\nu}_{\rho\sigma}}$$

وبشكل خاص تحدّد كثافة عددية لكل دالّة سلمية A بالصيغة:

(XIV-121) $$a = \sqrt{-g}\ A.$$

وتتحول مثل $\sqrt{-g}$ في تحويل هياكل الإسناد. في هذا التحويل نجد:

(XIV-122) $$g'_{\mu\nu} = a^{\rho}_{\ \mu'}\, a_\nu\, g_{\rho\sigma}$$

أي:

(XIV-123) $$g' = a^2 g \quad , \quad a = \det a^{\rho}_{\ \mu'} = \frac{1}{a'} \quad , \quad (a' = \det.\ a^{\rho'}_{\mu}).$$

مما يعني أن الكثافة العددية تتحول وفقاً للقاعدة:

(XIV-124) $$a' = \sqrt{-g'}\ A' = a\sqrt{-g}\ A = a\,a$$

هكذا نجد أنه علينا أن نستبدل الحجم التفاضلي:

$$d\tau = dy^1 \wedge dy^2 \dots \wedge dy^n. \quad \text{(XIV-125)}$$

بالحجم الثابت في التغيير:

$$\sqrt{-g}\; d\tau = \sqrt{-g}\; dy^1 \wedge dy^n. \quad \text{(XIV-126)}$$

ذلك أنه استنادا إلى قاعدة جاكوبي Jacobi تتحول (XIV-125) كما يلي:

$$d\tau' = d\tau \text{ déterm. } \frac{dy'^{\rho}}{dy^{\sigma}} = a'\, d\tau = \frac{1}{a}\; d\tau \quad \text{(XIV-127)}$$

فتكون الكمية (XIV-126) ثابتة فعلاً في التحويل أي أن:

$$\sqrt{-g'}\; d\tau' = a\sqrt{-g}\; \frac{1}{a}\; d\tau = \sqrt{-g}\; d\tau. \quad \text{(XIV-128)}$$

يسهِّل استعمال الكثافات الموتّرية في أغلب الأحيان صياغة معادلات المجال في الفضاء الريماني أو في الفضاء الإقليدي عند استعمال إحداثيات منحنية.

فحساب المشتقة الموافقة للتغيُّر للكثافة $a^{\mu\nu\cdots} = \sqrt{-g}\; A^{\mu\nu\cdots}$ يعطي:

$$\begin{aligned} \nabla_{\rho} a^{\mu\nu\cdots} &= \sqrt{-g}\; \nabla_{\rho} A^{\mu\nu\cdots} \\ &= \sqrt{-g}\left(\partial_{\rho} A^{\mu\nu\cdots} + \left\{ {\mu \atop \sigma\rho} \right\} A^{\sigma\nu\cdots} + \left\{ {\nu \atop \sigma\rho} \right\} A^{\mu\sigma\cdots} \right) \end{aligned} \quad \text{(XIV-129)}$$

أو:

$$\begin{aligned} \nabla_{\rho} a^{\mu\nu} &= \partial_{\rho} a^{\mu\nu\cdots} + \left\{ {\mu \atop \sigma\rho} \right\} a^{\sigma\nu} + \left\{ {\nu \atop \sigma\rho} \right\} a^{\mu\sigma} - a^{\mu\nu} \frac{\partial_{\rho}\sqrt{-g}}{\sqrt{-g}} \\ &= \partial_{\rho} a^{\mu\nu} + \left\{ {\mu \atop \sigma\rho} \right\} a^{\sigma\nu} + \left\{ {\nu \atop \sigma\rho} \right\} a^{\mu\sigma} - \left\{ {\sigma \atop \sigma\rho} \right\} a^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad \text{(XIV-130)}$$

لننظر في الحالة الخاصة لموتّر متخالف التناظر من الرتبة الثانية ذي المركّبات المخالفة للتغيُّر $A^{\mu\nu}$. باستعمال (XIV-130) نجد في حساب تباعد كثافتها:

$$\nabla_{\rho}\, a^{\mu\rho} = \partial_{\rho}\, a^{\mu\rho} \quad \text{(XIV-131)}$$

أو:

$$\nabla_\rho A^{\mu\rho} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\, \partial_\rho (\sqrt{-g}\; A^{\mu\rho}). \qquad \text{(XIV-132)}$$

مما يعني أن استعمال الكثافة الموتّرية يجعل حساب المشتقات الموافقة للتغير يرجع إلى حساب المشتقات العادية.

وكذلك إذا كانت A^ρ مركّبات متّجِه A بكثافة $a^\rho = \sqrt{-g}\; A^\rho$ نجد باستعمال (XIV-130):

$$\nabla_\rho\, a^\rho = \partial_\rho\, a^\rho \qquad \text{(XIV-133)}$$

أي:

$$\nabla_\rho A^\rho = \frac{1}{\sqrt{-g}}\, \partial_\rho\, a^\rho \qquad \text{(XIV-134)}$$

الأجوبة:

$$f = \frac{R^2}{R^2 + \frac{1}{4}\,(\xi^2 + \eta^2)}\,, \quad \xi = \frac{2R\cos\varphi}{1 + \sin\varphi}\cos\theta, \quad \eta = \frac{2R\cos\varphi}{1 + \sin\theta}\sin\theta.$$

5 ـ أكتب المعادلات (XV - 134) و (XV - 135) وأوجد المعادلات التي تعمّم (XV - 138) و (XV - 139) في حالة فضاء ذي فتل $(\Gamma_{\mu\nu} \neq \Gamma^\rho_{\nu\mu})$ إضافة إلى التقوّس.

تمارين

1 ـ إثبت أن خصائص التناظر والتناظر المتخالفَ للموترات لا تتبدل عند اجراء تحويل عام للإحداثيات.

2 إثبت أن الصيغ:

$$\varphi_{\mu\nu} = \partial_\mu \varphi_\nu - \partial_\nu \varphi_\mu$$

$$\varphi_{\mu\nu\rho} = \partial_\mu \varphi_{\nu\rho} + \partial_\rho \varphi_{\mu\nu} + \partial_\nu \varphi_{\rho\mu}$$

تتحول مثل موترات.

3 ـ يكتب مؤثر لابلاس في الإحداثيات المنحنية كما يلي:

$$\Delta f = g^{\mu\nu} \Delta_\mu \Delta_\nu f$$

أ ـ وسّع هذه الصيغة باستعمال رموز كريستوفل.

ب ـ إثبت أن هذه الصيغة يمكن كتابتها بصيغة تباعد:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\rho (\sqrt{-g}\, V^\rho)$$

ج ـ اعطِ صيغة المؤثر Δ لإحداثيات متعامدة بحيث ان الصيغة الأساسية هي:

$$ds^2 = \Sigma c_i \, (\Sigma_i \, h_i^2 \, (d\xi^i)^2$$

حيث h_i هي دوالّ تبعا لـ ξ' (P.G. Bergmann).

الاستدلال في التشكيلات القياسية غير الإقليدية وتطبيقه على فضاء ريمان

1) الفضاء القياسي والفضاء الإقليدي المُمَاسّ

يتميز الفضاء القياسي بالخاصية التالية: يمكن تحديد مقياس الطول اختيارياً في كل نقطة من هذا الفضاء. ويتغير بشكل عام هذا المقياس من نقطة إلى أخرى في الفضاء.

لتكن y^μ الإحداثيات المنحنية المستعملة للاستدلال في هذا التشكيل. المسافة الفاصلة بين النقطتين $M_0(y^\mu)$ و$M'(y^\mu + dy^\mu)$ من هذا الفضاء تحدَّد بالصيغة الرباعية التفاضلية:

$$ds^2 = g^{\mu\nu}\, dy^\mu\, dy^\nu \tag{XV-1}$$

وتكتب أيضاً:

$$dM^2 = g_{\mu\nu}\, dy^\mu\, dy^\nu. \tag{XV-2}$$

في حالة الفضاء الرباعي تكون الكميات العشر $g_{\mu\nu}$ دوالّ متواصلة ويمكن تفاضلها بالنسبة إلى الإحداثيات y^μ.

لنقرن هذا الفضاء القياسي بفضاء إقليدي في النقطة $M_0 \equiv m_0$ بمحاور مستقيمة أصلها في النقطة m_0. ولنضع على كل من هذه المحاور المقياس ذاته للطول. وهذا ممكن لأننا حدَّدنا مقياساً للطول في كل نقطة من الفضاء القياسي. ونختار المتَّجهات الأحادية $(e_\mu)_0$ لهذا الفضاء الإقليدي بحيث تكون العلاقة:

(XV-3) $$(e_\mu)_0 (e_\nu)_0 = (g_{\mu\nu})_0.$$

صحيحة في النقطة m_0. وتمثل الكميات $(g_{\mu\nu})_0$ قيم $g_{\mu\nu}$ في النقطة $M_0 \equiv m_0$.

نجد إذاً بالقرب من M_0 استناداً إلى (XV-2) و (XV-3) أن:

(XV-4) $$(dM)_0^2 = (g_{\mu\nu})_0\, dy^\mu\, dy^\nu = (e_\mu)_0 (e_\nu)_0\, dy^\mu\, dy^\nu = (e_\mu\, dy^\mu)_0^2$$

أي:

(XV-5) $$\left(\frac{\partial M}{\partial y^\mu}\right)_0 = (e_\mu)_0$$

فتكون المتَّجِهات $(e_\mu)_0$ باتجاه المحاور المماسة على خطوط الإحداثيات y^μ في النقطة M_0 أي بتعبير آخر، الهيكل الإسنادي الطبيعي في النقطة M_0. نقول إن المتَّجِهات $(e_\mu)_0$ تشكل قاعدة «الفضاء المماس» في النقطة M_0 على التشكيل غير الإقليدي. وهذا الفضاء المماس على التشكيل غير الإقليدي هو فضاء إقليدي بصيغة أساسية:

(XV-6) $$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dy^\mu\, dy^\nu$$

تمثِّل مربع المسافة بين النقطتين m_0 و $m = m_0 + dm_0$ من هذا الفضاء المماس بالقرب من النقطة $M_0 \equiv m_0$ ويدخل في هذه الصيغة المُعامِل:

(XV-7) $$\bar{g}_{\mu\nu} = \bar{e}_\mu \cdot \bar{e}_\nu$$

وقيمته في النقطة m_0 في هيكل الاسناد المحدَّد بالمتَّجِهات $(e_\mu)_0$ هي:

(XV-8) $$(\bar{g}_{\mu\nu})_0 = (e_\mu)_0 (e_\nu)_0.$$

فإذا قابلنا الصيغ (XV-3) و (XV-8) نجد:

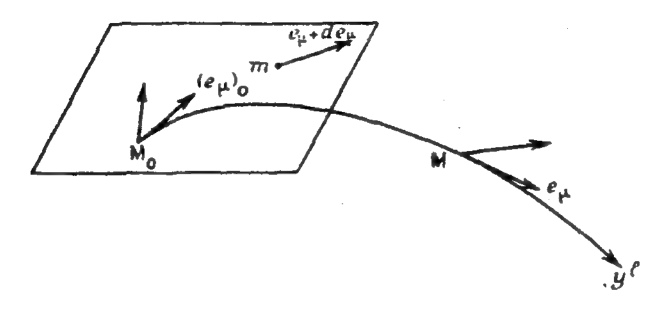
(XV-9) $$(g_{\mu\nu})_0 = (\bar{g}_{\mu\nu})_0$$

مما يعني أنه يمكن اختيار إحداثيات بحيث تكون الصيغ الأساسية للفضاء القياسي والفضاء الإقليدي المماس متطابقة في النقطة $M=m_0$. نقول إن الصيغ الأساسية مماسة في هذه النقطة.

2) الارتباط التآلفي

لنفترض أن النقطتين $M_0(y_0^\rho)$ و $M(y_0^\rho + dy^\rho)$ متقاربتين تفاضليا في التشكيل

القياسي ولنحدِّد المتَّجهات الأحادية $(e_\mu)_0$ و e_μ ذات الأصول في M_0 و M المماسة على خطوط الإحداثيات y_0^ρ و y^ρ. تشكل أنظمة المحاور $(e_\mu)_0$ و e_μ الهيكلين الإسناديين الطبيعيين في النقطتين M_0 و M وتحدِّدان هكذا الفضاءين الإقليديين المماسين على التشكيل القياسي في هاتين النقطتين.



الشكل 45 ـ الاستدلال في الفضاء المماس في النقطة القريبة.

نريد إيجاد علاقة بين النقطة M والمتَّجهات e_μ (من الفضاء الإقليدي المماس في النقطة M) والنقطة m والمتَّجهات e_μ (من الفضاء الإقليدي المماس في M_0) تتيح هذه العلاقة ربط هياكل الإسناد المحلية التي تحدِّد الفضاء الإقليدي المماس على التشكيل القياسي من نقطة إلى نقطة قريبة.

عند تغير الإحداثيات من y^ρ إلى $y'^\rho = y^\rho + dy^\rho$ تتغير النقطة $M(y^\rho)$ والمتَّجهات $e_\mu(y^\rho)$ في الفضاء الإقليدي المماس في النقطة M بالكميات:

$$dM = dy^\mu \, e_\mu \quad \text{(XV-10)}$$

$$de_\mu = \omega_\mu^\nu \, e_\nu = \Gamma_{\mu\rho}^\nu \, e_\nu \, dy^\rho \quad \text{(XV-11)}$$

ونخصص لكل نقطة M من التشكيل القياسي «النقطة الصورة» $m = m_0 + dm$ في الفضاء الإقليدي المماس في النقطة M_0. كذلك نخصص للمتَّجه $e_\mu(M)$ من التشكيل القياسي «المتجه الصورة» $\bar{e}_\mu + d\,\bar{e}_\mu$ من الفضاء الإقليدي. بهذه الطريقة يتمثل التشكيل القياسي القريب من M_0 في الفضاء الإقليدي المماس في النقطة M_0. والمعامل $\Gamma_{\mu\rho}^\nu$ الذي يتيح الربط بين الفضاء الإقليدي المماس في النقطة M_0 والنقطة M القريبة تفاضلياً يسمى «معامل الارتباط التآلفي في التشكيل القياسي».

3) التمثيل من الدرجة الأولى

لنكتب العلاقات (XV-10) و (XV-11) في النقطة $M_0 \equiv m_0$ من الفضاء الإقليدي المماس في M_0:

$$(dM)_0 = dy^\mu \, (e_\mu)_0 \qquad \text{(XV-12)}$$

$$(de_\mu)_0 = (\Gamma^\nu_{\mu\rho})_0 \, (e_\nu)_0 \, dy^\rho. \qquad \text{(XV-13)}$$

فإذا كان التغيُّر $dy^\nu = y^\nu - y^\nu_0$ تفاضليا من الدرجة الأولى تكون الكميات (XV-13) و (XV-12) من الدرجة الأولى أيضاً.

ومن جهة ثانية إن المتَّجِهات $\overline{e}'_\mu \, (m')$ المحدَّدة في النقطة $m + dm$ من الفضاء الإقليدي والقريبة تفاضليا من النقطة m تكتب أيضا $\overline{e}_\mu + d\,\overline{e}_\mu$ في الفضاء الطبيعي في m مع:

$$dm = dy^\mu \; \overline{e}_\mu \qquad \text{(XV-14)}$$

$$d\,\overline{e}_\mu = \omega^\nu_\mu \; \overline{e}_\nu = \left\{ \begin{matrix} \overline{\nu} \\ \mu\rho \end{matrix} \right\} \; \overline{e}_\nu \, dy^\rho, \qquad \text{(XV-15)}$$

حيث الرموز التي فوقها خط تعود إلى الكميات المحسوبة من الموتِّر $g_{\mu\nu}$ للفضاء الإقليدي.

ونجد بشكل خاص في الفضاء الإقليدي المماس في M_0 على التشكيل القياسي:

$$(dm)_0 = dy^\mu \, (e_\mu)_0 \qquad \text{(XV-16)}$$

$$d(e_\mu)_0 = \left\{ \begin{matrix} \overline{\nu} \\ \mu\rho \end{matrix} \right\} (e_\nu)_0 \, dy^\rho. \qquad \text{(XV-17)}$$

لإثبات ذلك ننطلق من:

$$(\overline{e}_\mu)_0 = (e_\mu)_0. \qquad \text{(XV-18)}$$

وإذا قابلنا العلاقات (XV-12) و (XV-16) نجد:

$$(dM)_0 = (dm)_0 \qquad \text{(XV-19)}$$

أي:

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y^\mu} \right)_0 = \left(\frac{\partial m}{\partial y^\mu} \right)_0 = (e_\mu)_0. \qquad \text{(XV-20)}$$

ونستخلص نتائج المقطع الأول من تمثيل التشكيل القياسي تمثيلاً من الدرجة الأولى بالفضاء الإقليدي المماس على التشكيل القياسي في النقطة $M_0 \equiv m_0$.

ومن جهة ثانية نجد بشكل عام:

(XV-21) $$(de_\mu)_0 \neq d(e_\mu)_0.$$

وذلك لأن المتَّجِهات e_μ المماسة لخطوط الإحداثيات y^μ في التشكيل القياسي تطابق متَّجِهات الفضاء الطبيعي الإقليدي $\overline{e}_\mu$ في النقطة $M_0 \equiv m_0$ ولكنها لا تتطابق في النقطة القريبة تفاضليا: فتغيُّر الإحداثيات dy^ρ يقود إلى تغيُّر المتَّجِهات $(e_\mu)_0$ في التشكيل القياسي لتصبح $(e_\mu)_0 + (de_\mu)_0$ ولتصبح $(e_\mu)_0 + d(e_\mu)_0$ في الفضاء المماس. وهذه المتَّجِهات الجديدة ليست متساوية بشكل عام.

كذلك استناداً إلى (XV-13) و (XV-17) نجد:

(XV-22) $$(\Gamma^\rho_{\mu\nu})_0 \neq \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \mu\nu \end{matrix} \right\}_0.$$

وعكس ذلك إذا افترضنا أن:

(XV-23) $$(de_\mu)_0 = d(e_\mu)_0.$$

نجد إذا ضربنا عدديا بالمتَّجِه $(e_\mu)_0 = (\overline{e}_\mu)_0$ ثم بادلنا المؤشرات μ و ν وجمعنا المعادلتين:

(XV-24) $$(e_\nu)_0\,(de_\mu)_0 + (e_\mu)_0\,(de_\nu)_0 = (e_\nu)_0\,d(e_\mu)_0 + (e_\mu)_0\,d\,(e_\nu)_0$$

أي:

(XV-25) $$d(e_\mu)_0\,(e_\nu)_0 = (de_\mu e_\nu)_0$$

أو:

(XV-26) $$(dg_{\mu\nu})_0 = d(e_\mu)_0\,(e_\nu)_0 = d(g_{\mu\nu})_0.$$

وإذا حذفنا المؤشر (0) نجد بالقرب من كل النقطة M:

(XV-27) $$dg_{\mu\nu} = d(e_\mu \cdot e_\nu).$$

4) التمثيل من الدرجة الثانية

إذا أردنا مقارنــة التغيُّرات التفـاضلية في نقطتـين متقاربتـين علينا أن نستعمـل تمثيلاً من الدرجة الثانية للتشكيل القيـاسي في الفضاء الإقليـدي المماس في النقطـة M.

لنفترض مثلاً أن النقطة M تتبع مساراً مغلقاً تفاضلياً. لإعطـاء تمثيل للتغـيرات المتتـالية dM و de_μ علينـا ارجاعهـا إلى الفضاء الإقليـدي المماس في نقطـة معينـة $m_0 \equiv M_0$. ومن المناسب أن نختار هذه النقطة داخل المسار التفاضلي بحيث تكـون قريبة من كل نقط المسار.

لكـل نقطة M من التشكيـل القيـاسي تخصص نقطـة m من الفضــاء الإقليـدي المماس في النقطة m_0. والمتَّجهات الأحاديـة المماسـة على خطـوط الإحداثيـات y^μ في النقطة M يستدل عليها في الفضاء الإقليدي المماس في M_0 كما يلي:

$$e_\mu = (e_\mu)_0 + (\omega^\nu_\mu)_0 (e_\mu)_0 = (e_\mu)_0 + (\Gamma^\nu_{\mu\rho})_0 (y^\rho - y^\rho_0) (e_\nu)_0 \qquad \text{(XV-28)}$$

حيث أخذنا بعين الاعتبار (XV-13).

والانتقال من النقطة M والمتَّجهات $e_\mu(M)$ إلى النقطة M′ القريبة تفاضلياً وهيكل الإسناد الطبيعي $e_2'(M')$ يعبر عنه بالتغيرات (XV-10) و (XV-11):

$$dm = \omega^\mu e_\mu = dy^\mu e_\mu \qquad \text{(XV-10)}$$

$$de_\mu = \omega^\nu_\mu e_\mu = \Gamma^\nu_{\mu\rho}\, e_\mu\, dy^\rho. \qquad \text{(XV-11)}$$

المقيسة في الفضاء المماس في النقطة $M \equiv m$. وإذا قيست هذه التغيُّرات في الفضاء المـــاس في النقطـة الثـابتـة $M_0 \equiv m_0$. نجـد (بـإحـلال (XV-28) في (XV-10) و (XV-11)):

$$(dm)_0 = [dy^\mu + (\Gamma^\mu_{\nu\rho})_0 (y^\rho - y^\rho_0)\, dy^\nu]\, (e_\mu)_0 \qquad \text{(XV-29)}$$

$$(de_\mu)_0 = [\omega^\nu_\mu + (\Gamma^\nu_{\sigma\rho})_0 (y^\rho - y^\rho_0)\, \omega^\sigma_\mu]\, (e_\nu)_0. \qquad \text{(XV-30)}$$

هـذه العلاقـات التي تدخـل فيهـا الكميـات $(y^\rho - y^\rho_0)\, dy^\nu$ التي هي جـداء كميـات تفضالية من الدرجة الأولى تسمى التمثيل من الدرجة الثانية.

ونكتب استناداً إلى العلاقة (XV-29):

$$\left(\frac{\partial^2 m}{\partial y^\mu \partial y^\nu}\right)_0 = (\Gamma^\rho_{\nu\mu})_0\,(e_\rho)_0. \quad \text{(XV-31)}$$

ومن ثم

$$\left(\frac{\partial^2 m}{\partial y^\mu \partial y^\nu}\right)_0 \neq \left(\frac{\partial^2 m}{\partial y^\nu \partial y^\mu}\right)_0$$

أي أن الإنتقال dm غير صالح للتكامل بشكل عام.

ومن جهة ثانية إذا قابلنا (XV-29) و (XV-30) مع صيغ التغيُّرات الإقليدية المكتوبة حتى الدرجة الثانية (ضمنا).

$$dm_0 = \left[dy^\mu + \left\{\begin{matrix}\bar{\mu}\\ \nu\rho\end{matrix}\right\}_0 (y - y^\rho_0)\, dy^\nu\right] (e_\mu)_0 \quad \text{(XV-33)}$$

$$d(e_\mu)_0 = \left[(\omega^\nu_\mu)_0 + \left\{\begin{matrix}\bar{\nu}\\ \sigma\rho\end{matrix}\right\}_0 (y_\rho - y^\rho_0)\,(\omega^\sigma_\mu)_0\right] (e_\nu)_0 \quad \text{(XV-34)}$$

نجد:

$$\frac{\partial^2 m}{\partial y^\mu \partial y^\nu} \neq \left(\frac{\partial^2 m}{\partial y^\mu \partial y^\nu}\right)_0 ; \frac{\partial (e_\nu)_0}{\partial y^\mu} \neq \left(\frac{\partial e_\nu}{\partial y^\mu}\right)_0. \quad \text{(XV-35)}$$

بمعنى آخر يكون التشكيل القياسي مماساً في كل نقطة منه على فضاء إقليدي $\left(\left(\frac{\partial m}{\partial y^\mu}\right)_0 = \left(\frac{\partial M}{\partial y^\mu}\right)_0\right)$ ولكن هذا التماس ليس صحيحاً في الدرجة الثانية.

5) المتَّجِهات والموتِّرات المرتبطة بالتشكيلات القياسية

لنفترض تشكيلاً قياسياً والهيكل الإسنادي الطبيعي في كل نقطة M. مما يحدِّد الفضاء الإقليدي المماس المقترن بهذا التشكيل القياسي بالتقريب من نقطة إلى أخرى. في كل نقطة يتميز الفضاء بهيكل إسناد ذي موتِّر قياسي $g_{\mu\nu}$ بحيث إن:

$$(\bar{g}_{\mu\nu})_0 = (g_{\mu\nu})_0 \quad \text{(XV-9)}$$

لنفترض أن متَّجِهاً أو موتراً يحدَّد بمركَّباته في نظام المحاور في الفضاء الإقليدي المماس. نحصل هكذا على مجال متَّجِهي أو موتِّري في التشكيل القياسي.

إذا أجرينا تحويلاً في الإحداثيات وبالتالي تحويلاً في هيكل الإسناد الطبيعي في النقطة ذاتها M تتحول مركَّبات المتَّجِه أو الموتِّر كما بيّنا في الفصل الرابع عشر (انظر المعادلات (XIV-44) إلى (XIV-52))، طبعاً تتغير معامِلات التحويل $a^{\nu}_{\mu'}$ و $a^{\nu'}_{\mu}$ من نقطة إلى أخرى في التشكيل القياسي.

وفي كل نقطة M من التشكيل تنطبق التحديدات التي جاءت في الفصل الرابع عشر على الفضاء الإقليدي المماس. فالمركِّبات المخالفة للتغيُّر A^μ تحدَّد على المحاور e_μ بالصيغة:

(XV-36) $$A = A^\mu e_\mu$$

ومن جهة ثانية إذا شكلنا الجداء العددي (السلمي):

(XV-37) $$Ae_\mu = A^\mu$$

نحصل على المركبات الموافقة للتغيُّر للمتَّجه A. وترتبط هذه المركِّبات بالمركبات المخالفة للتغيُّر بالعلاقة (المشابهة لـ (XIV-5)):

(XV-38) $$A_\mu = (a^\rho e_\rho)\, e_\mu = g_{\mu\rho} A^\rho,$$

ونحدِّد كما في المعادلة (XIV-6) المركِّبات المخالفة للتغيُّر للموتِّر القياسي بحيث إن:

(XV-39) $$g_{\mu\rho} g^{\nu\nu} = \delta^\nu_\mu.$$

مما يتيح كتابة العلاقة العكسية للعلاقة (XV-38) بالصيغة التالية (كما فعلنا في الفصل الرابع عشر):

(XV-40) $$g^{\mu\rho} A_\rho = g^{\mu\rho} g_{\mu\sigma} A^\sigma = \delta^\nu_\sigma A^\sigma = A^\mu$$

ونعمِّم كما في الفصل الرابع عشر العلاقات (XV-38) و (XV-40) لمركِّبات أي موتِّر بمؤشرات موافقة للتغيُّر عددها p ومؤشرات مخالفة للتغيُّر عددها q فنجد:

(XV-41) $$A_{\mu'} = g_{\mu\rho}\, g_{\rho\sigma}\, A^{\rho\sigma} \;\;,\;\; A^{\mu\nu} = g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} A_{\rho\sigma}.$$

(XV-42) $$A^{\mu\nu\cdots}{}_{\rho\sigma\cdot\cdot} = g^{\mu\lambda} g^{\nu\tau}\ldots\ldots\, g_\rho \delta g_{\sigma\tau\ldots}\; A_{\lambda\tau\cdot\cdot}{}^{\delta\tau\cdots}$$

أخيراً يكتب الجداء السلمي كما في الصيغة (XIV-16) كما يلي:

(XV-43) $$A \cdot B = A^\mu B_\mu = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu.$$

ومعيار أو مربع قياس متَّجه A هو

$$|A|^2 = A_\mu A^\mu = g_{\mu\nu}\, A^\mu A^\nu$$

وبشكل خاص مربع قياس المتَّجِه $dM(dy^\rho)$ في الفضاء الإقليدي المماس في M هو:

$$|dM|^2 = dy_\mu dy^\mu = g_{\mu\nu}\, dy^\mu\, dy^\nu. \qquad \text{(XV-45)}$$

أخيراً يخضع الموتِّر القياسي $g_{\mu\nu}$ في كل نقطة M من التشكيل القياسي إلى القواعد (XIV-97) وما يليها من الفصل السابق:

لنفرض أن محدِّدة الموتِّر $g_{\mu\nu}$ هي g أي:

$$g = \text{dét.}\ g_{\mu\nu} \qquad \text{(XV-46)}$$

نستنتج كما المعادلة (XIV-10) وانطلاقاً من المعادلة (XV-39) أن:

$$\text{minor}\ g_{\mu\nu} = g g^{\mu\nu}. \qquad \text{(XV-47)}$$

وحسب قواعد اشتقاق derivation المحدِّدات نجد هنا أيضاً العلاقات (XIV-97) و (XIV-98) و (XIV-100) أي في كل نقطة M من التشكيل:

$$dg = g g^{\mu\nu}\, dg_{\mu\nu} = -\, g g_{\mu\sigma}\, dg^{\mu} \qquad \text{(XV-48)}$$

$$dg_{\mu\nu} = -\, g_{\mu\rho}\, g_{\nu\sigma}\, dg^{\rho\sigma} \qquad \text{(XV-49)}$$

$$dg^{\mu\sigma} = -\, g^{\mu\rho}\, g^{\nu\sigma}\, dg_{\rho\sigma} \qquad \text{(XV-50)}$$

سنحاول في ما يلي ربط المتَّجِهات والموتِّرات المحددة في نقطتين متقاربتين تفاضلياً من التشكيل. وهذا ممكن إذا كنا نعرف كيف نصل من نقطة إلى نقطة قريبة الفضاء الإقليدي المماس في كل نقطة أي إذا كنا نعرف الربط القريب للتشكيل.

6) الاشتقاق المكافىء

كتحديد نقول إن المتَّجِه $e'_\mu(M')$ متكافىء مع المتَّجِه $e_\mu(M)$ أو إن $e'_\mu(M')$ هو حصيلة نقل $e_\mu(M)$ بالتوازي إذا كانت صورة الأصل $e_\mu + de_\mu$ في الفضاء الإقليدي المماس في M متكافئة مع $e_\mu(M)$.

نحدِّد المتَّجِه A بمركِّباته المخالفة للتغير في كل نقطة. ونبني علاقة بين مركِّبات المتَّجِه $A(y^\rho)$ في M ومركِّبات المتَّجِه $A'(y'^\rho)$ في نقطة M' قريبة تفاضلياً من M وذلك من خلال الصورة $A + dA$ للمتَّجِه A' في الفضاء الإقليدي المماس في M. فيكوِّن المتَّجِه dA التغيُّر الحقيقي أو المطلق للمتَّجِه A عند الانتقال من M إلى M'.

ويعود هذا التغيير إلى تغيُّر المركِّبات المخالفة للتغيير A^μ عند الانتقـال من M إلى M′ وإلى التغير في هيكل الإسناد عند هذا الانتقال. فإذا كتبنا:

(XV-36) $$A = A^\mu e_\mu$$

نجد في الفضاء المماس في M:

(XV-51) $$dA = dA^\mu \cdot e_\mu + A^\mu de_\mu = (dA^\mu + \omega^\mu_\rho A^\rho)\, e_\mu = DA^\mu \cdot e_\mu.$$

فيكون التغيُّر الحقيقي لمركِّبات المتَّجِه A المخالفة للتغير في الفضاء المماس في النقطـة M:

(XV-52) $$\boxed{DA^\mu = dA^\mu + \omega^\mu_\sigma A^\sigma = dA^\mu + \Gamma^\mu_{\sigma\rho} A^\sigma dy^\rho.}$$

واستناداً إلى التحديد (XV-51) تشكل هذه التغيرات الحقيقية مركبات موتِّرية (بينما التغيرات dA^μ ليس لها صفة موتِّرية استناداً إلى (XV-52)). وتمثل dA^μ التفاضلية المطلقـة absolute differential للمركِّبـات المخالفـة للتغيُّر A^μ أو التغـيُّرات المطلقـة (المستقلة عن طريقة التمثيل المعتمدة) عند الانتقال من M إلى M′.

ونحدِّد المشتقة الموافقة للتغيُّر $D_\rho A^\mu$ (أو $A^\mu{}_{;\rho}$) للمركِّبات A^μ بأنها نسبة التغـيُّر المطلق DA^μ على التغير dy^ρ في الإحداثيات:

(XV-53) $$\boxed{D_\rho A_\mu \equiv A^\mu{}_{;\rho} \equiv \frac{DA^\mu}{dy^\rho} \equiv \partial_\rho A^\mu + \Gamma^\mu_{\sigma\rho} A^\sigma.}$$

ولهذه المشتقات الموافقة صفة موتِّرية محـدَّدة (مثلها مثـل DA^μ). ويمثل التفـاضل المطلق DA^μ المركِّبات المخالفة للتغـيُّر $(dA)^\mu$ للتغير dA بـالنسبة إلى القـاعدة e_μ في الفضاء الإقليدي المماس في M. وكذلـك التفاضـل المطلق DA_μ للمركِّبـات الموافقـة للتغير هي المركِّبات الموافقة للتغير $(dA)_\mu$ ذاته بالنسبة إلى القاعدة e_μ:

(XV-54) $$DA_\mu = (dA)_\mu = dA \cdot e_\mu.$$

وتكتب أيضاً هذه العلاقة بالصيغة:

(XV-55) $$DA_\mu = d(A \cdot e_\mu) - A \cdot de_\mu.$$

وإذا أخذنا بعين الاعتبار (XV-37) و (XV-11):

(XV-56) $$DA_\mu = dA_\mu - \omega^\sigma_\mu\, A\cdot e_\sigma.$$

نحصل على:

(XV-57) $$DA_\mu = dA_\mu - \omega^\sigma_\mu A_\sigma = dA_\mu - \Gamma^\sigma_{\mu\rho} A_\sigma dy^\rho.$$

ومنها نحصل بسهولة على المشتقة الموافقة $D_\rho A_\mu$ أو $A_{\mu\rho}$:

(XV-58) $$\boxed{D_\rho A_\mu \equiv A_{\mu\rho} = \frac{DA^\mu}{dy^\rho} = \partial_\rho A_\mu - \Gamma^\sigma_{\mu\rho}\, A_\sigma.}$$

والتحديد (XV-58) يقود حتماً إلى:

(XV-59) $$De_\mu \equiv de_\mu - \omega^\sigma_\mu\, e_\sigma \equiv 0.$$

ونجد أيضاً باستعمال (XV-54) و (XV-51):

(XV-60) $$(dA)_\mu = dA\cdot e_\mu = (DA^\rho)\, e_\rho \cdot e_\mu = g_{\mu\rho}\, DA^\rho$$

وإذا قارنا هذه النتيجة مع (XV-54) نجد:

(XV-61) $$DA_\mu = g_{\mu\rho}\, DA^\rho.$$

أن الشرط:

(XV-62) $$Dg_{\mu\nu} = 0.$$

ضروري لعدم تناقض الصيغ (XV-53) و (XV-58) في التشكيل القياسي حيث $A_\mu = g_{\mu\rho} A^\rho$. فإذا كان الشرط $Dg_{\mu\nu} = 0$ مستوفى أي إذا كانت مركّبات الموتّر $g_{\mu\nu} = (e_\mu \cdot e_\nu)$ قابلة للتفاضل وفي هذه الحالة فقط إذا أحللنا (XV-52) في (XV-62) نجد التحديد (XV-58).

ويمكن أن نعمّم بسهولة التحديدات (XV-53) و (XV-58) إلى الموتّر $A_{\mu\nu..}{}^{\lambda\sigma..}$. فالمشتقة الموافقة لهذا الموتّر هي:

(XV-63) $$\boxed{\begin{aligned} D_\rho A_{\mu\nu..}{}^{\lambda\sigma} \equiv A_{\mu\nu..}{}^{\lambda\sigma..}{}_\rho = \partial_\rho A_{\mu\nu..}{}^{\lambda\sigma} - \Gamma^\tau_{\mu\rho}\, A_{\tau\nu}{}^{\lambda\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\rho}\, A_{\mu\tau..}{}^{\lambda\sigma..} \\ + \Gamma^\rho_{\mu\rho}\, A_{\mu\nu..}{}^{\tau\sigma} + \Gamma^\sigma_\rho\, A_{\mu\nu..}{}^{\lambda\tau} \end{aligned}}$$

وفي الحالة الخاصة للموتّر الأساسي $g_{\mu\nu}$ نجد:

$$D_\rho g_{\mu\nu} = \partial_\rho g_{\mu\nu} - \Gamma^\sigma_{\mu\rho}\, g_\sigma - \Gamma^\sigma_{\nu\rho}\, g_{\mu\sigma}. \qquad \text{(XV-64)}$$

ويكتب الشرط (XV-60) إذاً بالصيغة:

$$\partial_{\rho\mu\nu} = \Gamma^\sigma_{\mu\rho}\,(e_\sigma e_\nu) + \Gamma^\sigma_{\nu\rho}\,(e_\mu e_\sigma). \qquad \text{(XV-65)}$$

واستناداً إلى (XV-11) يكتب بالصيغة:

$$\partial_\rho g_{\mu\nu} = (\partial_\rho e_\mu)e_\nu + (\partial_\rho e_\nu)e_\mu = \partial_\rho(e_\mu \cdot e_\nu). \qquad \text{(XV-66)}$$

إن الشرط (XV-60) يعني أن $g_{\mu\nu} = e_\mu \cdot e_\nu$ الصحيحة في النقطة M قابلة للتفاضل. وسنرى في المقطع القادم أن هذه الخاصية تعبِّر عن إمكانية تحديد مقياس الطول المطلق ذاته في كل نقطة من التشكيل القياسي[1].

7) الانتقال المتوازي لمتَّجِه

لنفترض أن الشرطين (XV-60) و (XV-66) مؤمنان. استناداً إلى (XV-52) و (XV-57) يكتب التغيير الحقيقي لمركَّبات متَّجِه نتيجة للتغير dy^ρ في الإحداثيات:

$$\text{(XV-67)}\ DA^\mu = dA^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\rho}\, A^\nu\, dy^\rho = (A^\mu + dA^\mu) - (A^\mu - \Gamma^\mu_{\nu\rho}\, A^\nu\, dy^\rho)$$

$$\text{(XV-68)}\ DA_\mu = dA_\mu - \Gamma^\sigma_{\mu\rho}\, A_\sigma\, dy^\rho = (A_\mu + dA_\mu) - (A_\mu + \Gamma^\sigma_{\mu\rho}\, A_\sigma\, dy^\rho).$$

فهو إذاً فرق كميتين:

ـــ الكمية الأولى $A^\mu + dA^\mu$ (أو $A_\mu + dA_\mu$) وهي القيمة التي تأخذها المركَّبات A^μ (أو A_μ) إذا نقل المتَّجِه A من M إلى M′ بأية طريقة.

ـــ الكمية الثانية $A^\mu - \Gamma^\mu_{\nu\rho}A^\nu dy^\rho$ (أو $A_\mu + \Gamma^\sigma_{\mu\sigma}A_\sigma dy^\rho$) وهي القيمة التي تأخذها المركَّبات A^μ (أو A_μ) إذا نقل المتَّجِه A من M إلى M′ بانتقال متواز. فيكون التغير في مركَّبات متَّجِه ينقل متوازياً على نفسه:

---

(1) وتعني كما سنرى في الملاحظة في أسفل الصفحة 479 أن التشكيل القياسي ليس له تقوُّس تشابه الوضع homothety curvature (انظر إلى المعادلات (19) و (20) في تلك الملاحظة).

$$(dA^{\mu})_{11} = -\Gamma^{\mu}_{\nu\rho} A^{\nu} dy^{\rho} \qquad \text{(XV-69)}$$

$$(dA_{\mu})_{11} = \Gamma^{\sigma}_{\mu\rho} A_{\sigma} dy^{\rho} \qquad \text{(XV-70)}$$

بهذا الاصطلاح يكون التغير الحقيقي في المركِّبات A^{μ} و A_{μ}:

$$DA^{\mu} = dA^{\mu} - (dA^{\mu})_{11} \qquad \text{(XV-71)}$$

$$DA_{\mu} = dA_{\mu} - (dA_{\mu})_{11} \qquad \text{(XV-72)}$$

ويساوي الفرق بين التغيرات في مركِّبات المتَّجِه المنقول من M إلى M′ بـأية طـريقة والتغيرات الناتجة عن انتقال متواز.

وإذا كـان المتَّجِـه $A'(M')$ ينتـج فعـلاً عن انتقـال متـواز للمتَّجِـه $A(M)$ نجـد $dA^{\mu} = (dA^{\mu})_{11}$ وبالتالي استناداً إلى (XV-71) و (XV-72):

$$DA^{\mu} \equiv 0 \qquad \text{(XV-73)}$$

$$DA^{\mu} \equiv 0. \qquad \text{(XIV-74)}$$

وتعني هذه النتيجة أنه: إذا نُقل متَّجِـه متوازيـاً على نفسـه يكون التفـاضل المطلق لمركِّباته منعدماً وبالتالي تكون مشتقته الموافقة منعدمة.

نستنتـج من التحـديـدات (XV-51) أن الصـورة $A + dA$ للمتَّجِـه $A'(M')$ في الفضـاء الإقليدي المماس على التشكيل القياسي في النقطة M تكون مساوية للمتَّجه A إذا كان المتَّجِه A′ نـاتجاً عن انتقـال A متوازيـاً على نفسـه. يعني هذا أن مفهـوم التوازي في نقطتين متقاربتين تفاضلياً يعبَّـر عنه بـالتوازي في المعنى العـادي للكلمة أي تساوي مركِّبات المتَّجِه A ومـركِّبات المتَّجِـه $A + dA$ (الذي هـو صورة A′) في الفضـاء الإقليدي المماس.

نشير أخيراً أنه إذا كان المتَّجِه A ينقل متوازياً مـع نفسه يجب أخـذ الشرط التالي بعين الاعتبار:

$$DA^{\mu} = 0 \quad \text{:أو} \qquad dA^{\mu} = -\Gamma^{\mu}_{\sigma\rho} A^{\sigma} dy^{\rho} \qquad \text{(XV-74)}$$

لحساب تغير مربع قياس هذا المتَّجِه :

$$d(\ell^2) = d(g_{\mu\nu} A^{\mu} A^{\nu}) = dg_{\mu\nu}.\, A^{\mu} A^{\nu} + 2 g_{\mu\sigma} A^{\nu} dA^{\mu}. \qquad \text{(XV-75)}$$

فإذا أحللنا (XV-74) في (XV-75) وأخذنا الصيغة (XV-64) بعين الإعتبار نجد:

$$d(\ell^2) = dg_{\mu\nu} \,.\, A^\mu A^\nu - 2g_{\mu\nu}A^\nu\, \Gamma^\mu_{\sigma\rho}\, A^\sigma\, dy^\rho \tag{XV-76}$$

$$= (dg_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\mu\rho}\, g_{\lambda\nu}\, dy^\rho - \Gamma^\lambda_{\nu\rho}\, g_{\lambda\nu}\, dy^\rho)\, A^\mu A^\nu$$

$$= (Dg_{\mu\nu})\, A^\mu A^\nu$$

يعبِّر الشرط (XV-62) (أي $Dg_{\mu\nu} = 0$) إذاً عن المحافظة على قيـاس المتَّجِه إذا نقـل متوازياً على نفسه.

وبشكل خاص المتَّجِهات e_μ تُنقل دائماً متوازية على نفسها لأن ($De_\mu \equiv de_\mu - \Gamma^\sigma_{\mu\rho} e_\sigma dy^\rho = 0$). فتحـافظ إذاً عـلى قيـاسهـا في كـل نقط التشكيـل القيـاسي. مما يعني بفضـل هذا الشرط (XV-62) أنـه يمكن تحديـد مقيـاس مطلق للطول.

8) شروط قابلية التكامل وتكوين الفضاء

1.8 ـ الفضاء الإقليدي

يكون الفضاء إقليدياً إذا كانت شروط قابلية التكامل للكميات:

$$dm = e_\mu\, dy^\mu \tag{XV-10}$$

$$de_\mu = \omega^\nu_\mu\, e_\nu = \Gamma^\nu_{\mu\rho}\, e_\nu\, dy^\rho \tag{XV-11}$$

متوفرة. فنجد إذا حسبنا التكامل على مسار مغلق تفاضلي

$$\oint dm = 0 \tag{XV-77}$$

$$\oint de_\mu = 0 \tag{XV-78}$$

أ ـ قابلية dm للتكامل: يعبِّر عن هذا الشرط بتناظر معامِل الارتباط التآلفي.

فعلاً إذا كان التغير dm قابلاً للتكامل يكون التغيير dm مستقلاً عن المسـار المتَّبع للذهاب من m_0 إلى m في الفضـاء الإقليدي المماس. نجد إذاً:

$$\partial_\mu \partial_\nu m = \partial_\nu \partial_\mu m \tag{XV-79}$$

أو استناداً إلى (XV-10):

(XV-80) $\partial_\mu e_\nu = \partial_\nu e_\mu.$

وإذا أخذنا (XV-11) بعين الاعتبار نجد كما للمعادلة (XIV-90):

(XV-81) $\Gamma^\rho_{\mu\nu}\, e_\rho = \Gamma^\rho_{\nu\mu}\, e_\rho$

أي[2]:

(XV-82) $$\boxed{\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \Gamma^\rho_{\nu\mu}}$$

ب ـ قابلية de_μ للتكامل: يعبر عن هذا الشرط ببعض القيود التي يجب أن تخضع لها مركِّبات الموتِّر الأساسي $g_{\mu\nu}$ ومشتقاته من الدرجة الأولى والثانية[3] فإذا كان بالإمكان إيجاد نظام إحداثيات بحيث تستوفي المركِّبات $g_{\mu\nu}$ هذه الشروط يكون الفضاء إقليدياً. لم نكتب هذه القيود في الفصل الرابع عشر ولكن أخذنا بعين الاعتبار النتيجة التالية لقابلية de_μ للتكامل:

1 ـ لا يتغير مقياس الطول A المحدَّد في الفضاء المماس الإقليدي إذا نُقل متوازياً على نفسه على مسار مغلق تفاضلي[4]. وبالفعل إذا كان ℓ طول المقياس A نجد استناداً إلى (XV-76):

(XV-76) $d(\ell^2) = (Dg_{\mu\nu})\, A^\mu\, A^\nu.$

حيث وضعنا:

(XV-83) $Dg_{\mu\nu} = dg_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\mu\rho}\, g_{\lambda\nu}\, dy^\rho - \Gamma^\lambda_{\nu\rho}\, g_{\mu\lambda}\, dy^\rho.$

ينعدم التغير $d(\ell^2)$ إذا $Dg_{\mu\nu} = 0$ أي استناداً إلى (XV-66) إذا:

(XV-66) $d_\rho g_{\mu\nu} = d_\rho\, (e_\mu\, e_\nu).$

أي أن العلاقة $g_{\mu\nu} = (e_\mu \cdot e_\nu)$ صالحة للتفاضل.

---

(2) تعني هذه الخاصية غياب الفتل torsion في الفضاء الإقليدي (انظر المعادلة (5) من الملاحظة في أسفل الصفحة 479).

(3) تعني هذه القيود غياب التقوُّس أي الموتِّر $R^\nu_{\mu\rho\sigma}$ (انظر المعادلة (5) في الملاحظة في أسفل الصفحة 479).

(4) يعني هذا أن الفضاء ليس له تقوّس تشابه الوضع.

لقد استعملنا ضمنا في الفصل الرابع عشر (أنظر (XV-86)) العلاقتين (XV-82) و (XV-66) الصالحتين في الفضاء الإقليدي بغية تحديد صيغة الارتباط التآلفي تبعا لـ $g_{\mu\nu}$ ومشتقاتها. ويكفي الشرطان (XV-82) و (XV-66) للوصول إلى هذا الهدف. وفعلاً إذا وسعنا (XV-66) نجد:

$$D_\rho g_{\mu\nu} = 0 \qquad \text{(XV-84)}$$

أي: $d_\rho g_{\mu\nu} = \Gamma^{\sigma}_{\mu\rho} g_{\sigma\nu} + \Gamma^{\sigma}_{\nu\rho} g_{\mu\sigma}$

وإذا فعلنا كما للمعادلة (XIV-92) آخذين بعين الاعتبار (XV-82) نجد النتائج التي وصلنا إليها سابقاً وهي:

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\}. \qquad \text{(XV-85)}$$

مع:

$$\left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\} = \frac{1}{2} \; g^{\rho\sigma} \left(\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}\right). \qquad \text{(XV-86)}$$

أي أن الارتباط التآلفي في الفضاء الإقليدي يساوي رموز كريستوفل في كل نقطة.

ولكن هـذا الشرط المستوفى في الفضـاء الإقليدي غـير كـاف لتحـديـد بنيـة هـذا الفضـاء. فهو يعبـر فعـلاً عن (XV-82) و (XV-66) أي (XV-77) وإحـدى نتـائـج (XV-78). ويتحقق الشرط (XV-78) (أي يكـون الفضاء إقليـدياً) إذا كـان الارتباط التآلفي المعبَّر عنه بـ (XV-85) يخضع إضافة إلى ذلـك إلى بعض القيود التي تعني تماماً غياب التقوّس. فـإذا لم يكن الأمر كـذلك أي إذا لم يكن ممكنـاً اختيار نظـام إحـداثيات بحيث يكـون الارتبـاط القـريب $\left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\}$ يخضـع للشروط النـاتجـة عن (XV-78) عندئذ يكون الفضاء ريمانياً.

2.8 ـ الفضاء الريماني

يكون الفضاء ريمانياً إذا خضع للشروط التالية:

أ ـ التغير dm قابل للتكامل:

$$\int dm = 0 \qquad \text{(XV-77)}$$

ويعبَّر عن هذا الشرط بتناظر معامِل الارتباط التآلفي:

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \Gamma^{\rho}_{\nu\mu} \qquad \text{(XV-82)}$$

ب ـ تحديد مقياس مطلق للطول ممكن: إذا عدنا إلى (XV-66) يعني هـذا الشرط أن:

$$D_\rho g_{\mu\nu} = 0 \quad \text{أو:} \quad d_\rho\, g_{\mu\nu} = d_\rho\, (e_\mu \cdot e_\nu) \qquad \text{(XV-87)}$$

ومن المعادلات (XV-82) و (XV-87) نجد كما في حالة الفضاء الإقليدي:

$$\boxed{\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\}} \qquad \text{(XV-85)}$$

ج ـ لكن التغيير de_μ ليس قابلاً للتكامل: وهذا يعني أنه من غير الممكن أن نختار نظام إحداثيات بحيث تخضع المركّبات $g_{\mu\nu}$ للشروط الناتجة عن (XV-78). فالفضاء إذاً مقوَّس. سندرس هذا التقوُّس في المقطع التاسع.

3.8 ـ التشكيل القياسي بشكل عام

قبل دراسة الحالة الخاصة للفضاء الريماني لندرس خصائص التشكيل القياسي بشكل عام بحيث يكون التغيران dm و de_μ غير قابلين للتكامل[5].

(5) يمكن معالجة التكاملات (XV-88) و (XV-89) بالطريقة ذاتها التي سنستعملها في دراسة الفضاء الريماني في المقطع 9 §.

لنتفحص المسار المغلق المؤلَّف من متوازي الأضلاع التفاضلي ذي الأضلاع الناتجة عن التغيرات d و δ. فتكون مساحته:

$$ds^{\sigma\rho} = \frac{1}{2}\ (dy^\sigma\, \delta y^\rho + dy^\rho\, \delta y^\sigma) \qquad (1)$$

ويمكن أن نبدل التكاملات (XV-88) و (XV-89) المحسوبة على هذا المسار إلى تكاملات سطوح باستعمال قاعدة ستوكس فنجد:

$$\int dm = \int\!\!\int (dm)' \ , \quad \int de_\mu = \int\!\!\int (de_\mu)' \qquad (2)$$

حيث وضعنا:

$$(dm)' = d\delta m - \delta dm \quad , \quad (de_\mu)' = d\delta e_\mu - \delta de_\mu . \qquad (3)$$

يتم حساب $(dm)'$ و $(de_\mu)'$ كما هو محدَّد في المعادلات (3) بدون صعوبة باستعمال العلاقات (XV-29) و (XV-30) المتعلقة بالفضاء الإقليدي المماس في النقطة الثابتة M_0 المتقاربة تفاضليا من كل نقط المسار. فإذا أحللنا (XV-29) و (XV-30) في المعادلات (3) وأهملنا الدرجة الثالثة نجد:

أ ـ من جهة:

$$(dm)' = \Omega^\rho e_\rho \qquad (4)$$

حيث وضعنا:

$$\Omega^\rho = -\,(\Gamma^\rho_{\ \mu\nu} - \Gamma^\rho_{\ \nu\mu})\, ds^{\mu\nu}. \qquad (5)$$

الكميات Ω^{ρ} تشكل مركّبات متجه يمثل الفتل التشكيل القياسي. الشرط (XV-82) يقود إذا إلى عدم وجود هذا الفتل. وبالعكس اختفاء الفتل هذا يظهر في تناظر معامل الارتباط التآلفي (كما يظهر من المعادلة (5)).

ب ـ من جهة ثانية:

$$(de_{\mu})' = \Omega^{\nu}_{\mu}\, e_{\nu} \tag{6}$$

مع:

$$\Omega^{\nu}_{\mu} = -\, R^{\nu}_{\mu\rho\sigma}\, ds^{\rho\sigma} \tag{7}$$

حيث:

$$R^{\nu}_{\mu\rho\sigma} = \partial_{\sigma}\, \Gamma^{\nu}_{\ \mu\rho} - \partial_{\rho}\, \Gamma^{\nu}_{\ \mu\sigma} + \Gamma^{\lambda}_{\ \mu\rho}\, \Gamma^{\nu}_{\ \lambda\sigma} - \Gamma^{\lambda}_{\ \mu\sigma}\, \Gamma a^{\nu}_{\ \lambda} a^{\nu}_{\lambda\rho} \tag{8}$$

الموتّرات Ω^{ν}_{μ} و $R^{\nu}_{\mu\rho\sigma}$ تمثل تقوّس التشكيل القياسي. وبشكل خاص:

$$\int dl = l \int\int \Omega \tag{9}$$

حيث:

$$\Omega = \Omega_{\mu}{}^{\mu} = -\, R^{\mu}{}_{\mu\rho\sigma}\ ds^{\rho\sigma}. \tag{10}$$

الكمية Ω الثابتة في التحويل تسمى تقوّس تشابه الوضع أو التقوّس المجزأ للتشكيل. أما الموتّر Ω^{ν}_{μ} الذي يحسب منه التقوّس Ω فهو التقوّس الدوراني. ونجد استنادا إلى المعادلات (10) و (8) أن:

$$\Omega = -\, (\partial_{\sigma}\, \Gamma^{\mu}{}_{\mu\rho} - \partial_{\rho}\, \Gamma^{\mu}{}_{\mu\sigma})\, ds^{\rho\sigma}. \tag{11}$$

ولا يتغيّر مقياس الطول على المسار المغلق $\left(\int dl=0\right)$ إذا:

$$\Gamma^{\mu}{}_{\mu\rho} = \partial_{\rho}\, \psi. \tag{12}$$

حيث ψ أية دالّة. وهذا هو الحال في الفضاء الإقليدي والفضاء الريماني حيث المعادلة (12) مستوفاة دائما. وبالفعل نجد (انظر إلى (XIV-103)):

$$\Gamma^{\nu}{}_{\mu\rho} = \left\{ {\mu \atop \mu\rho} \right\} = \frac{1}{2}\ g^{\mu\sigma}\, \partial_{\rho} g_{\mu\sigma} = \frac{1}{2\,g}\ \partial_{\rho} g = \partial_{\rho} \log \sqrt{-g}. \tag{13}$$

أ ـ هكذا يتميز التشكيل القياسي بفتل واحد وتقوّسين:

$$\boxed{\Omega^{\mu} \neq 0\ \ ,\ \ \Omega^{\mu}{}_{\nu} \neq 0\ \ ,\ \ \Omega \neq 0} \tag{14}$$

بحيث إن:

$$\boxed{\Gamma^{\rho}_{\ \mu\nu} \neq \Gamma^{\nu\rho}_{\ \ \nu\mu}\ \ ,\ R^{\mu}_{\nu\rho\sigma} \neq 0\ \ ,\ \ d_{\rho} g_{\mu\nu} \neq d_{\rho}\, (e_{\mu} \cdot e_{\nu}).} \tag{15}$$

ب ـ التشكيل القياسي الريماني هو بدون فتل وله تقوّس واحد فتكون شروط بنيته:

$$\boxed{\Omega^{\mu} = 0\ \ ,\ \ \Omega^{\mu}{}_{\nu} \neq 0\ \ ,\ \ \Omega = 0} \tag{16}$$

ويعبر عنها بالعلاقات:

$$\boxed{\Gamma_{\mu\nu} = \Gamma^{\rho}_{\ \nu\mu}\ \ ,\ R^{\nu}_{\mu\rho\sigma} \neq 0\ \ ,\ \ d_{\rho} g_{\mu\nu} = d_{\rho}\, (e_{\mu} \cdot e_{\sigma}).} \tag{17}$$

$$\int dm \neq 0 \qquad \text{(XV-88)}$$

$$\int de_{\mu} \neq 0 \qquad \text{(XV-89)}$$

إستناداً إلى المعادلة (XV-88) إن صورة مسار تفاضلي مغلق في الفضاء الإقليدي المماس ليست مغلقة: نقول إن الفضاء ذو فتل.

ومن جهة ثانية استناداً إلى المعادلة (XV-89) إن مقياس الطول لا يمكن توجيهه وبشكل عام لا يمكن نقله. نقول إن للتشكيل القياسي تقوُّس دوران. وإذا لم يكن نقل مقياس الطول ممكناً نقول إن للتشكيل تقوُّساً مجزأ. وإذا كان للتشكيل تقوُّس مجزأ لا يمكن أن نحدِّد مقياساً مطلقاً للطول أي مقياساً واحداً في كل نقطة من التشكيل. ولكن هذا التقوُّس المجزأ يمكن أن يختفي وبالتالي يمكن تحديد مقياس مطلق للطول دون أن يكون التغير de_{μ} قابلاً للتكامل. نقول في هذه الحالة إن للتشكيل ثباتاً في المعيار Gauge invariant (ويل H.Weyl). وإذا لم يكن للتشكيل فتل إضافة إلى ذلك تكون بنية التشكيل ريمانية.

9) تقوُّس فضاء ريمان ـ موتِّر ريمان كريستوفل

في حالتي الفضاء الإقليدي والفضاء الريماني يقود شرطا قابلية dm للتكامل وثبات المعيار إلى:

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\}. \qquad \text{(XV-85)}$$

= ج ـ أخيراً التشكيل القياسي الإقليدي (حيث dm و de_{μ} قابلة للتكامل) ليس له فتل ولا تقوُّس:

$$\Omega^{\mu} = 0 \ , \ \Omega^{\mu}_{\nu} = 0 \ , \ \Omega = 0 \qquad (18)$$

وهي شروط معادلة للشروط:

$$\Gamma^{\rho}_{\ \mu\nu} = \Gamma^{\rho}_{\ \nu\mu} \ , R^{\mu}_{\nu\rho\sigma} = 0 \ , \ d_{\rho}g_{\mu\nu} = d_{\rho}\,(e_{\mu} \cdot e_{\nu}). \qquad (19)$$

وتعبر عن الشروط الأولى والأخيرة من (17) و (19) المشتركتين للتشكيلات الريمانية والإقليدية بالمعادلة:

$$\Gamma^{\rho}_{\ \mu\nu} = \left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\} \qquad (20)$$

يرجع إلى [26] M.A. TONNELAT و [30] E. CARTAN.

والاختلاف بين الفضاء الريماني والفضاء الإقليدي يظهر لدى حساب التكامل:

$$\int de_\mu \tag{XV-90}$$

على مسار مغلق تفاضلي. فإذا كان بـالإمكان اختيـار نظام إحـداثيات بحيث ينعـدم التكامل (XV-90) يكون الفضاء إقليديا. أمـا إذا كان هـذا الاختيار مستحيـلاً فإن الشرط $\int de_\mu \neq 0$ يتيح تحديد تقوُّس. وهذا التقوُّس هو صفة مميزة لفضاء ريمان.

إذا طـرأ عـلى الإحـداثيـات تغـير dy^ρ يحـدث تغـيُّر في المتجـه $e_\mu(M)$ ليصبـح $e'_\mu\,(y^\rho + dy^\rho)$ وتكون صورة هذا المتجه في الفضـاء الإقليدي المماس في النقطة M المتَّجِه $e\mu + de_\mu$ بحيث إن:

$$de_\mu = \omega_\mu^\nu e_\nu = \left\{ \begin{matrix} \nu \\ \mu\sigma \end{matrix} \right\} e_\nu\, dy^\sigma \tag{XV-91}$$

لأن الارتبـاط التآلفي في التشكيـل الريمـاني له الصيغـة (XV-85). وكما فعلنـا في المقطـع §4 ندرس التغـيرات المتلاحقـة للمتَّجه e_μ في الفضـاء الإقليـدي المماس في النقطة M_0 القريبة تفاضلياً من كل نقط المسار. فنجد كما في المعادلة (XV-30):

$$(de_\mu)_0 = \left[\omega_\mu^\nu + \left\{ \begin{matrix} \nu \\ \sigma\rho \end{matrix} \right\}_0 (y^\rho - y_0^\rho)\, \omega_\mu^\sigma\right] (e_\nu)_0. \tag{XV-92}$$

لنحسب تكامل (XV-92) على مسار C له شكل متوازي الأضلاع تنتـج ضلوعـه عن التغيرات d و δ. تتيح قاعدة ستوكس الرياضية تحويل التكامل عـلى مسار (XV-90) إلى التكامل السطحي:

$$\int de_\mu = \int\int d\delta e_\mu - \delta d e_\mu = \int\int (de_\mu)' \tag{XV-93}$$

حيث وضعنا:

$$(de_\mu)' = d\delta e_\mu - \delta d e_\mu. \tag{XV-94}$$

وإذا أحللنا الصيغة (XV-92) في هذه الصيغة نجد:

$$\begin{aligned}(de_\mu)' = {} & d\left[\omega_\mu^\nu(\delta) + \left\{ \begin{matrix} \nu \\ \sigma\rho \end{matrix} \right\}_0 (y^\rho - y_0^\rho)\, \omega_\mu^\sigma(\delta)\right] (e_\nu)_0 \\ & - \delta\left[\omega_\mu^\nu(d) + \left\{ \begin{matrix} \nu \\ \sigma\rho \end{matrix} \right\}_0 \omega_\mu^\sigma(d)\right] (e_\mu)_0\end{aligned} \tag{XV-95}$$

أي:

$$(XV\text{-}96) \qquad (de_\mu)' = \Big[(\omega_\mu^\nu)' + \left\{ {\nu \atop \sigma\rho} \right\}_0 [dy^\rho\, \omega_\mu^\sigma\,(\delta) - \delta y^\rho\, \omega_\mu^\sigma\,(d)] + \left\{ {\nu \atop \sigma\rho} \right\}_0 (y^\rho - y_0^\rho)\, \omega_\mu^\sigma\Big]\,(e_\nu)_0$$

حيث وضعنا:

$$(XV\text{-}97) \qquad (\omega_\mu^\nu)' = d\omega_\mu^\nu\,(\delta) - \delta\omega_\mu^\nu\,(d)$$

الحدّان الأولان في الجانب الأيمن من المعادلة (XV-96) هما من الدرجة الثانية في التغيرات d و δ. فإذا أهملنا الحدود من الدرجة الثالثة أي الحد الثالث في الصيغة (XV-96) والفرق بين $\left\{ {\mu \atop \nu\rho} \right\}$ و$\left\{ {\mu \atop \nu\rho} \right\}_0$ نجد:

$$(XV\text{-}98) \qquad (de_\mu)' = \Big[(\omega_\mu^\nu)' + \left\{ {\nu \atop \sigma\rho} \right\} [dy^\rho\, \omega_\mu^\sigma\,(\delta) - \delta y^\rho\, \omega_\mu^\sigma\,(d)]\Big]\,(e_\nu)_0$$

وإذا أخذنا بعين الاعتبار المعادلة (XV-91) التي تكتب أيضاً بالصيغة:

$$(XV\text{-}99) \qquad \omega_\mu^\nu(d) = \left\{ {\nu \atop \mu\rho} \right\} dy^\rho \quad , \quad \omega_\mu^\nu(\delta) = \left\{ {\nu \atop \mu\rho} \right\} \delta y^\rho,$$

تصبح الصيغة (XV-98):

$$(XV\text{-}100) \qquad (de_\mu)' = \left\{ (\omega_\mu^\nu)' + \omega_\sigma^\nu\,(d)\, \omega_\mu^\sigma\,(\delta) - \omega_\sigma^\nu\,(\delta)\, \omega_\mu^\sigma\,(d) \right\} (e_\mu)_0.$$

أي:

$$(XV\text{-}101) \qquad (de_\mu)' = \left\{ (\omega_\mu^\nu)' - [\omega_\mu^\sigma\, \omega_\sigma^\nu] \right\} (e_\nu)_0.$$

حيث وضعنا:

$$(XV\text{-}102) \qquad [\omega_\mu^\sigma\, \omega_\mu^\nu] = \omega_\mu\,(d)\, \omega_\sigma^\nu\,(\delta) - \omega_\mu^\sigma\,(\delta)\, \omega_\sigma^\nu\,(d).$$

الصيغة (XV-100) للتغيرات $(de_\mu)'$ تقودنا إلى تحديد الموتّر من الرتبة الثانية ذي المركبات:

$$(XV\text{-}103) \qquad \Omega_\mu^\nu = (\omega_\mu^\nu)' - [\omega_\mu^\sigma\, \omega_\sigma^\nu].$$

فيكون تكامل de_μ بالصيغة:

$$\int de_\mu = \int \int \Omega_\mu{}^\nu e_\nu. \qquad \text{(XV-104)}$$

الموتِّر $\Omega_\mu{}^\nu$ يحدِّد انحناء فضاء ريمان.

ويمكن أن نكتب الصيغة (XV-103) بالصيغة التفصيلية:

$$\Omega_\mu^\nu = \left(\left\{ {\nu \atop \mu\rho} \right\} \delta y^\rho \right) - \delta \left(\left\{ {\nu \atop \mu\rho} \right\} dy^\rho \right) - \left\{ {\sigma \atop \mu\rho} \right\} dy^\rho \left\{ {\nu \atop \sigma\lambda} \right\} \delta y^\lambda + \left\{ {\sigma \atop \mu\rho} \right\} \delta y^\rho \left\{ {\nu \atop \sigma\lambda} \right\} dy^\lambda \qquad \text{(XV-105)}$$

حيث أخذنا بعين الاعتبار (XV-99) ونلاحظ أن (XV-105) تكتب أيضاً:

$$\Omega_\mu^\nu = \left(\partial_\lambda \left\{ {\nu \atop \mu\rho} \right\} + \left\{ {\sigma \atop \mu\rho} \right\} \left\{ {\nu \atop \sigma\lambda} \right\} \right) dy^\lambda \delta y^\rho \left(\partial_\lambda \left\{ {\nu \atop \mu\rho} \right\} + \left\{ {\sigma \atop \mu\rho} \right\} \left\{ {\nu \atop \sigma\lambda} \right\} \right) dy^\rho \delta y^\lambda \qquad \text{(XV-106)}$$

وأيضا إذا بادلنا المؤشرين الصامتين λ و ρ في الحدين الأخيرين:

$$\Omega_\mu^\nu = \left(\partial^\lambda \left\{ {\nu \atop \mu\rho} \right\} - \partial^\rho \left\{ {\nu \atop \mu\lambda} \right\} + \left\{ {\sigma \atop \mu\rho} \right\} \left\{ {\nu \atop \sigma\lambda} \right\} \right. \qquad \text{(XV-107)}$$

$$\Omega_\mu^\nu = \left(\partial^\lambda \left\{ {\nu \atop \mu\rho} \right\} - \left\{ {\sigma \atop \mu\lambda} \right\} \left\{ {\nu \atop \sigma\rho} \right\} \right) dy^\lambda \delta y^\rho. \qquad \text{(XV-107)}$$

نجد الصيغة التي هي بين القوسين مخالفة التناظر بالمؤشرات ρ و λ. يمكن إذاً إظهار مساحة متوازي الأضلاع التفاضلي المبني على التغيرات δ– و d:

$$ds^{\lambda\rho} = \frac{1}{2} \left(dy^\lambda \delta y^\rho - dy^\rho \delta y^\lambda \right). \qquad \text{(XV-108)}$$

فنجد هكذا:

$$\Omega_\mu^\nu = \left(\partial_\lambda \left\{ {\nu \atop \mu\rho} \right\} - \partial_\rho \left\{ {\nu \atop \mu\lambda} \right\} + \left\{ {\sigma \atop \mu\rho} \right\} \left\{ {\nu \atop \sigma\lambda} \right\} - \left\{ {\sigma \atop \mu\lambda} \right\} \left\{ {\nu \atop \sigma\rho} \right\} \right) ds^{\lambda\rho}. \qquad \text{(XV-109)}$$

لنضع:

$$G_{\mu\rho\lambda}^\nu = \partial_\lambda \left\{ {\nu \atop \mu\rho} \right\} - \partial_\rho \left\{ {\nu \atop \mu\lambda} \right\} + \left\{ {\sigma \atop \mu\rho} \right\} \left\{ {\nu \atop \sigma\lambda} \right\} - \left\{ {\sigma \atop \mu\lambda} \right\} \left\{ {\nu \atop \sigma\rho} \right\} \qquad \text{(XV-110)}$$

فتكتب المركّبات Ω^{ν}_{μ} لموتّر. التقوّس بالصيغة التالية[6]:

(XV-111)
$$\Omega^{\nu}_{\mu} = - G^{\lambda}_{\mu\rho\lambda}\, ds^{\rho\lambda}$$

موتّر التقـوّس ذو المركّبـات $G_{\mu\rho\lambda}{}^{\nu}$ يسمى موتّـر ريمان ـ كـريستوفـل واستناداً إلى (XV-110) يمكن أن نكتب دائماً:

(XV-112)
$$G^{\mu}_{\mu\rho\lambda} = \partial_{\lambda} \left\{ {\mu \atop \mu\rho} \right\} - \partial_{\rho} \left\{ {\mu \atop \mu\lambda} \right\}$$

وإذا أخذنا بعين الاعتبار صيغة الرموز:

(XV-113)
$$\left\{ {\mu \atop \mu\rho} \right\} = \frac{1}{2}\; g^{\mu\sigma}\partial_{\rho}g_{\mu\sigma} = \frac{1}{2\,g}\;\partial_{\rho}g = \frac{1}{2}\;\partial_{\rho}\log g$$

يمكن أن نكتب (XV-112) بالصيغة:

(XV-114)
$$G^{\mu}_{\mu\rho\lambda} \equiv \frac{1}{2}\;(\partial_{\lambda}\partial_{\rho}\log g - \partial_{\rho}\partial_{\lambda}\log g) \equiv 0.$$

ونتأكد من أن:

(XV-115)
$$\Omega = \Omega^{\mu}{}_{\mu} = - G^{\mu}_{\mu\rho\lambda}\, ds^{\rho\lambda} = 0.$$

الكمية Ω الثابتة والمحسوبة من موتّر ريمان ـ كريستوفل تمثل تقوّس تشابه الوضع (أنظر المعادلة (5) الصفحـة 479). وتنعدم هذه الكمية بالتطابق في فضاء ريمان.

ونختصر النتيجة التي وصلنا إليها فنقول إن ارتباط فضاء ريمان يحدَّد بالصيغة (XV-85) مثل الفضاء الإقليـدي. إضافـة إلى ذلك (ومثـل الفضاء الإقليـدي) يتميز الفضاء الريماني بما يلي:

ـــ إنعدام الفتل:

$$\Omega^{\mu} = 0\;(\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \Gamma^{\rho}_{\nu\mu})$$

ـــ إنعدام تقوّس تشابه الوضع:

$$\Omega = 0.$$

(6) الموتّر $G^{\mu}_{\mu\rho\lambda}$ ما هو إلاّ الموتّر $R^{\nu}_{\mu\rho\lambda}(\{\;\})$ أي موتر تقوّس تشكيل من أي نوع كان حيث استبدلت الرموز $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$ بمعامل الارتباط التآلفي $\left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\}$ (انظر المعادلة (5) في الملاحظة في أسفل الصفحة 479).

ولكنه يتميز عن الفضاء الإقليدي بالتقوُّس غير المنعدم:

$$\Omega^{\nu}_{\mu} = -\ G^{\nu}_{\mu\rho\sigma}\ ds^{\rho\sigma} \neq 0.$$

هكذا إذا انتقل متَّجه A متوازياً على نفسه على مسار مغلق وتفاضلي في فضاء ريمان يقود تغير مركّباته الموافقة للتغيُّر:

$$dA_{\mu} = \left\{ {\nu \atop \mu\rho} \right\} A_{\nu} dy^{\rho} \quad , \quad (DA_{\mu})_{11} = 0 \tag{XV-116}$$

إلى التغير على هذا المسار:

$$\int dA_{\mu} = \int\int (dA_{\mu})'. \tag{XV-117}$$

واستناداً إلى (XV-103):

$$\int dA_{\mu} = \int\int \Omega^{\nu}_{\mu}\ A_{\nu} = -\int\int G^{\mu}_{\mu\rho\sigma} A_{\nu} ds^{\rho\sigma}. \tag{XV-118}$$

ومن جهة ثانية تقود تغيّرات المركّبات المخالفة للتغيير:

$$dA^{\mu} = -\left\{ {\mu \atop \sigma\rho} \right\} A^{\sigma} dy^{\rho} \tag{XV-119}$$

إلى التغيرات على المسار:

$$\int dA^{\mu} = \int\int (dA^{\mu})' \tag{XV-120}$$

ونجد أيضاً[7]:

$$\int dA^{\mu} = \int\int \Omega^{\nu}_{\mu} A^{\nu} = -\int\int G^{\mu}_{\nu\rho\sigma} A^{\nu} ds^{\rho\sigma}. \tag{XV-121}$$

---

(7) إذ انه استناداً إلى (XV-52):

$$(dA^{\mu})' = d\delta A^{\mu} - \delta dA^{\mu} = -d\left(\left\{ {\mu \atop \sigma\rho} \right\} A^{\sigma}\delta y^{\rho}\right) + \delta\left(\left\{ {\mu \atop \sigma\rho} \right\} A^{\sigma}\ dy^{\rho}\right) \tag{1}$$

فنجد إذاً:

$$\begin{aligned}(dA^{\mu})' = & -\left[\partial_{\tau}\left\{ {\mu \atop \sigma\rho} \right\} - \left\{ {\mu \atop \lambda\rho} \right\}\left\{ {\lambda \atop \sigma\tau} \right\}\right] A^{\sigma}\ dy^{\tau}\delta y^{\rho} \\ & + \left[\partial_{\tau}\left\{ {\mu \atop \lambda\rho} \right\} - \left\{ {\mu \atop \sigma\rho} \right\}\left\{ {\sigma \atop \lambda\tau} \right\}\right] A^{\lambda}\delta y^{\tau}\ dy^{\rho} \\ = & \left[\partial_{\rho}\left\{ {\mu \atop \lambda\tau} \right\} - \partial_{\tau}\left\{ {\mu \atop \lambda\rho} \right\} + \left\{ {\mu \atop \sigma\rho} \right\}\left\{ {\sigma \atop \lambda\tau} \right\} - \left\{ {\mu \atop \sigma\tau} \right\}\left\{ {\sigma \atop \lambda\rho} \right\}\right] A^{\lambda}\delta y^{\rho}\ dy^{\tau} \\ = & \ \frac{1}{2}\ G^{\mu}{}_{\lambda\tau\rho}\ (dy^{\tau}\delta y^{\rho} - \delta y^{\tau} dy^{\rho}) = G^{\mu}_{\lambda\tau\rho}\ A^{\lambda}\ ds^{\tau\rho} = -\ \Omega^{\mu}_{\lambda} A^{\lambda}.\end{aligned} \tag{2}$$

وبالاختصار تقود شروط بنية فضاء ريمان إلى الخصائص التالية:

أ ـ إنعدام الفتل ($\Omega^{\mu} = 0$) فيكون مُعامل الارتباط التآلفي متناظراً:

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \Gamma^{\rho}_{\nu\mu} \qquad \text{(XV-82)}$$

ب ـ إنعدام تقوُّس تشابه الوضع ($\Omega = \Omega^{\mu}_{\mu} = 0$). فلا يتغير طول متَّجِه إذا انتقل متوازياً على نفسه على مسار مغلق تفاضلي. مما يؤمن إمكانية تحديد مقياس للطول متساوٍ في كل نقطة من الفضاء. هكذا نجد استناداً إلى (XV-76):

$$dl^2 \equiv (Dg_{\mu\nu})\, A^{\mu}A^{\nu} = 0. \qquad \text{(XV-122)}$$

حيث $Dg_{\mu\nu}$ هي الصيغة (XV-64). والشرط (XV-122) يفترض إمكانية اختيار إحداثيات بحيث إن:

$$D_{\rho}g_{\mu\nu} = 0. \qquad \text{(XV-123)}$$

ومن المعادلات (XV-82) و (XV-123) تستخلص صيغة الارتباط التآلفي تبعاً لـ $g_{\mu\nu}$ ومشتقاتها الأولى:

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\}. \qquad \text{(XV-124)}$$

ج ـ تقوُّس الدوران غير منعدم ($\Omega^{\nu}_{\mu} \neq 0$). ويعني هذا أنه من غير الممكن إيجاد نظام إحداثيات بحيث إن $g_{\mu\nu}$ ومشتقاتها الأولى والثانية تستوفي الشروط:

$$\Omega^{\nu}_{\mu} = 0 \quad \text{أو} \quad G^{\nu}_{\mu\rho\sigma} = 0 \qquad \text{(XV-125)}$$

كما في حالة الفضاء الإقليدي.

إن بنية الفضاء الريماني محـدَّدة تماماً بالميزات أ وب وج. نشير إلى أن هذه الميزات التي تنحصر بتقوُّسه لا تتعلق إلّا بالموتِّر $g_{\mu\nu}$ ومشتقاته الأولى والثانية. ونقول إن خصائص فضاء ريمَان تحدَّد تماماً بمعرفة الصيغة الأساسية:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dy^{\mu}\, dy^{\nu}. \qquad \text{(XV-126)}$$

10) خصائص موتِّر ريمان ـ كريستوفل

يحدَّد تقوُّس فضاء ريمان ـ بموتِّر ريمان كريستوفل.

$$G^{\rho}_{\mu\nu\sigma} = \partial_\sigma \left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\} - \partial_\nu \left\{ {\rho \atop \mu\sigma} \right\} + \left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\} \left\{ {\rho \atop \lambda\sigma} \right\} - \left\{ {\lambda \atop \mu\sigma} \right\} \left\{ {\rho \atop \lambda\nu} \right\}. \quad \text{(XV-110)}$$

فإذا خفّضنا المؤشر ρ نجد المركّبات:

$$G_{\mu\nu\rho\sigma} = g_{\mu\lambda}\, G^{\lambda}_{\nu\rho\sigma}. \quad \text{(XV-127)}$$

واستناداً إلى (XV-110) تكتب هذه المركّبات بالصيغة:

$$G_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2} \left(\partial_\mu \partial_\rho g_{\nu\sigma} + \partial_\nu \partial_\sigma g_{\mu\rho} - \partial_\mu \partial_\sigma g_{\nu\rho}\right) + \left\{ {\lambda \atop \nu\sigma} \right\} [\rho\mu, \lambda] - \left\{ {\lambda \atop \sigma\mu} \right\} [\nu\rho, \lambda]. \quad \text{(XV-128}$$

وهي متخالفة التناظر بالمؤشرين ρ و σ من جهة و μ و ν من جهة ثانية ولكنها متناظرة في تبديل الأزواج $\mu\nu$ و $\rho\sigma$ أي:

$$G_{\mu\nu\rho\sigma} = -\, G_{\mu\nu\sigma\rho} \quad , \quad G_{\mu\nu\rho\sigma} = -\, G_{\nu\mu\rho\sigma}, \quad \text{(XV-129)}$$

$$G_{\mu\nu\rho\sigma} = G_{\rho\sigma\mu\nu}. \quad \text{(XV-130)}$$

موتِّر ريتشي

إذا ادغمنا المؤشرات ρ و σ في موتِّر ريمان ـ كريستوفل $G^{\rho}_{\mu\nu\sigma}$ نحصل على موتِّر من الرتبة الثانية يسمى موتِّر ريتشي:

$$G_{\mu\nu} = G^{\rho}_{\mu\nu\rho} = \partial_\rho \left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\} - \partial_\nu \left\{ {\rho \atop \mu\rho} \right\} + \left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\} \left\{ {\rho \atop \lambda\rho} \right\} - \left\{ {\lambda \atop \mu\rho} \right\} \left\{ {\rho \atop \lambda\nu} \right\}. \quad \text{(XV-131)}$$

(نشير إلى أن الموتِّر المدغم $G^{\rho}_{\rho\mu\nu}$ ينعدم دائماً في الفضاء الريماني (انظر المعادلة (XV-114))

الموتِّر $G_{\mu\nu}$ متناظر:

$$G_{\mu\nu} = G_{\nu\mu}. \qquad \text{(XV-132)}$$

وبواسطته نستطيع أن نحدِّد التقوُّس الريماني الرقمي:

$$G = g^{\mu\nu}G_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}G^{\rho}_{\mu\nu\rho} = G^{\rho\nu}_{\nu\rho}. \qquad \text{(XV-133)}$$

علاقات تطابقية مهمة:

إن وجود التقوس في الفضاء الريماني يقود إلى أن المشتقات $\nabla_\sigma \nabla_\rho$ الموافقة من الدرجة الثانية لأي موتِّر لا تعادل المشتقات $\nabla_\rho \nabla_\sigma$ للموتِّر ذاته. فإذا رجعنا إلى التحديدات (XV-63) يمكن أن نثبت أن[8]:

$$(\nabla_\rho \nabla_\sigma - \nabla_\sigma \nabla_\rho)\, A^\nu = -\, G^{\nu}_{\tau\rho\sigma}A^\tau \qquad \text{(XV-134)}$$

$$(\nabla_\rho \nabla_\sigma - \nabla_\sigma \nabla_\rho)\, A_\mu = G^{\nu}_{\mu\rho\sigma}A^\tau \qquad \text{(XV-135)}$$

ونتيجة لذلك:

$$(\nabla_\rho \nabla_\sigma - \nabla_\sigma \nabla_\rho)\, A^{\nu\cdots}{}_{\mu\cdots} = -\, G^{\nu}_{\tau\rho\sigma}\, A^{\tau\cdots}{}_{\mu\cdots} + G^{\tau}_{\mu\rho\sigma}\, A^{\nu\cdots}{}_{\tau\cdots} \qquad \text{(XV-136)}$$

لنطبق هذه القاعدة على الموتر $A_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu$ نجد:

$$[\nabla_\rho \nabla_\sigma - \nabla_\sigma \nabla_\rho)\, \nabla_\mu A_\nu - G^{\tau}{}_{\mu\rho\sigma}\, \nabla_\tau A_\nu + G^{\tau}{}_{\nu\rho\sigma}\, \nabla_\mu A_\tau. \qquad \text{(XV-137)}$$

---

(8) إذ إن:

$$(\nabla_\rho\nabla_\sigma - \nabla_\sigma\nabla_\rho)\, A^\nu = \left[\partial_\rho(\nabla_\sigma A^\nu) - \left\{ {\lambda \atop \sigma\rho} \right\} \nabla_\lambda A^\nu + \left\{ {\nu \atop \lambda\rho} \right\} \nabla_\sigma A^\lambda\right]$$

$$- \left[\partial_\sigma(\nabla_\rho A^\nu) - \left\{ {\lambda \atop \rho\sigma} \right\} \nabla_\lambda A^\nu + \left\{ {\nu \atop \lambda\sigma} \right\} \nabla_\rho A^\lambda\right]$$

$$= \left[\partial_\rho\partial_\sigma A^\nu + \partial_\rho\left(\left\{ {\nu \atop \lambda\sigma} \right\} A^\lambda\right) - \left\{ {\lambda \atop \sigma\rho} \right\} \nabla_\lambda A^\nu + \left\{ {\nu \atop \lambda\rho} \right\}\left\{ {\lambda \atop \tau\sigma} \right\} A^\tau\right] - \left[\partial_\sigma\partial_\rho A^\nu\right.$$

$$\left. + \partial_\sigma\left(\left\{ {\nu \atop \lambda\rho} \right\} A^\lambda\right) - \left\{ {\lambda \atop \rho\sigma} \right\}\nabla_\lambda A^\nu + \left\{ {\nu \atop \lambda\sigma} \right\} \partial_\rho A^\lambda + \left\{ {\nu \atop \lambda\sigma} \right\}\left\{ {\lambda \atop \tau\rho} \right\} A^\tau\right]$$

$$= \left[\partial_\rho \left\{ {\nu \atop \lambda\sigma} \right\} - \partial_\sigma \left\{ {\nu \atop \lambda\rho} \right\} + \left\{ {\nu \atop \tau\rho} \right\}\left\{ {\tau \atop \lambda\rho} \right\} - \left\{ {\nu \atop \tau\sigma} \right\}\left\{ {\tau \atop \lambda\rho} \right\}\right] A^\lambda$$

$$= G^{\nu}_{\lambda\sigma\rho}\, A^\lambda = -\, G^{\nu}_{\tau\rho\sigma}\, A^\tau$$

وإذا كتبنا المعادلتين المماثلتين للمعادلة (XV-137) ولكن مع تبادل دوراني للمؤشرات ρ,σ,ν وجمعناهما إلى المعادلة (XV-137) نجد علاقة يجب أن تنعدم فيها المعاملات A_ν و $\nabla_\mu A_\nu$ بشكل منفصل. فنحصل هكذا على المعادلتين المتطابقتين:

(XV-138) $$G^{\tau}_{\nu\rho\sigma} + G^{\tau}_{\sigma\nu\rho} + G^{\tau}_{\rho\sigma\nu} \equiv 0.$$

(XV-139) $$\nabla_\rho G^{\tau}_{\mu\sigma\nu} + \nabla_\nu G^{\tau}_{\mu\rho\sigma} + \nabla^{\tau}_{\sigma} G_{\mu\nu\rho} \equiv 0.$$

المعادلة (XV-139) تسمى عادة معادلة بيانشي Bianchi التطابقية.

وإذا رفعنا المؤشر μ (بالضرب بـ $g^{\mu\lambda}$ ذات المشتقة الموافقة المنعدمة) ثم إذا جمعنا على المؤشرات μ نحصل على المعادلة:

(XV-140) $$\nabla_\rho G^{\tau\lambda}{}_{\sigma\nu} + \nabla_\nu G^{\tau\lambda}{}_{\rho\sigma} + \nabla_\sigma G^{\tau\lambda}{}_{\nu\rho} \equiv 0.$$

وإذا أدغمنا λ و σ من جهة و τ و ν من جهة ثانية نجد:

(XV-141) $$\nabla_\rho G^{\nu\sigma}{}_{\sigma\nu} + \nabla_\nu G^{\nu\sigma}{}_{\rho\sigma} + \nabla_\sigma G^{\nu\sigma}{}_{\nu\rho} \equiv 0.$$

وإذا استعملنا الخصائص (XV-129) لتناظر $G^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma}$ وإذا أخذنا التحديدات (XV-131) و (XV-133) بعين الاعتبار نجد:

(XV-142) $$\nabla_\rho G - 2\nabla_\nu G^{\nu}{}_{\rho} \equiv 0$$

أي المعادلة التطابقية الأساسية في النسبية العامة:

(XV-143) $$\nabla_\nu \left(G^{\nu}_{\rho} - \frac{1}{2}\ \delta^{\nu}_{\rho} G\right) \equiv 0.$$

الموتِّر:

(XV-144) $$S^{\nu}_{\rho} = G^{\nu}_{\rho} - \frac{1}{2}\ \delta^{\nu}_{\rho} G$$

يسمى موتِّر أينشتاين. نشير إلى أن تباعده منعدم بالتطابق:

(XV-145 $$\nabla_\nu S^{\nu}_{\rho} \equiv 0.$$

11) الخطوط التقاصرية (الجيوديسية) في فضاء ريمان
الخطوط المستقيمة في الفضاء الإقليدي بالإحداثيات المقوسة

الصيغة الأساسية في الفضاء القياسي الرباعي تكتب بالإحداثيات المقوَّسة بالصيغة:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dy^\mu\, dy^\nu. \tag{XV-146}$$

فإذا كانت خصائص الفضاء تستخلص كلها من معرفة هذه الصيغة الأساسية يكون الفضاء إقليدياً (إذا انعدم موتِّر ريمان ـ كريستوفل) أو ريمانيا (إذا لم ينعدم هذا الموتِّر).

الخطوط التقاصرية في فضاء ريمان هي «الخطوط الأقرب» أي التي تجعل التكامل $\int ds$ مستقراً stationnary. وفي الحالة الخاصة لفضاء إقليدي تكون الخطوط التقاصرية مستقيمة. تحدَّد إذا الخطوط التقاصرية بالشرط:

$$\delta \int ds = 0. \tag{XV-147}$$

ولكن استناداً إلى (XV-146):

$$2ds\, \delta\, ds = \delta g_{\mu\nu}\, dy^\mu\, dy^\nu + g_{\mu\nu}\, dy^\nu\, \delta\, dy^\mu + g_{\mu\nu}\, dy^\mu\, \delta\, dy^\nu. \tag{XV-148}$$

فتكتب (XV-147) بالصيغة التالية:

$$\delta \int ds = \frac{1}{2} \int \Big[\frac{\partial\, g_{\mu\nu}}{\partial y^\rho}\ \delta y^\rho\ \frac{dy^\mu}{ds}\ \frac{dy^\nu}{ds} + g_{\rho\nu}\ \frac{dy^\nu}{ds}\ \frac{d\delta y^\rho}{ds} + g^{\mu\rho}\ \frac{dy^\mu}{ds}\ \frac{d\delta y^\rho}{ds}\Big]\, ds \tag{XV-149}$$

وإذا حسبنا التكامل بالتجزىء نجد:

$$\int \delta\, ds = \frac{1}{2} \int \Big[\frac{\partial\, g_{\mu\nu}}{\partial y^\rho}\ \frac{dy^\mu}{ds}\ \frac{dy^\nu}{ds} - \frac{d}{ds}\ \Big(g_{\rho\nu}\ \frac{dy^\nu}{ds} + g_{\mu\rho}\ \frac{dy^\mu}{ds}\Big)\Big]\, \delta y^\rho\, ds + \frac{d}{ds}\ \Big(g_{\rho\nu}\ \frac{dy^\nu}{ds}\ \delta y^\rho + g_{\mu\rho}\ \frac{dy^\mu}{ds}\ \delta y^\rho\Big)\, ds. \tag{XV-150}$$

ويختفي الحد الأخير من (XV-150) إذا افترضنا أن δy^{ρ} تنعدم على حدود التكامـل. فيعبر عن الشرط (XV-147) بالمعادلة:

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial y^{\rho}} \frac{dy^{\mu}}{ds} \frac{dy^{\nu}}{ds} - \frac{d}{ds}\left(g_{\rho\nu} \frac{dy^{\nu}}{ds} + g_{\mu\rho} \frac{dy^{\mu}}{ds}\right) = 0 \qquad \text{(XV-151)}$$

لأن المعادلة (XV-150) يجب أن تكون صحيحة بالتطابق لكل تغيُّر δy^{ρ}.

ومن المعادلة (XV-151) نحصل بسهولة على المعادلة:

$$\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial y^{\rho}} - \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial y^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial y^{\nu}}\right) \frac{dy^{\mu}}{ds} \frac{dy^{\nu}}{ds} - g_{\rho\nu} \frac{d^2y^{\nu}}{ds^2} - g_{\mu\rho} \frac{d^2y^{\mu}}{ds^2} = 0. \qquad \text{(XV-152)}$$

الحدّان الأخيران من هذه المعادلة متطابقان. فإذا ضربنا بـ $g^{\rho\sigma}$ نجد أخيراً:

$$\frac{d^2y^{\sigma}}{ds^2} + \frac{1}{2} g^{\sigma\rho}\left(\frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial y^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial y^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial y^{\rho}}\right) \frac{dy^{\mu}}{ds} \frac{dy^{\nu}}{ds} = 0. \qquad \text{(XV-153)}$$

أو:

$$\boxed{\frac{d^2y^{\sigma}}{ds^2} + \left\{ {\sigma \atop \mu\nu} \right\} \frac{dy^{\mu}}{ds} \frac{dy^{\nu}}{ds} = 0.} \qquad \text{(XV-154)}$$

وتكتب غالباً هذه المعادلة بصيغة مختلفة قليلاً، فإذا وضعنا:

$$u^{\mu} = \frac{dy^{\mu}}{ds}. \qquad \text{(XV-155)}$$

تكتب الصيغة (XV-154) تبعاً للدوالّ u^{μ} بالصيغة:

$$\frac{du^{\sigma}}{ds} + \left\{ {\sigma \atop \mu\nu} \right\} u^{\mu}u^{\nu} = 0. \qquad \text{(XV-156)}$$

وإذا أخذنا بعين الاعتبار تحديد التفاضلية المطلقة:

$$\nabla u^{\sigma} = du^{\sigma} + \left\{ {\sigma \atop \mu\nu} \right\} u^{\mu}\, dy^{\nu}, \qquad \text{(XV-157)}$$

تكتب (XV-156) بالصيغة التالية:

(XV-158) $$\frac{\nabla u^\sigma}{ds} = \frac{du^\sigma}{ds} + \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} u^\mu u^\nu = 0 \ , \quad \frac{dy^\rho}{ds} \cdot \frac{\nabla u^\sigma}{dy^\rho} = 0,$$

أي:

(XV-159) $$\boxed{u^\rho \nabla_\rho u^\sigma = 0.}$$

تحدِّد المعادلات (XV-154) و (XV-159) الخطوط التقاصرية في الفضاء الريماني أو الفضاء الإقليدي. فإذا كان الفضاء إقليدياً من الممكن دائماً أن نستعمل إحداثيات غاليلية بحيث يكون:

(XV-160) $$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}.$$

فتصبح المعادلة (XV-158):

(XV-161) $$\frac{du^\rho}{ds} = 0 \quad , \quad \frac{du^0}{ds} = 0$$

واستناداً إلى (VII-12):

(XV-162) $$u^p = \frac{\nu^p}{c} \ u^0 \ , \ u^0 = c \frac{dt}{ds} \ .$$

فتكتب إذاً المعادلات (XV-154) و (XV-159) في هيكل الإسناد الغاليلي:

(XV-163) $$\nu^p = \frac{dy^\rho}{dt} = c^{te} \ , \ y^p = \nu^p t + a^p.$$

وما هذه إلّا معادلات الخطوط المستقيمة في هذا الهيكل الإسنادي المتعامد والمنظَّم.

تمارين

1 ـ ننظر في التشكيل القياسي بمُعامل ارتباط تآلفي عامة ($\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$ غير متناظرة) اثبت أن:

$$D_{\rho} \log g = 2\left[\left\{ {\mu \atop \mu\rho} \right\} - \Gamma^{\mu}_{\mu\rho} \right]$$

$$D_{\rho}\, a = \partial_{\rho} a - a\, \Gamma^{\mu}_{\mu\rho}$$

$$D_{\rho}A^{\mu\rho} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\, \partial_{\rho}\, a^{\mu\rho} + \Gamma^{\mu}_{\sigma\rho}A^{\sigma\rho} + 2A^{\mu\sigma}\,\Gamma_{\sigma} - A^{\mu\sigma}D_{\sigma} \log \sqrt{-g}\,.$$

حيث وضعنا:

$$a = \sqrt{-g}\; A \quad , \quad a^{\mu\rho} = \sqrt{-g}\; A^{\mu\rho} \quad , \quad \Gamma_{\rho} = \Gamma^{\mu}_{\rho\mu}.$$

2 ـ إثبت أن المعادلات السابقة تصبح أبسط إذا كانت $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$ و $\left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\}$ متساوية (وهي حالة الفضاء الإقليدي أو الريماني) وإضافة إلى ذلك إذا كان الموتّر $A^{\mu\rho}$ مخالف التناظر.

3 ـ أعد معالجة المسألة الثالثة في الفصل الرابع عشر إذا لم تكن مُعامِلات الارتباط التآلفي متناظرة. احسب الكميات التالية:

$$\Phi_{\mu\nu} = D_{\mu}\varphi_{\nu} - D_{\nu}\varphi_{\mu}$$

$$\Phi_{\mu\nu\rho} = D_{\mu}\varphi_{\nu\rho} + D_{\rho}\varphi_{\mu\nu} + D_{\nu}\varphi_{\rho\mu}$$

تبعاً للدوالّ $\varphi_{\mu\nu}$ و $\varphi_{\mu\nu\rho}$.

4 ـ ننظر في التشكيل القياسي باتجاهين والمؤلف من سطح كرة شعاعها R نستعمل نظاماً للإحداثيات بحيث إن:

$$ds^2 = f(\xi^2 + \eta^2)\,(d\xi^2 + d\eta^2) \quad , \quad f(0) = 1$$

إحسب $f(\xi^2 + \eta^2)$ وصيغ ξ و η تبعاً لـ R و θ و φ.